أطلب مجاناً مع هذا الكتاب الجزء الخاص بإمتحانات المراجعة

٢٠١٧

رامي

للرياضيات البحتة

الجبر والهندسة الفراغية

٣ ثانوي

شرح موجز للتعاريف والقوانين

مسائل إمتحانات بحلول كامله

تمارين وإختبارات الكتاب المدرسي بحلول كامله

صلاح سوريال

ولنجتون غطاس

للمسائل والامتحانات

في الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة الفراغية

للصف الثالث الثانوي

طبقاً لأحدث مناهج وزارة التربية والتعليم لعام ٢٠١٧

- تمارين ومسائل شاملة ومتدرجة على كل درس
- مسائل امتحانات الثانوية العامة خلال ثمانون عاما
- مسائل مبتكره لتنمية المهارات الذهنية
- جميع التمارين والمسائل مطابقة لأحدث المناهج التي أقرتها الوزارة
- ملحق خاص لإمتحانات الثانوية العامة بدوريها
- جميع المسائل والامتحانات محلولة حلا كاملا

إعداد

الأستاذ/ صلاح سوريال

الأستاذ/ ولنجتون عطية

مقدمـــــــة

الزملاء الأعزاء و أبنائي الطلاب و الطالبات

شكراً لله وحمداً على ما وهبنا من فضله لإخراج سلسلة لامي في (الرياضيات المطورة) ومنها هذا الكتاب، وهو يتميز بوسائل تعليمية خاصة، ينفرد بها دون أي كتاب آخر وهي إحتواء الكتاب على مايلي:

- عدد هائل من المسائل التي تغطي جميع الأفكار الخاصة بكل درس، وهذة المسائل متدرجة من الأسهل إلى الأقوى وكل مسألة مذيلة بالإجابة النهائية، بالإضافة إلى الحل الكامل لها في نهاية كل فرع.
- جميع المسائل الواردة في امتحانات شهادة الثانوية العامة في السنوات السابقة لتدريب الطالب على إكتساب مهارة حل مسائل الإمتحانات المتوقعة من بداية العام الدراسي.
- مسائل متميزة في نهاية كل باب.
- عدد كاف من الإمتحانات الكاملة الحديثة في كل فرع لتدريب الطالب عليها في المراجعة النهائية لإكتساب الثقة والتخلص من رهبة الإمتحانات والحصول على الدرجات النهائية.

تمنياتنا لجميع طلاب وطالبات الثانوية العامة في جميع أنحاء الجمهورية بتحقيق التفوق والمستقبل الزاهر.

وفقكم الله وإيانا في خدمة العلم والتعليم في بلدنا العزيز.

المؤلـــــف

أولا: الجبـــر

الوحدة الأولى:

التباديل والتوافيق ونظرية ذي الحدين

١ـ مبدأ العد – التباديل ـ التوافيق

٢ـ نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

٣ـ إيجاد الحد المشتمل على س ك من مفكوك ذات الحدين

٤ـ النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

تمارين عامة

تمارين واختبارات الكتاب

اختبارات عامة

مبدأ العد - التباديل - التوافيق

أولا : مبدأ العد

- تعريف مبدأ العد الأساسى :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_1$ طريقة ،وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $م_2$ طريقة، وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث $م_3$ طريقة وهكذا إلى $ن$ عملاً فإن :

- قاعدة الضرب:

عدد طرق إجراء العمل الأول والثانى والثالث، .... النونى معاً= $م_1 \times م_2 \times م_3 \times ... \times م_ن$

- قاعدة الجمع:

عدد طرق إجراء العمل الأول أو الثانى أو الثالث أو .. أو النو .= $م_1 + م_2 + م_3 +..+ م_ن$

مضروب العدد

- المضروب :

مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة $\underline{|ن}$ (ويقرأ مضروب ن) ويساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أصغر من أو تساوى ن حيث :

$$\underline{|ن} = ن (ن - ١) (ن - ٢) \times .... \times ٣ \times ٢ \times ١$$

- لاحظ أن : $\underline{|٠} = ١$ ، $\underline{|١} = ١$

$\underline{|ن} = ن \underline{|ن-١} = ن (ن - ١) \underline{|ن-٢}$ (قانون تصغير المضروب)

ثانيا : التباديل

- **تعريف التباديل** $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$: ترمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر في كل مرة .

حيث : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢) \times \ldots\ldots \times (\text{ن}-\text{ر}+١)$

حيث $\text{ر} \leq \text{ن}$ ، $\text{ر} \in \text{ط}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

- **لاحظ أن :** $^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} = ١$

- **نتيجة هامة :** $\boxed{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}}$ حيث $\text{ر} \in \text{ط}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ ، $\text{ر} \leq \text{ن}$

ثالثا : التوافيق

- **تعريف :** $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ = عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء المختارة من بين ن من العناصر في نفس الوقت .

حيث : $\boxed{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}}}$ حيث $\text{ر} \leq \text{ن}$ ، $\text{ر} \in \text{ط}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$.

- **نتائج هامة :**

(١) $\boxed{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}}}$ ، $\boxed{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}}$

(٢) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ص}}$ فإما أن : $\text{س} = \text{ص}$ أ، $\text{س} + \text{ص} = \text{ن}$

(٣) $^{\text{ن}}\text{ق}_{٠} = ١$ ، $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = ١$ ، عندما $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} > ١$ فإن : $\text{ن} > \text{ر}$ ، $\text{ر} \neq ٠$.

(٤) $\boxed{\dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}}$

(٥) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}$

تمارين (١) على (مبدأ العد - التباديل - التوافيق)

المجموعة الأولى:

[١] أكمل ما يأ . :

(١) عدد الاختيارات التى تمكن شخص من اختيار بنطلون من بين ثلاثة بنطلونات وقميص من بين ٤ قمصان تساوى ....

(٢) إذا كان لدينا مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } فإن عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة ، وأقل من ٤٠٠ تساوى ....

(٣) عدد طرق تكوين عدد زوجى مكون من ٤ أرقام من بين الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ يساوى ....

(٤) ${}^{٧}ل_{٠} + {}^{٧}ل_{٢} + {}^{٧}ل_{٣} =$ ....

(٥) إذا كان $\underline{|ن-٢} = ٢٤$ فإن $ن =$ ....

(٦) إذا كان ${}^{٨}ل_{ر} = ١٦٨٠$ فإن $\underline{|ر-٤} =$ ....

(٧) $\dfrac{\underline{|١٥}}{\underline{|١٢}} =$ ....

(٨) $\dfrac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-٢}} =$ ....

(٩) إذا كان : ${}^{١٥}ق_{٧} = ك \times {}^{١٥}ق_{٨}$ فإن $ك =$ ....

(١٠) إذا كان : ${}^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ فإن $ن =$ ....

(١١) ${}^{١٥}ق_{١٢} =$ ....

(١٢) إذا كان : ${}^{١٠}ق_{ر} > ١$ ، ${}^{ر}ق_{٨} > ١$ فإن $ر =$ ....

(١٣) إذا كان : ${}^{ن}ق_{٣} = {}^{ن}ق_{ن-٢}$ فإن $ن =$ ....

(١٤) إذا كان : $^{ن}ق_{٢٠} \succ {}^{ن}ق_{٢٤}$ فإن ن > ....

(١٥) $^{ن}ق_{٧} + {}^{ن}ق_{٨} =$ ....

[٢] أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه :

(١) إذا كان $^{ن+١}ل = \underline{٤|} \times {}^{ن}ل$ فإن ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) إذا كان $^{ن}ل_{٣} = ٢١٠$ ن فإن ن = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٣) إذا كان $^{ن}ل_{٤} = ١٢٠$ فإن ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٤) إذا كان $^{١٠}ل_{ر} = ٥٠٤٠$ فإن ر = ...

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

(٥) إذا كان $\underline{ن+١|} = ٧٢٠$ فإن $\underline{ن-٣|} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(٦) إذا كان : $^{ن}ق_{٥} = ٦$ فإن ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٧) إذا كان : $^{ن}ق_{٥} = ١$ فإن ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٨) إذا كان : $^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{ن-٢}$ فإن ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٩) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢} = ٦$ فإن $ن = ...$.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (ى) ٤

(١٠) إذا كان : $^{ن}ق_{٣} = ٧ن$ فإن $ن = ...$.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (ى) ٨

(١١) إذا كانت : $س = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$ ، $ع = \{\{أ ، ب\} : أ ، ب \in س\}$ فإن عدد عناصر $ص = ...$.

(أ) ١٤ (ب) ١٨ (جـ) ٢١ (ى) ٣٥

المجموعة الثانية :

[١] إذا كان $^{٢م-ن}ل_{٣} = ٢١٠$ ، $^{٢ن}ل_{٢} = ٩٠$. أوجد قيمة $^{٢م}ل_{ن}$.

[٢] إذا كان : $\frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-١}} = ٧٢$ أوجد قيمة : $^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢}$

[٣] إذا كان : $^{٩}ل_{ر-١} : {}^{٩}ل_{ر+١} = ١ : ٤٢$ أوجد قيمة $ر$.

[٤] إذا كان : $^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٧ : ١٠$ أوجد قيمة $ن$.

[٥] إذا كان : $^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$ أوجد قيمة $ن$.

[٦] إذا كان : $\frac{\underline{|ن+٣}}{\underline{|ن-٢}} = ٥٥٤٤٠$ فأوجد قيمة $^{ن-١}ل_{٣}$

[٧] اثبت أن : $\frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-٢}} = ن^{٣} - ن$

[٨] إذا كان : $^{م+ن}ل_{٣} = ٩٩٠$ ، $= ١٢٠$ أوجد قيمة $^{م-١}ل_{ن+١}$

[٩] أوجد قيمة كل من $^{٨}ق_{٣}$ ، $^{١٥}ق_{٤}$ ، $^{٢٠}ق_{١٨}$ ، $^{٥٠}ق_{٤٩}$ ، $^{ن+١}ق_{ن}$ [٥٦ ، ١٣٦٥ ، ١٩٠ ، ٥٠ ، ن+١]

[١٠] إذا كان ${}^{ن}ق_{٩} = {}^{ن}ق_{٦}$ فأوجد قيمة ${}^{ن}ق_{ن-١}$ ، ${}^{ن+٢}ق_{ن}$ [١٥ ، ١٣٦]

[١١] إذا كان ${}^{ن-٣}ق_{١٢} = {}^{ن-٣}ق_{٥}$ إوجد ${}^{ن}ق_{١٩}$ ، ${}^{٢١}ق_{ن}$ [٢١٠ ، ١]

[١٢] إذا كان ${}^{ن}ق_{ن-٢} = ٣٦$ فما قيمة ${}^{ن-١}ق_{٢}$ [٢٨]

[١٣] إذا كان ${}^{ن+١}ق_{ن-١} = ٢١$ فما قيمة ${}^{٢ن-٣}ق_{٢}$ [٨٤]

[١٤] ${}^{ن}ق_{٤} : {}^{ن-٢}ق_{٢} = ٧ : ٢$ [٧ أو ٨]

[١٥] ${}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن-١}ق_{٢} = \frac{١١}{٣}\,{}^{ن-١}ق_{٢}$ [٧]

[١٦] أوجد قيمة كل من النسب الآتية :

(أ) ${}^{١١}ق_{٨} : {}^{١١}ق_{٥}$ (ب) ${}^{٢٣}ق_{٨} : {}^{٢٣}ق_{٩}$

(جـ) ${}^{٣٩}ق_{١٢} : {}^{٣٩}ق_{١٨}$ (د) $({}^{١٣}ق_{٥} + {}^{١٣}ق_{٧}) : {}^{١٣}ق_{٨}$ [$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٣}$]

[١٧] إذا كان : ${}^{١٣}ق_{ر+٢} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ أوجد ر [٣]

[١٨] إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر-١} : {}^{ن}ق_{ر} = ١ : ٣$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{١١}$ أوجد كل من ن ، ر [١٥ ، ٤]

[١٩] مصر (٨٥) : إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٨ : ٣$ ، ${}^{٧}ق_{ر} = {}^{٧}ق_{٢ر-٥}$ أوجد قيمة ن، ر [١٠ ، ٣]

[٢٠] إذا كان ${}^{ن}ق_{٩} > {}^{ن}ق_{٨}$ اثبت أن ن > ١٧

[٢١] مصر (٥٦): إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = \frac{٧}{٦}$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+١}$ أوجد قيمة كل من ن، ر

[ن = ٢٥ ، ر = ١٢]

[٢٢] مصر (٨١) : إذا كان ${}^{ن}ق_{٤}$ وسط حسابي بين ${}^{ن}ق_{٥}$ ، $\frac{٣}{٤}\,{}^{ن}ق_{٣}$ أوجد ن [٩ ، P٨]

[٢٣] السعيدية : إذا كونت الكميات $\frac{٥}{٦} \times {}^{١٢}ق_{ر}$ ، $٤ \times {}^{١٢}ق_{ر-١}$ ، $٢٧ \times {}^{١٢}ق_{ر-٢}$ ، متتابعة هندسية فما قيمة ر [٩ ، P٥]

[٢٤] اثبت أن ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر} = \frac{ن}{ن-ر}$ ومن ثم احسب قيمة $\frac{{}^{٢٧}ق_{١٩} + {}^{٢٦}ق_{١٩}}{{}^{٢٦}ق_{١٩}}$ [$\frac{٣٥}{٨}$]

[٢٥] اثبت أن $\frac{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+1}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن+1}{ر+1}$ واستخدم ذلك في حل المعادلة $\frac{{}^{ن}ق_{9} + {}^{ن}ق_{8}}{{}^{ن}ق_{8}} = \frac{7}{3}$ [٢٠]

[٢٦] اثبت أن ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+1} = {}^{ن+1}ق_{ر+1}$ ومن ثم

(أ) : اثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} + 2\,{}^{ن}ق_{ر-1} + {}^{ن}ق_{ر-2} = {}^{ن+2}ق_{ر}$

(ب) حل المعادلة $\frac{{}^{17}ق_{ر} + {}^{17}ق_{ر+1}}{{}^{17}ق_{ر+1} + {}^{17}ق_{ر+2}} = \frac{7}{12}$ [ر = ٥]

[٢٧] اختير ٣ أشخاص معاً من مجموعة مكونة من ٥ رجال، ٤ نساء أوجد بكم طريقة يمكن اختيار الأشخاص الثلاثة في كل من الحالات الآتية :

(أولاً) إذا كان الأشخاص الثلاثة من أي جنس.

(ثانياً) إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس.

(ثالثاً) إذا كان الأشخاص الثلاثة فيها اثنان فقط من نفس الجنس.

(رابعاً) إذا كان الأشخاص الثلاثة فيها اثنان على الأقل من نفس الجنس [٨٤ ، ١٤ ، ٧٠ ، ٨٤]

[٢٨] تحتوي ورقة أسئلة على ٨ أسئلة وعلى الطالب أن يجيب على ٦ منها بشرط أن يتضمنا سؤالان على الأقل من الأربعة الأولى وسؤالان على الأقل من الأربعة الأخيرة فبكم طريقة يمكن للطالب اختيار هذه الأسئلة ؟ [٢٨]

المجموعة الثالثة:

تمارين (١-١) من الكتاب المدرسي

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات المعطاة:

(١) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معاً أو ثلاثة أحرف مختلفة معاً من عناصر المجموعة {أ ، ب، جـ ، ء ، هـ و} هي:

(أ) ${}^{6}ق_{2} \times {}^{6}ق_{3}$ (ب) ${}^{6}ل_{2} \times {}^{6}ل_{3}$ (جـ) ${}^{6}ق_{2} + {}^{6}ق_{3}$ (ء) ${}^{6}ل_{2} + {}^{6}ل_{3}$

(٢) إذا كان ${}^{ن}ق_{5} : {}^{ن}ق_{4} = 3 : 1$ فإن ن تساوى:

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٧ (ء) ١٩

(٣) اشترك ١٢ لاعباً فى مسابقة للسباحة، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثانى والثالث؟

(أ) ١٢٣٠ (ب) ١٣٢٠ (جـ) ٢٣١٠ (ى) ٣٢١٠

(٤) أى القيم الآتية يمكن أن تساويها $^{٧}ل_{٢}$ ؟

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٧ (ى) ٣٠

(٥) إذا كان $^{١٧}ل_{م+٥} = {}^{٢٩}ل_{م+٥}$ فإن م تساوى:

(أ) ٥ (ب) ٠ (جـ) ٥ (ى) ١٢

(٦) إذا كان $^{ن-٣}ل_{٧} = \underline{|٨}$ فإنها تساوى:

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (ى) ١٥

(٧) قيمة $^{٥٠}ق_{٤} + \sum_{ر=١}^{٦} {}^{٥٦-ر}ق_{١٣}$ تساوى:

(أ) $^{٥٦}ق_{٤}$ (ب) $^{٥٦}ق_{٣}$ (جـ) $^{٥٥}ق_{٤}$ (ى) $^{٥٥}ق_{٣}$

(٨) يجب على طالب أن يجيب عن ١٠ أسئلة من ١٣ سؤالاً بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمس الأولى، كم طريقة يمكن بها أن يجيب الطالب؟

(أ) ١٤٠ (ب) ١٩٦ (جـ) ٢٨٠ (ى) ٣٤٦

(٩) إذا كان $^{ن+٢}ق_{٤} = ن^{٢} - ١$ فإن ن تساوى:

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (ى) ١٠

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٠) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجى وعددين فردين من ٤ أعداد زوجية، ٥ أعداد فردية.

(١١) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجى أو عددين فردين من ٤ أعداد زوجية، ٥ أعداد فردية.

(١٢) كم طريقة يمكن بها توزيع ٨ جوائز بالتساوى على ٤ طلاب.

(١٣) كم عدداً مكوناً من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}؟

أ - مع الإحلال ب- بدون إحلال

(١٤) إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} وبفرض عدم السماح بتكرار الرقم أوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر س.

أ- إذا كان العدد مكوناً من ٣ أرقام بالضبط. ب- إذا كان العدد مكوناً من ٣ أرقام على الأقل.

جـ- إذا كان العدد مكوناً من ٣ أرقام على الأكثر.

(١٥) أوجد قيمة كل من ن ، ر فى كل مما يأتى:

(أ) $^{ن}ل_{٢} = ٢$ ، $^{ن+ر}ل_{٢} = ٩٠$ (ب) $^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠$ ، $^{٨}ل_{ر} = ٣٣٦$

(جـ) $^{ن}ق_{٢} = ٢١$ ، $^{ن+ر}ل_{٢} = ٩٩٠$ (ى) $^{ن}ق_{ر} = ١٠$ ، $\underline{|ن-ر} = ٦$

(١٦) إذا كان $^{ن}ق_{ر-١} = ٢:٣$ ، $^{ن}ق_{ر-٢} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٤:٣$ أوجد القيمة العددية لكل من ن، ر.

(١٧) أثبت أن $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{ر-١}{ن+١}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة $\frac{^{١٥}ق_{٦} + {}^{١٥}ق_{٧}}{^{١٥}ق_{٦}}$

(١٨) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر} = \frac{ن}{ن-ر}$ ثم استخدم ذلك فى حل المعادلة $\frac{^{ن}ق_{٨} + {}^{ن-١}ق_{٨}}{^{ن-١}ق_{٨}} = ٣$

(١٩) إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١}$ ، $^{ن+١}ق_{ر} = \frac{٤٠}{\underline{|ر}} \times {}^{ن}ل_{ر-٢}$ أوجد قيمة كل من ن ، ر.

(٢٠) إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \; {}^{ن}ق_{ن-ر}$ فاحسب قيمة $^{١٢}ق_{٢ر}$ ثم أوجد أقل قيمة للمتغير ن والتى تجعل العلاقة صحيحة.

(٢١) أوجد قيمة كل من ن، ر إذا كان $^{ن}ق_{ر-١} : {}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١ : ٥ : ١٥$

(٢٢) أثبت أن $^{ن+١}ق_{ر+١} \div {}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن+١}{ر+١}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة $\frac{^{١٥}ق_{٥} + {}^{١٤}ق_{٤}}{^{١٤}ق_{٤} + {}^{١٣}ق_{٣}}$

(٢٣) إذا كان $\frac{^{١٣}ق_{ر} + {}^{١٣}ق_{ر+١}}{^{١٣}ق_{ر-١} + {}^{١٣}ق_{ر}} = ٢$ فأوجد قيمة ر

(٢٤) إذا كان $^{٣٠}ل_{س} = {}^{٣٠}ل_{س+٢ص}$ فما قيمة كل من س ، ص ؟

(٢٥) إذا كان $^{ن}ل_{٨} \leq {}^{ن}ل_{٧}$ فما قيمة ن؟

(٢٦) إذا كان: $\underline{|م+ن} = ٣٨٠ \; \underline{|م+ن-٢}$ فأوجد قيمة م + ن

(٢٧) حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $\underline{|ن+٢}\ \underline{|٣ن-٤} = \underline{|ن}\ \underline{|٣ن-٢}$ (ب) $٢\,\underline{|٢ن} = (ن^٢+٣ن+٢)\,(\underline{|ن})^٢$

(ج) $\underline{|٢ن}\ \underline{|ن-٣} = ٧٢\ \underline{|٣ن-٧}$

(٢٨) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة كل من ن ، ر

إذا كان $^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩\ {}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠$ ، $^{ن}ق_{ر-١}$

(٢٩) الارتباط بالمتتابعات:

(أ) إذا كان ٤ × $^{ن}ق_{٥}$، ٣ × $^{ن}ق_{٦}$ ، ٣ × $^{ن}ق_{٧}$ تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

(ب) إذا كان ٢ × $^{١٤}ق_{ر+١}$ ، ٣ × $^{١٤}ق_{ر}$ ، ٦ × $^{١٤}ق_{ر-١}$ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة ر.

(٣٠) أوجد قيمة كل من ن ، ر فى كل مما يأتى:

(أ) $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ١ : ٢ : ٣$

(ب) $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١٥ : ٢٨ : ٢٤$

(ج) $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$

(ى) $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٩ : ٥$ ، $^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٢ر-٥}$

(هـ) $^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ ، $^{ن}ل_{٧} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$

(٣١) لدينا ٤ نقاط فى مستوى واحد، وليست على استقامة واحدة، أوجد عدد القطع المستقيمة التى تصل كل منها بين نقطتين؟

(٢٣) كم طريقة يمكن بها اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص؟

(٣٣) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنة للطلبة بها أعضا من بين ٢٠ طالباً وعشر طالبات، بحيث تتكون اللجنة من ٤ طلاب وطالبتين؟

(٣٤) كم طريقة يمكن بها تكون فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد، بحيث يحتوى الفريق على ثلاثة أولاد فقط؟

(٣٥) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصاً بحيث لا يدخل شخص فى اللجنتين فى ذات الوقت؟

(٣٦) أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رووس لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦

(٣٧) أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢

(٣٨) يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء:

(أ) أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.

(ب) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط؟

(جـ) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة على الأقل؟

المجموعة الرابعة:

تمارين مختارة من إمتحانات الثانوية العامة

■ (١) مصر (٨٠) : إذا كان ٦ × ${}^{ن}ق_{ن-٣} = {}^{ن}ل_{ن-٢}$ فما قيمة ن [٥]

■ (٢) الأورمان : إذا كان ${}^{ن}ق_{ر+٣} = {}^{ن}ق_{٧-ر}$ ، ${}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ أوجد قيمة كل من ن ، ر [١٠ ، ٣]

■ (٣) الأورمان : إذا كان ${}^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٥٠٤٠$ ، ${}^{ن+١}ق_{ر} : {}^{ن+١}ق_{ر-١} = ٢ : ٣$ فأوجد قيمتي ر ، ن
[٦ ، ٨]

■ (٤) مصر ٩٩ : إذا كان : ${}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٤}$ ، ك = ٢٤ أوجد قيمة ${}^{ن}ل_{ر}$ [٣٠٢٤]

■ (٥) مصر ٢٠٠٠ : إذا كان $\underline{|ن} = ٧٢٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = \frac{٣}{٤}$ أوجد قيمة ${}^{ن}ل_{ر}$ [٣٦٠]

■ (٦) مصر ٢٠٠٣ : أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن-١}ق_{ر-١} : \frac{ر}{ن}$

ومن ثم أوجد قيمة $\frac{{}^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{{}^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}}$ [$\frac{٥٨}{٩}$]

■ (٧) مصر ٢٠٠٤ : إذا كان: ${}^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ ، ${}^{ن}ل_{٧} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$ أوجد قيمة $\underline{|ن-ر}$ [١]

■ (٨) مصر ٢٠٠٥ : إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ٢٤ \times {}^{ن}ق_{ر}$ أوجد قيمة ${}^{١٠}ق_{٢ر}$ ثم أوجد أقل قيمة للعدد ن تجعل هذه العلاقة صحيحة.
[٤٥ ، أقل قيمة د ن هى ن = ٤]

■ (٩) مصر ٢٠٠٦ : إذا كان ${}^{ن+٢}ل_{ر} : {}^{ن+٢}ق_{ر} = ٢ : ١$ ، ${}^{ن}ق_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} : ٥ : ٣$ أوجد قيمة: ${}^{ن٢}ق_{ن-ر}$
[٢٠٠٢]

■ (١٠) مصر ٢٠٠٧ : إذا كان: ${}^{ن}ق_{٣} = ٥ن$ ، ${}^{ن}ل_{ر+١} = ٢١٠$ أوجد قيمة كل من ن ، ر [٢ ، ٧]

■ (١١) مصر ٢٠٠٨ : إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} : ٥ \times {}^{ن-١}ق_{ر-٢} = ٧ : ٤ : ٦$ أوجد قيمة : $\frac{\underline{|ن-٤}}{(\underline{|ر})^{٢}}$

[$\frac{٥}{٤}$]

■ (١٢) مصر ٢٠٠٩ : إذا كان : ${}^{ن+١}ل_{ر+١} = ٧ \times {}^{ن}ل_{ر}$ ، $٤ \times {}^{ن}ق_{ر} = ٣ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$ أوجد قيمة ن ، ر ، $\underline{|ن-ر-٢}$

[٦ ، ٤ ، ١]

اختبارات كتاب لامي للمراجعة على (التباديل و التوافيق)

الاختبار الأول

[١] (أ) أكمل :

(١) ${}^{١٠}ل_{٤} =$ .... (٢) $\underline{|٦} =$ ....

(٣) ${}^{٨}ق_{٥} =$ .... (٤) $\frac{{}^{١٢}ق_{٦}}{{}^{١٢}ق_{٧}} =$ ....

[ب] اختر الاجابة الصحيحة:

(١) ${}^{١١}ق_{٦} : {}^{١١}ق_{٥} =$ .... (أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٢) إذا كان. ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{٥}$ فإن ، ن = ... (أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٣) إذا كان: ${}^{ن}ل_{٣} = ٩٠ن$ فإن، ن = ... (أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٤) إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ٢٤ . {}^{ن}ق_{ر}$ فإن ر = ... (أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

[٢] (أ) اثبت أن : ${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر-١} = ن$ ومن ذلك إذا كان: ${}^{ن}ل_{٥} = {}^{ن}ل_{٤} : ٧$ أوجد قيمة ن.

(ب) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = ١$ ، ${}^{ن+٤}ق_{ر+٢} = ٢٨$ أوجد قيمة كل من ن ، ر

[٣] (أ) إذا كان : ${}^{ن+١}ق_{١١} > {}^{ن+١}ق_{١٠}$ أثبت أن : ن < ٢٠

(ب) إذا كان : $\frac{{}^{ن}ق_{٧} + {}^{ن}ق_{٨}}{{}^{ن}ق_{٦} + {}^{ن}ق_{٧}} = ٢$ أوجد قيمة ن .

الاختبار الثانى

[١] (أ) اكمل : (١) إذا كان $\underline{|ن} = ١٢٠$ فإن ن = ... (٢) $\frac{\underline{|ن+٣}}{\underline{|ن+١}} =$ ....

(٣) $^{٢٥}ق_{٢٢}$ .... = (٤) $^{٣٥}ق_{٣٣} + {}^{٣٥}ق_{٣٤} =$ ....

(ب) اختر الإجابة الصحيحة:

(١) $^{٧}ل_{٤} = {}^{٥}ل_{٢} =$ .... (أ) ٤٢ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١٠}{٣}$ (د) ٢٠

(٢) إذا كان : $^{١٠}ل_{ر} = ٥٠٤٠$ فإن $\underline{|ر} =$ .... (أ) ٢٠ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(٣) $^{٢٧}ق_{٢٢} - {}^{٢٧}ق_{٥} =$ .... (أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ١٢

(٤) إذا كان: $^{ن}ق_{١٠} < ١$ ، $^{١٧}ق_{ن} < ١$ فإن ن = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

[٢] (أ) حل المعادلة: (١) $٢٠\,\underline{|ن} = \underline{|ن+٢}$ (٢) $^{ن+٢}ل_{٤} = ٧٢ \times {}^{ن}ل_{٢}$

(ب) إذا كان : $^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ٤ : ٤$ أوجد قيمة كل من ن ، ر

[٣] (أ) إذا كان : $^{ن}ق_{٤}$، $^{ن}ق_{٥}$، $^{ن}ق_{٦}$ فى تتابع حسابى أوجد قيمة ن.

(ب) إذا كان : $({}^{ن}ق_{٩} + {}^{ن}ق_{٨}) : {}^{ن+١}ق_{٨} = ٢ : ١$ فأوجد قيمة ن.

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

(١) المفكوك العام لمقدار ذى حدين

- $(\text{أ}+\text{س})^{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{.}\,\text{أ}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{س}\,\text{أ}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{س}^{2}\,\text{أ}^{\text{ن}-2} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}} + \dots {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$
- $(\text{أ}-\text{س})^{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{.}\,\text{أ}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{س}\,\text{أ}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{س}^{2}\,\text{أ}^{\text{ن}-2} \dots {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}(-\text{س})^{\text{ن}}$
- $(1+\text{س})^{\text{ن}} = 1 + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{س}^{2} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$
- $(1-\text{س})^{\text{ن}} = 1 - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{س}^{2} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}(-\text{س})^{\text{ن}}$

ملاحظات هامة

(١) عدد حدود مفكوك $(\text{أ}+\text{س})^{\text{ن}}$ هو ن + ١ حداً.

(٢) المفكوك: $(\text{أ}+\text{س})^{\text{ن}}$ يسمى المفكوك حسب قوى س التصاعدية بينما المفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$ يسمى المفكوك حسب قوى س التنازلية.

(٣) المفكوك: $(\text{أ}+\text{س})^{\text{ن}} = (\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$ ولكن مع عكس ترتيب الحدود.

(٤) فى مفكوك: $(1+\text{س})^{\text{ن}}$

(أ) معامل $\text{س}^{\text{ر}}$ هو ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

(ب) مجموع معاملات جميع الحدود = ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{.} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = 2^{\text{ن}}$ وذلك بوضع س =١ فى طرفى المفكوك.

(٥) الصور السابقة لمفكوك المقدار ذى الحدين هى متساوية (أى متطابقة) تتحقق لجميع قيم س.

(٢) الحد العام لمفكوك مقدار ذى حدين : مثل $(س+ص)^{ن}$

هو : $\boxed{ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \times ص^{ر} \times س^{ن-ر}}$

- فمثلاً فى مفكوك $\left(\frac{س^{2}}{2} + \frac{3}{س}\right)^{17}$

$ح_{6} = {}^{17}ق_{5} \left(\frac{3}{س}\right)^{5} \left(\frac{س^{2}}{2}\right)^{12}$ وللحصول على معامل حدما نضع س = ١ فى ذلك الحد

أى معامل $ح_{6}$ السابق = $ح_{6} = {}^{17}ق_{5} (3)^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ وهكذا

(٣) رتبة الحد الأوسط فى مفكوك مقدار ذي الحدين

تذكر : الحد الأوسط هو الحد الذى يسبقه عدد من الحدود= عدد الحدود التى تليه.

(أ) إذا كان الأس ن = عدد زوجى

∴ عدد الحدود = ن + ١ = عدد فردى

∴ يوجد حد أوسط واحد

رتبة الحد الأوسط = $\frac{ن + 2}{2}$

(ب) إذا كان الأس ن = عدد فردى

∴ عدد الحدود = ن + ١ = عدد زوجى

∴ يوجد حدان أوسطان

رتبة الحد الأوسط الاول = $\frac{ن + 1}{2}$

رتبة الحد الأوسط الثانى = $\frac{ن + 3}{2}$

(٤) النسبة بين أى حد والسابق له في مفكوك مقدار ذى حدين

إذا كان : $(س + ص)^{ن}$ "س = الحد الأول ، ص = الحد الثانى"

- **فإن :** $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ص}{س} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثاني بإشارته}}{\text{الأول بإشارته}}$

- **نتيجة:** $\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل الثاني بإشارته}}{\text{معامل الأول بإشارته}}$

- **ملاحظة هامة :** لإيجاد اكبر حد في المفكوك نفرض أنه $ح_{ر+١}$

وبذلك يكون $ح_{ر+١}$ أكبر من $ح_{ر}$ و أكبر من $ح_{ر+٢}$ لجميع قيم $ر$ بالمفكوك

تمارين (٢) على ذى الحدين بأس صحيح موجب

المجموعة الأولى:

أ) أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان عدد حدود المفكوك $(٣ س - ص)^{ن + ١}$ يساوى ١٥ حداً فإن : ن = ...

(٢) عدد حدود المفكوك $(٣ س - ٢ ص)^{٧}$ يساوى ....

(٣) مجموع معاملات الحدود فى مفكوك $\left(٣س^{٢} - \frac{٤}{س}\right)^{٥}$ يساوى ....

(٤) فى مفكوك $(١ + س)^{٥}$ حسب قوى س التصاعدية فإن : معامل $س^{٢}$ − معامل $ح_{٤}$ = ...

(٥) عند استخدام مفكوك $(س + ٢)^{٦}$ لإيجاد قيمة مقربة للعدد $\left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^{٦}$

فإننا نضع : س= ....

(٦) عند استخدام مفكوك $(٢ - س)^{٤}$ لإيجاد قيمة مقربة للعدد $(١,٩٧)^{٤}$ فإننا نضع: س =...........

(٧) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك $(٢ س - ٣ ص)^{ن}$ هو $ح_{٧}$ فإن : ن = ...

(٨) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك (أ + ب)^{ن} هما ح$_{٧}$ ، ح$_{٨}$ فإن : ن =....

(٩) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك $\left(أس + \frac{١}{٤س}\right)^{٦}$ يساوى $\frac{٥}{٢}$ فإن : أ = ...

(١٠) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك (٢ + ب)^{٩} متساويان فإن : ب = ...

(١١) فى مفكوك (١ + س)^{١٢} حسب قوى س التصاعدية فإن : معامل ح$_{٥}$ =........

(١٢) الحد الثالث من النهاية فى مفكوك $\left(\frac{١}{س} - ٢س\right)^{٦}$ حسب قوى س التصاعدية =.......

ب) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الحد الأخير فى مفكوك ([٣ + س)^{٤} ([٣ − س)^{٤} هو .... [س^{٤} أ، − س^{٤} أ، س^{٨} أ، − س^{٨}]

(٢) إذا كان : ١ + ٧ س + ق$^{٧}_{٢}$ س^{٢} + ق$^{٧}_{٣}$ س^{٣} + ... + س^{٧} = ٢١٨٧ فإن : س = ...

[١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٤]

(٣) معامل س^{٧} فى مفكوك (١ − س)^{١١} هو ..... [ق$^{١١}_{٦}$ أ، − ق$^{١١}_{٧}$ أ، − ق$^{١١}_{٦}$ أ، ق$^{١١}_{٧}$]

(٤) مجموع معاملات الحدود فى مفكوك $\left(\frac{٥}{س} - ٣س^{٢}\right)^{٦}$ يساوى ....

[٦٤ أ، ١٢٨ أ، − ٦٤ أ، − ١٢٨]

(٥) الحد الرابع فى مفكوك $\left(\frac{س}{٣} + \frac{٣}{س}\right)^{٦}$ هو .... [٢٠ س أ، $\frac{٢٠}{س}$ أ، ٢٠ أ، ٢٠ س^{٢}]

(٦) إذا كان عدد حدود مفكوك (أ + ب)$^{٣ ن − ١}$ يساوى عدد حدود مفكوك (س + ص)^{١٤}

فإن : ن = ... [٣ أ، ٥ أ، ١٣ أ، ١٤]

(٧) فى مفكوك (٢ أ − ٣ ب)^{٧} إذا كان: أ=ب فإن المفكوك = ...

[أ^{٧} أ، ب^{٧} أ، − أ^{٧} أ، ٣ ب]

(٨) معامل س^{٥} فى مفكوك (١ − س)^{٩} حسب قوى س التصاعدية =...............

[ق$^{٩}_{٤}$ أ، ق$^{٩}_{٥}$ أ، − ق$^{٩}_{٥}$ أ، ١٢٦]

(٩) إذا كان الحد الرابع فى مفكوك $\left(س+\frac{٢}{س}\right)^{٩}$ يساوى $\frac{٢١}{١٦}$ فإن : س = ...

[٨ أ، $\frac{١}{٨}$ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، ٢]

(١٠) إذا كان الحد الرابع فى مفكوك $\left(\frac{١}{س}+س\right)^{٥}$ يساوى ٤٠ فإن : س = ...

[٤ أ، – ٤ أ، ٥ أ، ١٠]

(١١)إذا كان معامل $س^{٥}$ فى مفكوك $(١+س)^{٩}$ يساوى ١٤$ص^{٢}$ فإن: ص=..........

[-٣ أ، ٣ أ، –٣ أ، ٩]

المجموعة الثانية: (مفكوك ذي الحدين)

➢ باستخدام نظرية ذي الحدين أوجد مفكوك كل مما يأتي :

■ (١) : $(أ + ب)^{٧}$

■ (٢) : $(س - أ)^{٦}$

■ (٣) : $(٢أ + ٣ب)^{٥}$

■ (٤) : $(٣س - ٢ص)^{٤}$

■ (٥) : $\left(\frac{س}{٢}-\frac{٣}{س}\right)^{٦}$

■ (٦): $\left(٢س + \frac{١}{\sqrt{٢س}}\right)^{٥}$

■ (٧) : $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢س})^{٦}$ $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢س})^{٦}$

■ (٨) : $(٢+ \sqrt{٣-س})^{٥}$ $(٢- \sqrt{٣-س})^{٥}$

➢ باستخدام نظرية ذي الحدين أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الجواب إلى ٣ أرقام عشرية.

■ (٩) : $(١,٠٢)^{١٠}$

■ (١٠) : $(٠,٩٩)^{٧}$

■ (١١) : (٠,٩٦)

[١,٢١٩ ، ٠,٩٣٢ ، ٠,٨١٥]

■ (١٢) : أوجد مفكوك $(س + ٢)^{٦}$ باستخدام ذي الحدين ثم استخدم المفكوك لإيجاد قيمة $\left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^{٦}$

مقربة لثلاثة أرقام عشرية [٦٥،٩٤٤]

■ (١٣) : أوجد مفكوك $(٢س - ٣ص)^{٥}$ باستخدام نظرية ذي الحدين واستخدم المفكوك في إيجاد قيمة

$(٩٧،١)^{٥}$ مقرباً الجواب إلى ٣ أرقام عشرية [٢٩،٦٧١]

■ (١٤) : إذا كان ١ + ٧س + $\frac{٦\times٧}{١\times٢}$ $س^{٢}$ + ··· + $س^{٧}$ = ٢١٨٧ فما قيمة س [٢]

■ (١٥) : إذا كان :$(١ - س)^{٨}$ + ١٦س$(١ - س)^{٧}$+ ١١٢ $س^{٢}$ $(١ - س)^{٦}$ + ··· +٢٥٦ $س^{٨}$ = ٠

فما هي قيمة س [-١]

■ (١٦) : $(١ + \sqrt{٥})^{٤} + (١ - \sqrt{٥})^{٤}$ [١١٢]

■ (١٧) : $(١ + ٢\sqrt{٢})^{٦} - (١ - ٢\sqrt{٢})^{٦}$ [٢٢٠٠ $\sqrt{٢}$]

■ (١٨) : $(٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢})^{٥} - (٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٢})^{٥}$ [١٩٢٢٤ $\sqrt{٢}$]

■ (١٩) : $(١,٠٢)^{١٢} + (٠,٩٨)^{١٢}$ مقرباً إلى ٣ أرقام عشرية [٢,٠٥٣]

■ (٢٠) : $(١,٠٠٣)^{٦} - (٠,٩٩٧)^{٦}$ مقرباً إلى ٣ أرقام عشرية [٠,٠٣٦]

■ (٢١) : إذا كان $(س + ١)^{٤} + (س - ١)^{٤} = ١٦$ أوجد قيمة س [± ١]

■ (٢٢) : إذا كان $(س + \sqrt{٢})^{٦} - (س - \sqrt{٢})^{٦} = ٥٦٠\ س\ \sqrt{٢}$ أوجد قيمة س [٠،٢،-٢]

■ (٢٣) : إذا كان $(١ + س)^{٨} = ق_{٠} + ق_{١}\ س + ق_{٢}\ س^{٢} + \cdots + ق_{٨}\ س^{٨}$ أوجد قيمة كل من :

(i) $ق_{٠} + ق_{١} + ق_{٢} + \cdots + ق_{٨}$ [٢٥٦]

(ii) $(ق_{٠} - ق_{١}) + (ق_{٢} - ق_{٣}) + \cdots + (ق_{٧} - ق_{٨})$ [صفر]

(iii) $ق_{٠} + ٢\ ق_{١} + ٤\ ق_{٢} + ٨\ ق_{٣} + \cdots + ٢٥٦\ ق_{٨}$ [٦٥٦١]

مسائل على الحد العام والحد الأوسط في مفكوك ذي الحدين

- **أوجد قيمة الحد المطلوب في مفكوك كلاً مما يأتي :**

■ (١) : $ح_{٥}$ في $(١ + ٢س)^{٨}$ ، $ح_{٧}$ في $(٢س - ١)^{١٠}$ [١١٢٠ $س^{٤}$ ، ٣٣٦٠$س^{٤}$]

■ (٢) : $ح_{٤}$ في $(٢ + س)^{٦}$ ، $ح_{٦}$ في $\left(\sqrt{س} - \frac{س}{٣}\right)^{٩}$ [١٦٠$س^{٣}$ ، $-\frac{١٤}{٣}\ س^{٥}$]

■ (٣) : $ح_{٥}$ في $\left(\sqrt{س} - \frac{ص}{٣}\right)^{٨}$ ، $ح_{٧}$ في $\left(\frac{٣}{٢}\ س^{٢} - \frac{١}{٣س}\right)^{٩}$ [$\frac{٣٥}{٨}\ س^{٢}\ ص^{٤}$ ، $\frac{٧}{١٨}$]

■ (٤) : أوجد معامل الحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٣}{س^{٣}}\right)^{٨}$ [$\frac{١٨٩}{٤}$]

- **أوجد رتبة وقيمة كلاً من الحدود الآتية :**

■ (٥) : (أ) الحد الأوسط في مفكوك $(١ - س)^{١٢}$ [٩٢٤ $س^{١٤}$]

(ب) الحدان الأوسطان في مفكوك $(١ + س\ \sqrt{٢})^{٩}$ [$ح_{٥} = ٥٠٤\ س^{٤}$ ، $ح_{٦} = ٥٠٤\ \sqrt{٢}\ س^{٥}$]

■ (٦) : (أ) الحد الأوسط في مفكوك $\left(س+\frac{٢}{س}\right)^{١٠}$ [٨٠٦٤]

(ب) الحدان الأوسطان في مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٣}+\frac{٣}{س}\right)^{١٥}$ [$ح_{٨} = ٢١٤٥\ س^{٩}$ ، $ح_{٩} = ١٩٣٠٥\ س^{٦}$]

■ (٧) : أوجد النسبة بين الحد السابع في مفكوك $(٣س - ١)^{١٤}$ ، الحد التاسع في مفكوك $(س+٣)^{١٦}$

[٣٠ : ٧]

■ (٨):أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣}+\frac{٣}{٢س}\right)^{١٠}$ عندما س= ٣ [٢١ : ١٦٠]

■ (٩) : في مفكوك $(س + أ ص)^{٧}$ إذا كان معامل $ح_{٥} = ٥٦٠$ فما قيمة أ [± ٢]

■ (١٠) : إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(٣س^{٢} + \frac{٨}{٣س}\right)^{٨}$ يساوي ١٧٩٢٠ فما قيمة س [± ٢]

■ (١١) : إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٣س + ٢ص)^{١٣}$ متساويين اثبت أن ٣س = ٢ص

■ (١٢) : في مفكوك $(١ + س)^{١٠}$ حسب قوى س التصاعدية وجد أن نسبة الحد التاسع إلى الحد الأوسط تساوي ١٠ : ٧ أوجد قيمة س [٢]

■ (١٣) : مصر (٤٤) : إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(أ س + ب)^{٢ن+١}$متساويين بفرض ن عدد صحيح موجب فأوجد قيمة س [$\frac{ب}{أ}$]

■ (١٤) : إذا كانت النسبة بين $ح_{٦}$ في مفكوك $\left(س+ \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ ، $ح_{٥}$ في مفكوك $\left(س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٤}$ يساوي ٨ : ٩ ، أوجد قيمة س [$\frac{٢}{٣}$]

■ (١٥) : إذا كانت النسبة بين $ح_{٦}$ في مفكوك $(٢س + ١)^{٩}$ ، $ح_{٨}$ في مفكوك $(أ س^{٢} + ٢)^{٩}$ ، تساوي ٧ : ٥٤ ، أوجد قيمة أ [$\frac{٢}{٣}$]

■ (١٦) : أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك:

$(١ + س)^{٦} + ٦\ س\ (١ + س)^{٥} + ١٥\ س^{٢}\ (١ + س)^{٤} + \cdots + س^{٦}$ [$ح_{٤} = ١٦٠\ س^{٣}$]

■ (١٧) : الأردن (٦٥) : اثبت أن الحد الأوسط في مفكوك :

$(١ + س)^{٢ن}$ يساوي $\frac{١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times (٢ن-١)}{ن!} \times ٢^{ن}\ س^{ن}$

■ (١٨) : مصر (٥١) : في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب حسب قوى س التصاعدية كان الحد الثاني = $-\frac{١٠}{٣}$

والحد الثالث = $\frac{٤٠}{٩}$ أوجد قيمتي ن ، س ثم أوجد الحد الرابع. [٥ ، -٢ / ٣ ، - ٨٠ / ٢٧]

■ (١٩) : الأردن (٦٤) : الحد الثالث في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية حيث ن عدد صحيح موجب هو ٢٨ $س^{٢}$ والحد الخامس في نفس المفكوك ١١٢٠. أوجد قيمة كل من ن ، س.

[٨ ، ±٢]

■ (٢٠) : الأردن (٦٦) : الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(١ - م\, س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية هي ١ ، $-\frac{١}{٤}$ س ، ٠,٠٣ $س^{٢}$ على الترتيب أوجد م ، ن [٢٥ ، ٠,٠١]

■ (٢١) : مصر (٤٥) : في مفكوك $(٢ س - ٣)^{١٥}$ بنظرية ذات الحدين حسب قوى س التنازلية وجد أن ١٣ $ح_{٣}$ + ١٠ $ح_{٤}$ + $ح_{٥}$ = ٠ لقيم خاصة للمتغير س أوجد هذه القيم. [٠,٥ ، ١ ، ٤,٥]

معامل $(س^{ر})$ والحد الخالي من (س) في مفكوك ذات الحدين

■ (١) : أوجد الخالي من س في مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٠}$ [$ح_{٦}$ = - ٢٥٢]

■ (٢) : السودان (٥٩) : أوجد معامل س في مفكوك $\left(\frac{٣س}{٢}+\frac{٢}{٣س}\right)^{١١}$ [٦٩٣]

■ (٣) : أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $\left(\frac{٣}{٢}س^{٢}-\frac{١}{٣س}\right)^{٩}$ [$\frac{٧}{١٨}$]

■ (٤) : أوجد معامل $س^{٤}$ في مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢}-\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٨}$ وكذلك قيمة الحد الخالي من س في هذا المفكوك

[١٨٩ / ٤ ، ٢٨٣٥ / ٨]

■ (٥) : أوجد معامل $س^{١٤}$ في مفكوك $س^{٤}\left(\frac{س^{٢}}{٢}+\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١٥}$ [$\frac{١٣٦٥}{١٢٨}$]

■ (٦) : أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $س^{٩}\left(س^{٢}+\frac{١}{س^{٣}}\right)^{١٣}$ [-١٧١٦]

■ (٧) : أوجد معامل الحد المشتمل على $\frac{١}{\sqrt{س}}$ في مفكوك $س^{\frac{٧}{٢}}\left(٢\sqrt{س}-\frac{١}{س}\right)^{١٠}$ [٣٣٦٠]

■ (٨) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك : $\frac{٢}{س^{٢}}\left(\frac{٣}{س}-\frac{س^{٢}}{٣}\right)^{٩}$ [٧٥٦]

■ (٩) : أوجد معامل الحد الذي يشتمل على $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٤}$ في مفكوك $\left(\frac{٢س}{ص}+\frac{ص}{٢س}\right)^{١٠}$ [١٩٢٠]

■ (١٠):في مفكوك $\left(\frac{س}{٢}-\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١٠}$ ،اثبت أنه لايوجد حد خالي من س ثم أوجد معامل ١ / $س^{٦}$ [١٠٥ / ٢]

■ (١١) : الإبراهيمية : في مفكوك $\left(س^{٣}+\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٥ن}$ اثبت أن الحد الخالي من س هو معامل الحد الذي

يحتوي على $س^{٥ن}$ وإذا كان الحد الخالي هو $ح_{٤}$ أوجد قيمة معامل $س^{٥ن}$ [١٠]

■ (١٢) : الخيدوية : أوجد معامل $س^{٩}$ في مفكوك $[(٢ + س)^{١٠} + ١٠\ (٢ + س)^{٩}(١ + س)$

$+ \frac{١٠\times٩}{٢\times١}\ (٢ + س)^{٨}\ (١ + س)^{٢} + \cdots + (١ + س)^{١٠}]$ [١٥٣٦٠]

■ (١٣) : أوجد معامل $(س\ ص)^{٨}$ في مفكوك $\left(س\sqrt{٢} + \frac{ص}{\sqrt{٢}}\right)^{٨}\left(س\sqrt{٢} - \frac{ص}{\sqrt{٢}}\right)^{٨}$ [٧٠]

■ (١٤) : الأورمان : إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فأثبت أنه لا يوجد حد خالي من س في مفكوك

$\left(س^{٥}+\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٢ن}$ إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكرراً لها. أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ٧

[$ح_{١١}$ = ١٠٠١]

■ (١٥) : قطر (٧٢) : أوجد قيمة أ التي تجعل معامل $س^{٥}$ = معامل $س^{١٥}$ في مفكوك $\left(أس^{٢}+\frac{١}{س^{٣}}\right)^{١٠}$

حيث أ موجبة [$\frac{١}{٣}\sqrt{٣}$]

■ (١٦) إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك $\left(س^{٢}+\frac{ك}{س^{٣}}\right)^{١٥}$ يساوي معامل $س^{٥}$ في نفس المفكوك

أوجد قيمة ك [٥/٣]

■ (١٧) مصر (٦٥) : إذا كانت $(أ - س)^{١٤} = ح + ح_{١}\,س + ح_{٢}\,س^{٢} + ح_{٣}\,س^{٣} + \cdots + ح_{١٤}\,س^{١٤}$

وكان ٤ $ح_{٤}$ + ١١ $(ح_{٢} + ح_{٣})$ = صفر فاثبت أن أ = ٢

معامل $(س^{ر})$ في مفكوك $(١ + س)^{ن}$

■ (١) : اثبت أن معاملي $ح_{٥}$ ، $ح_{١٣}$ في مفكوك $(١ + س)^{١٦}$ متساويان ، وإذا كان $ح_{٤}$ = ٧٠ أوجد قيمة س

[$\frac{١}{٢}$]

■ (٢) : في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية، إذا كان معامل الحد الخامس يساوى ٧٠، الحد

الثلث يساوي ٦٣، أوجد قيمتي ن ، س [٨ ، ± ٢/٣]

■ (٣) : إذا كانت النسبة بين معاملي الحدين الثالث والخامس في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ هي ٢ : ٧ فما

قيمة ن. وإذا كان الحد السادس في هذا المفكوك يساوي الحد السابع، أوجد قيمة س [٩ ، ٢/٣]

■ (٤) : إذا كان معامل الحد الذي ترتيبه (٢ر + ١) في مفكوك $(١ + \text{س})^{٢٥}$ يساوي معامل الحد الذي ترتيبه (ر + ٥)، أوجد ترتيب هذين الحدين [$\text{ح}_{١٢}$ ، $\text{ح}_{١٥}$]

■ (٥) : مصر (٦٠) : اثبت أن : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}} \times {}^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ر}-١}$ إذا كان ضعف معامل الحد الحادي عشر في مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ يساوي ثلاثة أمثال معامل الحد العاشر في مفكوك $(١ + \text{ص})^{\text{ن}-١}$ فأوجد قيمة ن.

[١٥]

■ (٦) : إذا كانت النسبة بين معامل الحد الخامس في مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}+١}$ ومعامل الحد الرابع في مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ يساوي ٩ : ٤ ، أوجد قيمة ن ، إذا كان الحد السابع في المفكوك الأول يساوي الحد الساس في المفكوك الثاني، أوجد قيمة س [٨ ، ٣/٢]

■ (٧) : اثبت أن : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١}$ وإذا كان مجموع معاملي حدين متتالين في مفكوك $(١ + \text{س})^{٢٠}$ يساوي معامل الحد التاسع في مفكوك $(١ + \text{س})^{٢١}$، أوجد ترتيب هذين الحدين

[$\text{ح}_{٨}$ ، $\text{ح}_{٩}$ أ ، $\text{ح}_{١٣}$ ، $\text{ح}_{١٤}$]

■ (٨) : الخيدوية : أخذت ثلاثة حدود متتالية في مفكوك $(١ + \text{س})^{٢٠}$ فوجد أن نسبة مجموع معاملي الحدين الأول والثاني من هذه الحدود إلى مجموع معاملي الحدين الثاني والثالث كنسبة ٥ : ٣ فما رتب هذه الحدود [١٦ ، ٢٠ ، ٢١]

■ (٩) : مصر (٥٩) : اثبت أن : $\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}+١}{\text{ر}+١}$ إذا كان $(١ + \text{س})^{\text{ن}} = ١ + \text{ط س} + \text{ن س}^{٢} + \text{ر س}^{٣} + \text{ل س}^{٤} + \cdots + \text{س}^{\text{ن}}$ فاثبت أن : $\frac{\text{ط}}{\text{ط}+\text{ن}} = \frac{\text{ر}}{\text{ر}+\text{ل}} + \frac{٢\text{ن}}{\text{ن}+\text{ر}}$

قانون النسبة بين حدين متتاليين

■ (١) : في مفكوك $(٤\text{س} + ٣\text{ص})^{١٥}$ أوجد $\frac{\text{ح}_{٧}}{\text{ح}_{٦}}$ ، $\frac{\text{معامل ح}_{١٢}}{\text{معامل ح}_{١١}}$ ، $\frac{\text{ح}_{٤}}{\text{ح}_{٥}}$ ، $\frac{\text{ح}_{٩}}{\text{ح}_{٧}}$ ، $\frac{\text{معامل ح}_{٦}}{\text{معامل ح}_{٨}}$

[$\frac{٥\text{ص}}{٤\text{س}}$ ، $\frac{١٥}{٤٤}$ ، $\frac{٤\text{س}}{٩\text{ص}}$ ، $\frac{٨١\text{ص}^{٢}}{١١٢\text{س}^{٢}}$ ، $\frac{١١٢}{١٣٥}$]

■ (٢) مصر (٥١) : في مفكوك $(٢ + \text{س})^{١٣}$ حسب قوى س التصاعدية وجد أن النسبة بين الحد الحادي عشر والحد العاشر هي ٣ : ١٠ أوجد قيمة س [$\frac{٣}{٢}$]

■ (٣) الجيزة : إذا كانت النسبة بين معاملي ح$_{٨}$ ، ح$_{٩}$ في مفكوك $(٣ + س)^{ن}$ تساوي ٣ : ٢ فما قيمة ن

[٢٣]

■ (٤) : إذا كانت النسبة بين معاملي ح$_{٦}$ ، ح$_{٤}$ في مفكوك $(\frac{٣}{٢} + \frac{٢س}{٣})^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية تساوي ٨ : ٢٧ ، أوجد قيمة ن [٩]

■ (٥) : إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٥س + ٧ص)^{١٣}$ متساويين، أوجد قيمة س : ص. [٧ : ٥]

■ (٦) : إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٣س + ٥)^{٢ن + ١}$ متساويين، أوجد قيمة س علماً بأن ن عدد صحيح موجب [$\frac{٥}{٣}$]

■ (٧) : إذا كانت النسبة بين معاملي حدين متتالين في مفكوك $(٣ + ٢س)^{١٨}$ تساوي ٢ : ٥ أوجد رتبتي هذين الحدين [ح$_{٤}$ ، ح$_{٥}$]

■ (٨) : إذا كانت معامل ح$_{٦}$ في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ يساوي معامل ح$_{٩}$ ، النسبة بين ح$_{٨}$ ، ح$_{٦}$ في هذا المفكوك تساوي ٣ : ٤ أوجد قيمتي ن ، س [١٣ ، $\pm \frac{٣}{٤}$]

■ (٩) : مصر (٦٢) : إذا كانت الحدود الرابع والخامس والسادس في مفكوك $(١ + س)^{٨}$ قوى س التصاعدية تكون متتابعة حسابية لقيم خاصة للمتغير س فأوجد هذه القيم [٠,٥ أ، ٢]

■ (١٠) : البحرين (٧٥) : إذا كان الحد الأول والثاني والثالث في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ في تتابع حسابي وكانت س = ٢ ص فأوجد قيمة ن [٨]

■ (١١) : في مفكوك $(٢س - ٣)^{٨}$حسب قوى س التنازلية إذا كان ١٥ح$_{٣}$ + ١٠ح$_{٤}$ + ٢ح$_{٥}$ = ٠ لقيم خاصة للمتغير س أوجد هذه القيم [٢/١ ، ٢/٣]

■ (١٢) : السودان (٦٥) : في مفكوك $(س + ٣)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية وجد أن الحد العاشر = $\frac{٢}{٣}$ الحد التاسع، ح$_{١٥}$ = $\frac{١}{٤}$ ح$_{١٤}$ أوجد قيمة كل من ن ، س [٢٠ ، ٦]

■ (١٣) : مصر (٥٦) : إذا كان الحد السادس في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوي ضعف الحد السابع، وكانت السنبة بين الحدين الرابع والثاني تساوي ١٥ : ٤

فأوجد قيمة كل من ن ، س [١١ ، $\frac{١}{٢}$]

■ (١٤) : مصر (٦٣) إذا كانت النسبة بين $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ في مفكوك $(س + ص)^{٨}$ تساوي ١ : ٤ وكان الحد الأوسط = ١١٢٠ فأوجد كلاً من س ، ص [± ١ ، ± ٢]

■ (١٥) : في مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ إذا كانت نسبة معامل $ح_{٧}$ إلى معامل $ح_{٥}$ هي ٨ : ٥ ، قيمة معامل $ح_{٣}$ = ١١٢ معامل $ح_{١}$ فاثبت أن ن = ٨ ثم أوجد قيمة م [± ٢]

■ (١٦) : ليبيا (٥٨) : في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان $ح_{٦} : ح_{٧} : ح_{٨}$ يساوي ٢١ : ١٤ : ٦ فأوجد قيمة كل من س ، ن [١ ، ٩]

■ (١٧) : إذا كان الحدان الثاني والثالث في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ هما ٩٦ ، ٦٠ على الترتيب وكانت أ = ٤ ب فأوجد قيمة أ ، ب ، ن [± ٢ ، ± $\frac{١}{٢}$ ، ٦]

■ (١٨) : مصر (٤١) : إذا كونت معاملات الحدود الخامس والسادس والسابع في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ متتابعة حسابية فأوجد ن ثم اذكر رتب الحدود الأخرى في المفكوك التي تكون معاملاتها نفس المتتابعة الحسابية السابقة [(١٤ ، ٧) $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$]

■ (١٩) : في مفكوك $(٢س + ص)^{ن}$ ، إذا كان $ح_{ر+١} = ح_{ر+٢}$ ، $٤ح_{ر+٣} = ٣ح_{ر+٢}$ ، ص = ٢س، أوجد قيمتي ن ، ر [١٣ ، ٦]

■ (٢٠) : في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان $٤ح_{٣} = ٤٥$ ، $ح_{٢} \times ح_{٤} = ٧٥$ فأوجد قيمة كل من ن ، س [١٠ ، ± $\frac{١}{٢}$]

■ (٢١) : في مفكوك $(٢س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية وجد أن $٩ح_{٣}$ ، $٩ح_{٤}$ ، $٤٤ح_{٦}$ تكون متتابعة هندسية فما قيمة ن. [١٣]

■ (٢٢) : في مفكوك $(١ + ٢س)^{ن}$ بنظرية ذات الحدين حسب قوى س التصاعدية وجد في ثلاثة حدود متتالية أن نسبة معاملات أولها إلى ثانيها إلى ثالثها ١ : ٥ : ٢٠ أوجد قيمة ن وكذلك أوجد رتب هذه الحدود الثلاثة [٢٠ ، ($ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$ ، $ح_{٨}$)]

■ (٢٣) : إذا كانت الحدود الثالث والرابع والخامس في مفكوك $(س - ص)^{ن}$ هي ٢٥٢ ، -١٥١٢ ، ٥٦٧٠ على الترتيب فأوجد قيم س ، ص ، ن [± ١ ، ± ٣ ، ٨]

■ (٢٤) : أوجد معامل أكبر حد في مفكوك $(٢ س + ٣ ص)^{١٥}$ [اكبر معامل هو معامل $ح_{١٠}$ = ١٥ ق ٩ × $\frac{٣^{٩}}{٢^{٦}}$]

مسائل على نظرية ذات الحدين :

■ (١) : في مفكوك $\left(٢س^{٢} + \frac{١}{٤س}\right)^{٩}$ ، أوجد :

(أولاً) قيمة الحد الخالي من س

(ثانياً) قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في هذا المفكوك متساويين [ح٧ = ١٢٨/٢١ ، ٢/١]

■ (٢) : في مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢ن}$ اثبت أن الحد الخالي هو الحد الأوسط وأوجد قيمته عندما ن = ٤

[٧٠]

■ (٣) : أوجد قيمتي الحد الأوسط والحد المشتمل على $س^{-٣}$ في مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س^{٢}}\right)^{١١}$ ، وإذا كانت النسبة بين هذين الحدين تساوي ٧ : ٩ أوجد قيمة س. [٩٢٤ $س^{-٦}$ ، ٣٥٢ $س^{-٣}$ ، ٢/٣]

■ (٤) : مصر (٥٨) : أوجد رتبة الحد الخالي من س في مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية، ثم عين قيمته وإذا كان هذا الحد يساوي ٠٫٠٢ من الحد السابق له مباشرة فأوجد قيمة س.

[ح٩ = $\frac{٤٩٥}{٢٥٦}$ ، ٢٫٥]

■ (٥) : إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك $\left(٢س + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ هو الحد السابع، اثبت أن هذا الحد يساوي معامل الحد الأوسط، وإذا كان الحد الثامن في هذا المفكوك يساوي أربعة أمثال الحد السادس أوجد قيمة س [± ٢/١]

■ (٦) : إذا كانت النسبة بين ح٥ ، ح٦ ، ح٧ في مفكوك $\left(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س}\right)^{ن}$ تساوي ٤٠ : ٢٤ : ١١ أوجد قيمة ن ، س ثم أوجد قيمة الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين في هذا المفكوك

[ن = ١٦ ، س ± ٣/٤ ، ح٩ = ١٢٨٧٠]

■ (٧) : في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ ، اثبت أن $\frac{س ع_{ر+١} + ع_{ر+٢}}{ع_{ر+١}} = \frac{ن+١}{ر+١} س$

■ (٨) : في مفكوك $(٣س + ٤)^{٢ن+١}$ حسب قوى س التنازلية، إذا كانت النسبة بين معاملي ح١٠ ، ح٨ تساوي ٢٠ : ٩ ، الحدان الأوسطان في هذا المفكوك متساويان ، أوجد قيمتي ن ، س [٨ ، ٣/٤]

■ (٩) : أوجد معامل $س^{٢}$ في حاصل ضرب $(١ + س)^{١٠} (١ - ٢س)^{٥}$ [-١٥]

■ (١٠) : (أ) أوجد الحد الخالي من س في حاصل ضرب $(١ + س)^{٢} \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٧}$ [٧٠]

(ب) أوجد الحد الخالي من س في حاصل ضرب $\left(٢ + س^{٢}\right)^{٢} \left(١ + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٥}$ [٣٤]

■ (١١) : أوجد معامل كل من $س^{٢}$ ، $س^{٣}$ في مفكوك $(١ + س - س^{٢})^{٥}$ [٥ ، -١٠]

المجموعة الثالثة:

تمارين (١-٢) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة :

(١) إذا كان رتب الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هما ٨ ، ٩ فإن $ن$ = ...

(أ) ١٤ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (د) ٥٦

(٢) إذا كان : $١ + ٥س + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} س^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} + ... + س^{٥} = ١٠٢٤$ فإن : س =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ٣

(٣) مجموع معاملات حدود مفكوك $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{٧}$ يساوى ......

(أ) $٢^{٧}$ (ب) $٢^{٥}$ (جـ) $٢^{٦}$ (د) صفر

(٤) معامل الحد الخامس فى مفكوك $(١ + ٢ س)^{١٠}$ ......

(أ) $١٦ \times {}^{١٠}ق_{٥}$ (ب) $\frac{١}{١٦} \times {}^{١٠}ق_{٥}$ (جـ) $١٦ \times {}^{١٠}ق_{٤}$ (د) $\frac{١}{١٦} \times {}^{١٠}ق_{٤}$

(٥) من مفكوك ذات الحدين إذا كان الحد العام هو ${}^{١٢}ق_{ر} \, س^{٢٤ - ٤ر}$ يكون الحد المشتمل على $س^{١٢}$ هو:

(أ) $ح_{٣}$ (ب) $ح_{٤}$ (جـ) $ح_{٥}$ (د) لا يوجد

(٦) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(أ + ٢ ب)^{٢ن - ١٠}$ متساويان فإن = ...

(أ) $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ (ب) أ = ٤ ب (جـ) أ = ٨ ب (د) أ = ٢ ب

(٧) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{٢أ}{٣} + \frac{ب}{أ^{٢}}\right)^{٨ن}$ هو التاسع فإن: $ن$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٨) من مفكوك $(١ + ب س)^{٩}$ يكون معامل الحد السادس هو ......

(أ) $^{٩}ق_{٥}$ (ب) $^{٩}ق_{٦}$ (جـ) $^{٩}ق_{٥}ب^{٥}$ (د) $^{٩}ق_{٦}ب^{٦}$

(٩) من مفكوك لمقدار ذى حدين لدينا ٧ حدود موجبة، ٦ حدود سالبة فإن المقدار يكون على الصورة......

(أ) $(أ - ب)^{١٢}$ (ب) $(أ - ب)^{١٣}$ (جـ) $(أ + ب)^{١٢}$ (د) $(أ + ب)^{١٣}$

ثانياً : أجب عما يأتى :

(١٠) إذا كان : $١ + ٨ س + {}^{٨}ق_{٢} س^{٢} + ... + س^{٨} = ٢٥٦$ أوجد قيمة س.

(١١) أوجد لأقرب رقم من ألف قيمة كل من :

(أ) $(١,٠٠٣)^{٥}$ (ب) $(٠,٩٩٨)^{٧}$ (جـ) $(١,٠١)^{٦} + (٠,٩٩)^{٦}$ (د) $(١,٠٢)^{٨} - (٠,٩٨)^{٨}$

(١٢) أوجد قيمة س التى تحقق $\left(١ + \sqrt{٣}\right)^{٦} - \left(١ - \sqrt{٣}\right)^{٦} = ٤٨٠ \sqrt{٣}\, س$

(١٣) باستخدام المفكوك : $(١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١} س + {}^{١٠}ق_{٢} س^{٢} + ... + س^{١٠}$

اثبت أن : (أ) $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠} = ٢^{١٠}$

(ب) $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} .... + {}^{١٠}ق_{١٠} =$ صفر

(١٤) اكتب على صورة مفكوك كلاً من :

(أ) $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢}\right)^{٤}$ (ب) $\left(س - \frac{١}{س}\right)^{٥}$ ،

(جـ) $\left(١ + \sqrt{٢}\right)^{٤} + \left(١ - \sqrt{٢}\right)^{٤}$ (د) $\left(\sqrt{٣} + ٢\right)^{٥} - \left(\sqrt{٣} - ٢\right)^{٥}$

(١٥) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان: $ح_{٣} = ٢٨ س^{٢}$ ، $ح_{٥} = ١١٢٠$ أوجد قيمة كلاً من : ن ، س.

(١٦) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل الحد السادس يساوى معامل الحد العاشر أوجد ن.

(١٧) من مفكوك $(أ س + ب)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان معامل $ح_{٦} = \frac{٦٣}{٨}$ اثبت أن ٢ أ ب = ١

(١٨) من مفكوك $\left(٢ س^{٢} + \frac{١}{٢ س}\right)^{١٢}$ أوجد قيمة الحد الأوسط.

(١٩) من مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٢}{س}\right)^{١١}$ أوجد الحدين الأوسطين.

(٢٠) من مفكوك $س^{٤}\left(س - \frac{١}{س}\right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية أوجد الحد الرابع من النهاية.

(٢١) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١٠}$ يساوى $\frac{٢٨}{٢٧}$ أوجد قيمة س.

(٢٢) أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس من مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س}\right)^{١٠}$ ثم أوجد القيمة العددية للنسبة عند س = ٣.

(٢٣) إذا كانت النسبة بين الحد الخامس من مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ والحد الرابع من مفكوك $\left(س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٤}$ تساوى - ١٦ : ١٥ أوجد قيمة س.

تمارين (١-٣) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة :

(١) الحد المشتمل على $س^{٤}$ من مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$ يساوى ......

(أ) $^{١٥}ق_{٤}$ (ب) $\frac{١}{١٦} \times {}^{١٠}ق_{٤}$ (جـ) $١٦ \times {}^{١٠}ق_{٤}$ (د) $٣٢ \times {}^{١٠}ق_{٥}$

(٢) من مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{١٠}$ يكون الحد الخالى من س هو ......

(أ) $ح_{٤}$ (ب) $ح_{٥}$ (جـ) $ح_{٦}$ (د) لا يوجد حد خال من س

(٣) من مفكوك $س^{٣} (١ + س)^{٧}$ يكون معامل الحد المشتمل على $س^{٤}$ هو ......

(أ) $^{٧}ق_{٤}$ (ب) $^{٧}ق_{٣}$ (جـ) $^{٧}ق_{١}$ (د) ٢١

(٤) من مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{٢}{س}\right)^{٦}$ يكون الحد الخالى من س هو الحد ......

(أ) الثالث (ب) الرابع (جـ) الخامس (د) لا يوجد حد خالى من س

(٥) من مفكوك $\left(أ س^{٢} + \frac{١}{أ س}\right)^{١١}$ إذا كان معاملاً $س^{٤}$ ، $س^{٧}$ متساويان فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) - ١ (جـ) ± ١ (د) ± ٢

(٦) إذا كان الحد الخال من س من مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ هو $ح_{٧}$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

(٧) من مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{ا س}\right)^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل س^{٧} فإن ا = ...

(ا) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $-\frac{٥}{٤}$ (ى) $\frac{٥}{٤}$

(٨) من مفكوك $\left(ا س + \frac{١}{ب س}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخال من س يساوى معامل الحد السابع فإن :

(ا) اب $= \frac{٦}{٥}$ (ب) اب $= \frac{٥}{٦}$ (جـ) اب $= \frac{٣٦}{٢٥}$ (ى) اب $= \frac{٢٥}{٣٦}$

(٩) الحد الخال من س من مفكوك $\left(٢س + \frac{١}{٢س}\right)^{٨}$

(ا) ٣٥ (ب) ١٤٠ (جـ) ٧٠ (ى) ٥٦

(١٠) من مفكوك (١ + ا س)^{٧} إذا كان معامل ح$_{٥}$ = ٥٦٠ فإن ا = ...

(ا) ٢ (ب) ٤ (جـ) ± ٢ (ى) ± ٤

أجب عن ما يلي:

(١١) من مفكوك $\left(٤س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١٢}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س.

(١٢) أوجد معامل س^{١٢} من مفكوك س^{٢} $\left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{٣س}\right)^{١٥}$.

(١٣) إذا كان الحد السادس من مفكوك $\left(٢س - \frac{١}{٣س}\right)^{ن}$ خال من س. أوجد قيمة ن ثم ابحث هل هذا المفكوك يشتمل على حد يحتوى على س^{٦} أم لا.

(١٤) من مفكوك $\left(٢س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد :

أولاً : معامل س^{٣}

ثانياً : الحد الخال من س

ثالثاً : اثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى حد يشتمل على س^{٢}.

(١٥) اثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ وإذا كانت النسبة بين معامل ح$_{١١}$ من مفكوك (١ + س^{٢})^{ن} ومعامل ح$_{١٠}$ من مفكوك (١ - ص)$^{ن-١٠}$ يساوى - ٣ : ٢ أوجد ن.

(١٦) أوجد معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٤}$ من مفكوك $\left(\frac{٢س}{ص}+\frac{ص}{٢س}\right)^{١٠}$.

(١٧) أوجد معامل $س^{ن}$ من مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$ ثم اثبت أن يساوى ضعف معامل $س^{ن}$ من مفكوك $(١ + س)^{٢ن - ١}$.

(١٨) من مفكوك $\left(س+\frac{١}{س}\right)^{٢ن}$ اثبت أن الحد الخال من س هو الحد الأوسط ثم أوجد قيمة هذا الحد عند ن = ٨.

(١٩) من مفكوك $\left(س^{ك}+\frac{١}{س}\right)^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب أوجد :

أولاً : قيم ك التى تجعل للمفكوك حداً خالياً من س.

ثانياً : النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط لأكبر قيم ك فى أولاً.

(٢٠) من مفكوك $\left(س^{٢}+\frac{١}{أس}\right)^{١٢}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل $س^{٣}$ من هذا المفكوك تساوى ٥ : ١٦ أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة الحد الأوسط عندما س = ٢.

(٢١) من مفكوك $\left(٢س^{٢}+\frac{١}{س^{٣}}\right)^{١٠}$ إذا كان معامل $س^{٥}$ يساوى معامل $س^{١٥}$ أوجد أ.

(٢٢) من مفكوك $\left(س^{٢}+\frac{١}{٨س}\right)^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية :

أولاً : اثبت أنه لا يوجد حد خال من س.

ثانياً : إذا كان $ح_{٤} = ح_{١١}$ أوجد قيمة س.

(٢٣) من مفكوك $\left(س+\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد :

أولاً : رتبة وقيمة الحد الخال من س.

ثانياً : قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين من المفكوك يساوى صفر.

(٢٤) أوجد الحد الخال من س من مفكوك $\left(٩س^{٢}+\frac{١}{٣س}\right)^{٩}$ ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

(٢٥) من مفكوك $\left(س^{٢}+\frac{١}{س}\right)^{٣ن}$ اثبت أن الحد الخالي من س = معامل الحد الذي يحتوي $س^{٢ن}$.

واذا كان ن = ٦ اوجد النسبه بين الحد الخالي من س والحد الأوسط من هذا المفكوك

تمارين (١ - ٤) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) من مفكوك (س + ص)$^{\text{١٠}}$ الحد التاسع : الحد الثامن تساوى ......

(أ) $\frac{\text{٣ص}}{\text{٨س}}$ (ب) $\frac{\text{٣س}}{\text{٨ص}}$ (جـ) $\frac{\text{٨ص}}{\text{٣س}}$ (د) $\frac{\text{٨س}}{\text{٣ص}}$

(٢) من مفكوك (١ − س)$^{\text{١٢}}$ معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس = ...

(أ) $\left(\frac{\text{٨}}{\text{٥}}\right)$ (ب) $\frac{\text{٥}}{\text{٨}}$ (جـ) $\frac{-\text{٨}}{\text{٥}}$ (د) $\frac{-\text{٥}}{\text{٨}}$

(٣) من مفكوك (س + ص) $^{\text{٨}}$ تكون نسبة $\frac{\text{ح}_{\text{٦}}}{\text{ح}_{\text{٤}}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{٢٥ص}^{\text{٢}}}{\text{١٦س}^{\text{٢}}}$ (ب) $\frac{\text{٢٥س}^{\text{٢}}}{\text{١٦ص}^{\text{٢}}}$ (جـ) ١ (د) $\frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

(٤) من مفكوك (٣ أ − ٢ ب)$^{\text{١١}}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب يساوى $\frac{-\text{٣}}{\text{٢}}$

فإن أ : ب = ...

(أ) ٩ : ٤ (ب) ٤ : ٩ (جـ) ١ (د) −١

(٥) من مفكوك $\left(\text{٢س}^{\text{٢}} + \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{١١}}$ أوجد كلاً من :

(أ) $\frac{\text{ح}_{\text{٣}}}{\text{ح}_{\text{٢}}}$ (ب) $\frac{\text{ح}_{\text{٤}}}{\text{ح}_{\text{٥}}}$ (جـ) $\frac{\text{ح}_{\text{٦}}}{\text{ح}_{\text{٨}}}$ (د) $\frac{\text{معامل ح}_{\text{٤}}}{\text{معامل ح}_{\text{٦}}}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٦) من مفكوك (١ + س)$^{\text{١٢}}$ إذا كان : ح$_{\text{٣}}$ = ٢ ح$_{\text{٢}}$ أوجد قيمة س.

(٧) من مفكوك (أ + ب)$^{\text{ن}}$ إذا كان ح$_{\text{٢}}$ = ٢٤٠ ،ح$_{\text{٣}}$ = ٧٢٠ ،ح$_{\text{٤}}$ = ١٠٨٠ أوجد قيمة كلاً من أ، ب، ن.

(٨) إذا كانت ح$_{\text{٢}}$: ح$_{\text{٣}}$ من مفكوك (أ + ب)$^{\text{ن}}$ تساوى النسبة ح$_{\text{٣}}$: ح$_{\text{٤}}$ من مفكوك (أ + ب)$^{\text{ن+٣}}$

أوجد قيمة ن.

(٩) من مفكوك (١ + م س)$^{\text{ن}}$ إذا كانت ٤ ح$_{\text{٦}}$ = ٧ ح$_{\text{٨}}$ ، $\frac{\text{ح}_{\text{٤}}}{\text{ح}_{\text{٦}}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$ وذلك عندما س = ١ أوجد قيمة

كل من م ، ن.

(١٠) أوجد عدديا اكبر حد في مفكوك (٣ − ٥ س) ١٥ وذلك عندما س = $-\frac{\text{١}}{\text{٥}}$

(١١) من مفكوك (س + ص)$^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثانى وسط حسابى بين الحد الأول

والحد الثالث عند س = ٢ ص أوجد قيمة ن.

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة الأولى

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المقدار ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ر}-١} =$ ......

(أ) ن (ب) ر (جـ) $\frac{\text{ن}}{\text{ر}}$ (د) $\frac{\text{ر}}{\text{ن}}$

(٢) إذا كان $\underline{|\text{س}-٣} \times {}^{\text{س}}\text{ل}_{٣} = ٢٠ \, \underline{|\text{س}-٢}$ فإن س = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٤

(٣) إذا كان ${}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}٢} = {}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}+٢}$ فإن ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٣،١٢

(٤) ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} \div {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}-١} =$...

(أ) ن − ر (ب) ن − ر − ١ (جـ) ن − ر + ١ (د) ن + ر

(٥) المقدار : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١} =$...

(أ) ${}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}$ (ب) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}$ (جـ) ${}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١}$ (د) ${}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+٢}$

(٦) إذا كان : ${}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} > {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}-١}$ فإن :

(أ) ر > ٤ (ب) ر < ٤ (جـ) ر < ٥ (د) ر > ٥

(٧) إذا كان : ${}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{٢} = ٢١٠$ ، ${}^{\text{ص}-٣}\text{ق}_{٣} = ٣٥$ فإن : $\underline{|٢\text{س}-\text{ص}} =$...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢ (د) ١

(٨) إذا كان : ${}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}} < ١$ ، ${}^{\text{ر}}\text{ق}_{٥} < ١$ فإن قيمة $\underline{|٦-\text{ر}} =$...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٧٢٠ (د) ٦

(٩) من مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}} = ١ + أ_{١}\text{س} + أ_{٢}\text{س}^{٢} + ... + أ_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}$ وكان : $\frac{أ_{٢} + أ_{٣}}{أ_{٢}} = ٣$ فإن ن =...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(١٠) إذا كان : $١ + \frac{٥}{٢}\text{س} + \frac{٥\times٤}{٤\,\underline{|٢}}\text{س}^{٢} + \frac{٥\times٤\times٣}{٨\,\underline{|٢}}\text{س}^{٣} + \ldots + \frac{١}{٣٢}\text{س}^{٥} = ١٠٢٤$ فأن س = ...

(م) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ (ى) ٨

(١١) من مفكوك $(\text{م س} + \text{ب})^{٢\text{ن}+١٠}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويان عند س = ٢ فإن :

(م) م = ب (ب) ب = ٢ م (جـ) م ب = ٢ (ى) م ب = $\frac{١}{٢}$

ثانياً : أجب عما يأتى :

(١٢) إذا كان: $^{٦}\text{ل}_{\text{ر}} = ٤ \times {}^{٦}\text{ل}_{\text{ر}-١}$ ، $\underline{|\text{ن} - \text{ر}} = ٦$ أوجد كل من ن ، ر

(١٣) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-٢} = ٤٥$ ، $^{\text{م}}\text{ل}_{\text{م}-٣} = ٤$ أوجد قيمة $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{م}-٢} \div {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{م}-١}$

(١٤) إذا كان $\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\times\ldots\times(\text{ن}-\text{ر}+١) = ٥٠٤٠$ ، $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = ٢١٠$ أوجد قيمة $^{\text{ن}+١٠}\text{ق}_{\text{ر}+٢}$.

(١٥) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{٣} = ١٢٠$ ، $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}٢+٢\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢\text{ر}+٥}$ أوجد قيمة $^{\text{ن}}\text{ق}_{٧\text{ر}+٣}$

(١٦) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = ٥:٧$ ، $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} \div {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}-١} = ٥$ أوجد قيمة كلاً من ن ، ر.

(١٧) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} : {}^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ر}-٢} = ٧ : ٤ : ٦$ أوجد قيمتى ن ، ر.

(١٨) إذا كان لدينا الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فأوجد كم عدد زوجى أكبر من ٣٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام .

(أ) مع الاحلال (التكرار)

(ب) بدون إحلال (بدون تكرار)

(١٩) إذا كان $\underline{|\text{ن}} = ٧٢٠$ ، $^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}-١} = \frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة $^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}-٢}$.

(٢٠) إذا كان $^{\text{ن}+٢}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٩ \times {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}} = ٩٠ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}$ أوجد كل من ن ، ر.

(٢١) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ١٢٠ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ أوجد $^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}}$ ثم احسب أقل ن تحقق ذلك .

(٢٢) إثبت أن $^{\text{ن}}\text{ق}_{١} + ٢ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} + ٣ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣} + ٤ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٤} + \ldots\ldots + \text{ن} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ن} \times ٢^{\text{ن}-١}$

(٢٣) إذا كان $(١ + \text{س})^{١٠} = ١ + {}^{١٠}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{١٠}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + \ldots + {}^{١٠}\text{ق}_{١٠}\,\text{س}^{١٠}$ استخدم ذلك لإيجاد:

(م) $١ + {}^{١٠}\text{ق}_{١} + {}^{١٠}\text{ق}_{٢} + \ldots + {}^{١٠}\text{ق}_{١٠}$

(ب) $١ - {}^{١٠}\text{ق}_{١} + {}^{١٠}\text{ق}_{٢} \ldots\ldots + {}^{١٠}\text{ق}_{١٠}$

(جـ) $١ + ٣٠ + ٩ \times {}^{١٠}\text{ق}_{٢} + ٢٧ \times {}^{١٠}\text{ق}_{٣} + \ldots\ldots + ٣^{١٠}$.

(٢٤) من مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ إذا كان معامل الحد الرابع يساوى معامل الحد الثالث عشر أوجد قيمة ن ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س.

(٢٥) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان $(ح_{٣})^{٢} = ح_{٢} \times ح_{٥}$ أوجد قيمة ن عندما $س = \frac{٩}{٥}$

(٢٦) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل $ح_{١٠}$ هو الوسط الحسابى بين معامل $ح_{٩}$ ومعامل $ح_{١١}$ أوجد كلاً من:

(م) ن (ب) $^{ن}ل_{٣}$ (جـ) $\underline{|ن - ١٩}$

(٢٧) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : $ح_{٨} : ح_{٧} : ح_{٦} = ٦ : ١٤ : ٢١$ أوجد كلاً من ن ، س.

(٢٨) إذا كانت النسبة بين ثلاثة حدود متتالية في مفكوك $\left(س + \frac{ك}{س^{٢}}\right)^{٢٧}$ فنسبة ١٥ : ٦ : ٢ حيث ك $\in$ ص$^{+}$ إوجد رتب هذه الحدود وقيمة الحد الخالي من س من هذا المفكوك

(٢٩) من مفكوك $(١ + م\, س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت الحدان الثاني و الثلث هما على الترتيب: $\frac{١٠٠}{٣}س$ ، $٥س^{٢}$ أوجد قيمة م ، ن ثم احسب قيمة الحد الأوسط من هذا المفكوك عندما س = ٣

(٣٠) إذا كانت رتبة الحد الخالى من س من مفكوك $\left(٢س^{٢} - \frac{٣}{س}\right)^{٢١}$ تساوى رتبة الحد الخالى من س من مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢ن}$ أوجد قيمة ن ثم أوجد النسبة بين الحدين الأوسطين من المفكوك الأول عند س = - ١.

(٣١) من مفكوك $\left(٤س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١٣}$ أوجد معامل $س^{٥}$ ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدان الأوسطان من هذا المفكوك متساويان ثم اثبت أنه لا يوجد حد خال من س فى هذا المفكوك.

(٣٢) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كانت معاملات ثلاث حدود متتالية هى: ٣٥ ، ٢١ ، ٧ أوجد قيمة ن ورتب الثلاث حدود.

(٣٣) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(١ + س)^{١٠}$ يساوى ضعف الحد السابع أوجد قيمة س.

(٣٤) إذا كان مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ يحتوي على حد خال من س فاثبت أن ن مضاعفاً للعدد ٣ ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ١٢.

(٣٥) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٢س + ٣)^{١٧}$ متساويين فما قيمة س؟

(٣٦) إذا كان أ، ب هما الحدان الأوسطان فى مفكوك $\left(س - \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية فأثبت أن

أ + ب $س^٢$ = ٠

(٣٧) إذا كانت نسبة معامل الحد السادس إلى معامل الحد الرابع فى مفكوك $\left(\frac{٣}{٢} + \frac{٢س}{٣}\right)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ٨ : ٢٧ فما قيمة ن.

(٣٨) أوجد قيمة س التى تجعل الحد الثالث فى مفكوك $\left(٢س^٢ + \frac{١}{٢}\right)^{٧}$ حسب قوى س التنازلية مساوياً الحد السادس.

(٣٩) إذا كان $ح_٤ = \frac{٢٥}{٣}$ $ح_٢$ ، $ح_٥ = ح_٦$ من مفكوك $(١+س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية فأوجد قيم كل من ن، س.

(٤٠) إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً وكان: $(١ + جـ س)^{ن} = ١ + م_١ س + م_٢ س^٢ + م_٣ س^٣ + م_٤ س^٤ + ...$

وكان $م_١ = ١٢$ ، $م_٤ = ٤ م_٣$ أوجد قيمة كل من ن، جـ

(٤١) إذا كانت الحدود : الثالث والرابع والخامس فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ على الترتيب حسب قوى س التنازلية هى ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠ ، فأوجد قيمة كل من س ، ص ، ن.

(٤٢) أوجد فى مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س^٢}\right)^{١٢}$. كلاً من : الحد الأوسط والحد المشتمل على $س^٣$.

(٤٣) أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٦} - \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٦}$

(٤٤) فى مفكوك $\left(٢س + \frac{٣}{س^٢}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد التاسع والعاشر متساويين وكانت النسبة بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥، فأوجد قيمة ن وأثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد خال من س.

(٤٥) فى مفكوك $\left(س^٢ + \frac{جـ}{س^٣}\right)^{١٥}$ أوجد قيمة جـ التى تجعل معامل $س^{١٠}$ ضعف معامل $س^{١٥}$

(٤٦) فى مفكوك $\left(س^٢ + \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ أوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى الحدين الأوسطين.

(٤٧) فى مفكوك $\left(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{8}$ حيث ك عدد صحيح موجب أوجد :

أ- قيم ك التى تجعل للمفكوك حداً خالياً من س.

ب- النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التى حصلت عليها فى أولاً.

(٤٨) إذا كان : $(1 + \text{س})^{\text{ن}} = \text{أ}_{0} + \text{أ}_{1}\,\text{س} + \text{أ}_{2}\,\text{س}^{2} + .. + \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$ فاثبت أن:

أ- $$\frac{\text{أ}_{1}}{\text{أ}_{0}} + \frac{2\text{أ}_{2}}{\text{أ}_{1}} + \frac{3\text{أ}_{3}}{\text{أ}_{2}} + .. + \frac{\text{ن}\,\text{أ}_{\text{ن}}}{\text{أ}_{\text{ن}-1}} = \frac{\text{ن}}{2}(\text{ن} + 1)$$

ب- $$\text{أ}_{0} + 2\,\text{أ}_{1} + 4\,\text{أ}_{2} + 8\,\text{أ}_{3} + .. + 2^{\text{ن}}\,\text{أ}_{\text{ن}} = 3^{\text{ن}}$$

(٤٩) إذا كان الحد الثالث فى مفكوك $\left(2\text{س} + \frac{1}{\text{س}^{2}}\right)^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية خالياً من س فأوجد قيمة ض التى تجعل هذا الحد مساوياً للحد الثانى فى مفكوك $(1 + \text{ص}^{3})^{20}$

(٥٠) فى مفكوك $\left(\text{س}^{2} + \frac{1}{\text{أ}\text{س}}\right)^{8}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل الحد الذى يحتوى على س^{10} فأوجد قيمة أ.

(٥١) فى مفكوك $\left(\text{س}^{2} - \frac{1}{\text{س}}\right)^{14}$ أثبت أنه لا يوجد حد خال من س، ثم أوجد النسبة بين الحد السابع والحد السادس فى هذا المفكوك عندما س = -١.

(٥٢) فى مفكوك $\left(9\text{س}^{2} + \frac{1}{3\text{س}}\right)^{9}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س، ثم أثبت أن الحدين الأوسطين متساويان عندما $\text{س} = \frac{1}{3}$

(٥٣) فى مفكوك $\left(\text{س}^{2} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{9}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س، وإذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س والحد السادس تساوى ٩ : ٤، فأوجد قيمة س الحقيقية.

(٥٤) فى مفكوك $\left(\text{س}^{2} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{3\text{ن}}$ أوجد معامل $\text{س}^{3\text{ن}}$ ، وإذا كانت ن = ٦ فأوجد النسبة بين معامل $\text{س}^{3\text{ن}}$ ومعامل الحد الأوسط.

اختبارات كتاب المدرسة التراكمية على الوحدة الأولى

(١) من مفكوك $(١ + س)^{١٧}$ إذا كان معامل $ح_{ر+٤}$ = معامل $ح_{٢ر+٣}$ فإن ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٧ (د) ٧

(٢) من مفكوك $(١ + س)^{٢٧}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين تساوى ٣ : ١ فإن س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٣) المقدار $\left(\sqrt{٢}+١\right)^{٥} - \left(\sqrt{٢}-١\right)^{٥} = ...$

(أ) − ٨٢ (ب) ٨٢ (جـ) $٥٨\sqrt{٢}$ (د) $-٥٨\sqrt{٢}$

(٤) الحد الرابع من مفكوك $\left(\frac{س}{٣}+\frac{٣}{س}\right)^{٦}$ هو ...

(أ) ٢٠ س (ب) $\frac{٢٠}{س}$ (جـ) ٢٠ (د) ٢٠ $س^{٢}$

(٥) الحد الأخير من مفكوك $(٢ - س)^{٥}$ $(٢ + س)^{٥}$ هو ....

(أ) $س^{٥}$ (ب) − $س^{٥}$ (جـ) − $س^{١٠}$ (د) $س^{١٠}$

(٦) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ اثبت أن $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$س وإذا كان معامل الحد الثالث عشر حسب قوى س التصاعدية من هذا المفكوك يساوى معامل $ح_{١٤}$ أوجد قيمة ن وإذا كان $\frac{ح_{٧}}{ح_{٥}} = \frac{٧}{٨}$ أوجد قيمة س.

(٧) (أ) إذا كان : $^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$ أوجد قيمة ن.

(ب) أوجد قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)\left(س+\frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٠}$

(٨) من مفكوك $(١ - م س)^{ن}$ إذا كان الحد الثانى = $-\frac{١}{٤}$س وكان الحد الثالث $\frac{٣}{١٠٠}$$س^{٢}$ أوجد قيمة كل من م ، ن.

(٩) لدينا الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ اكتب عدد الأعداد التى يمكن تكوينها مستخدماً هذه الأرقام للحصول على عدد أقل من ٤٠٠ أولا مع الاحلال (التكرار) وثانيا بدون إحلال (تكرار)

(١٠) إذا كانت النسبة بين الحدود الخامس والسادس والسابع فى مفكوك $\left(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س}\right)^{ن}$

هى ٤٠ : ٢٤ : ١١ أوجد كلاً من ن ، س.

المجموعة الرابعة:

تمارين مختارة من إمتحانات الثانوية العامة لسنوات سابقة

■ (١) مصر ١٩٩٦ : إذا كان معامل الحد الثالث فى مفكوك $\left(س - \frac{١}{٢}\right)^{ن}$ يساوى ٧ أوجد قيمة ن ثم أوجد الحد الأوسط فى هذا المفكوك. [ن = ٨ ، $\frac{٣٥}{٨}س^{٤}$]

■ (٢) مصر ١٩٩٦ : أثبت أنه لا يوجد حد خالى من س فى مفكوك $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٤}$ ثم اوجد النسبة بين الحد السابع والحد السادس فى هذا المفكوك عندما س = -١ [$\frac{٣}{٢}$]

■ (٣) مصر ١٩٩٧: فى مفكوك $\left(س^{٣} + \frac{أ}{س}\right)^{٨}$ إذا كان معامل $س^{١٦}$ يساوى الحد الخالى من س أوجد قيمة أ. [± ١]

■ (٤) مصر ١٩٩٨: فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية

أولاً: أوجد الحد الخالى من س [$ح_{٧}$ = ٨٤]

ثانياً: إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س والحد السادس تساوى ٢ : ٣ أوجد قيمة س الحقيقية. [١]

■ (٥) مصر ١٩٩٨ : أوجد الحد المشتمل على $س^{٤}$ فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية ثم أوجد النسبة بين معامل هذا الحد والحد الاوسط. [- ٧٩٢ $س^{٤}$ ، $\frac{-٦}{٧}$]

■ (٦) مصر ١٩٩٩ : فى مفكوك $(١ + س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحد الرابع يساوى ٧ فأوجد قيمة س. ثم اوجد النسبة بين الحد السادس والحد الأوسط فى هذا المفكوك. [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$]

■ (٧) مصر ١٩٩٩: فى مفكوك $\left(س + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية وجد أن الحد الخامس هو الحد الخالى من س اوجد قيم ن ثم أوجد معامل الحد الوسط. [٩٢٤]

■ (٨) مصر ٢٠٠٠ : فى مفكوك $\left(\text{أس} + \frac{١}{\text{ب س}}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد السابع، أثبت ان : ٦ أ ب = ٥

■ (٩) مصر ٢٠٠٠ : فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٢}$ أوجد :

أولاً: معامل الحد الوسط. ثانياً: قيمة الحد الخالى من س [٧٩٢٠ ، ٥٩١٣٦]

■ (١٠) مصر ٢٠٠١ : إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ هى ٣٥ ، ٢١ ، ٧

أوجد: أولاً: قيمة ن

ثانياً: رتبة كل حد من هذه الحدود الثلاثة . [ن = ٧ ، رتب الحدود هى ٥ ، ٦ ، ٧]

■ (١١) مصر ٢٠٠٢ : فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٦}$ أوجد :

أولاً: قيمة الحد الخالى من س

ثانياً: النسبة بين قيمة الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط [٢٤٠ ، $\frac{٣}{٢}$]

■ (١٢) مصر ٢٠٠٢ : فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{٢\text{س}}\right)^{١٣}$ أوجد :

أولاً: قيمة معامل $\text{س}^{-١}$

ثانياً: قيم س التى تجعل الحدين الوسطين فى المفكوك متساويان. [${}^{١٣}\text{ق}_{٦} \times (٢)^{-٧}$ ، $\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$]

■ (١٣) مصر ٢٠٠٣ : إذا كانت $(\text{أ} - \text{س})^{١٤} = \text{ج}_{٠} + \text{ج}_{١}\text{س} + \text{ج}_{٢}\text{س}^{٢} + \text{ج}_{٣}\text{س}^{٣} + ... + \text{ج}_{١٤}\text{س}^{١٤}$

وكان : $٤\,\text{ج}_{٤} + ١١\,(\text{ج}_{٣} + \text{ج}_{٢}) =$ صفر فأوجد قيمة أ . [٢]

■ (١٤) مصر ٢٠٠٤ : مفكوك $\left(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب أوجد:

أولاً: قيم ك التى تجعل للمفكوك حداً خالياً من س. [١ ، ٢ ، ٥]

ثانياً: النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التى حصلت عليها فى أولاً. [$\frac{٣}{١٠}$]

■ (١٥) مصر ٢٠٠٥ : فى مفكوك $\left(\frac{\text{س}^{٣}}{٢} + \frac{٤}{\text{س}}\right)^{١١}$ حسب قوى س التنازلية أوجد:

أولاً: قيمة معامل $\text{س}^{٥}$.

ثانياً: قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الوسطين مساوياً للصفر [$\pm \sqrt[٤]{٨}$]

■ (١٦) مصر ٢٠٠٥ : فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٣ن}$

أولاً: أثبت أن الحد الخالى من س يساوى معامل الحد الذى يحتوى على $س^{ن}$.

ثانياً: إذا كانت ن = ٦ فأوجد نسبة الحد الخالى من س إلى معامل الحد الأوسط. [٢١ : ٥٥]

■ (١٧) مصر ٢٠٠٦ : فى مفكوك $\left(س^{٣} + \frac{٥}{س}\right)^{ن}$ إذا كان الحد السابع هو الحد الخالى من س فأوجد قيمة

ن ومن ثم أوجد النسبة بين الحدين السادس والأوسط عندما س = -٢ [ن = ٨ ، $\frac{١}{٤}$]

■ (١٨) مصر ٢٠٠٦ : إذا كان فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ حداً خالياً من س فإثبت ان ن يجب أن تكون

مضاعفاً للعدد ٣ ثم اوجد الحد الخالى من س فى هذا المفكوك عندما ن = ١٢ [٤٩٥]

■ (١٩) مصر ٢٠٠٧ : فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١٥}$ اوجد :

أولاً: النسبة بين معامل $س^{٣}$ وقيمة الحد الخالى من س. [١٠ : ٣]

ثانياً: قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين فى المفكوك متساويين. [$\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$]

■ (٢٠) مصر ٢٠٠٧: فى مفكوك $\left(٢س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٢٠}$ إذا كان الحدان التاسع والعاشر متساويين فأوجد قيمة

س، ثم اوجد رتبتى حدين متتالين فى هذا المفكوك بحيث تكون النسبة بين أحدهما والحد التالى له كنسبة ٨ : ١٥ وأثبت ان المفكوك لا يحتوى على حد خال من س.

[س = $\sqrt[٣]{٢}$ ، ($ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$)]

■ (٢١) مصر ٢٠٠٨ : فى مفكوك $\left(\frac{٥}{س} + س\right)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية :

(i) أثبت أن الحد الخالى من س هو الحد الأوسط وأوجد قيمته. [٤٣٧٥٠]

(ii) أوجد قيمة س التى تجعل النسبة بين الحدين الثالث والسابع كنسبة ١ : ١٦ [$\pm\sqrt{١٠}$]

■ (٢٢) مصر ٢٠٠٩ : فى مفكوك $\left(\frac{١}{س} + س^{٢}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التصاعدية إوجد

(i) قيمة الحد الخالى من س [٣٠٠٣]

(ii) قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين. [١]

■ (٢٣) مصر ٢٠٠٩ : فى مفكوك $\left(س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد :

(i) قيمة الحد الخالى من س. [- ٨٤]

(ii) قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الوسطين فى المفكوك مساوياً الصفر. [١]

الاختبار الأول

[١] (أ) أكمل : فى مفكوك $\left(\frac{\text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{٣}} - \frac{\text{س}}{\text{٢س}}\right)^{\text{١٢}}$

(١) $\text{ح}_{\text{٤}}$ = ... (٢) معامل الحد الاوسط = ... (٣) $\frac{\text{ح}_{\text{٦}}}{\text{ح}_{\text{٥}}}$ = ...

(ب) اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة. فى مفكوك $(\text{١} + \text{س})^{\text{١٢}}$:

(١) معامل $\text{س}^{\text{١٠}}$ = ...

(أ) ٦٠ (ب) ٦٦ (ج) ١٢ (د) ٢٤

(٢) $\frac{\text{ح}_{\text{٥}}}{\text{ح}_{\text{٤}}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{٩}}{\text{٤}}\text{س}$ (ب) $\frac{\text{٩}}{\text{٤س}}$ (ج) $\frac{\text{٤س}}{\text{٩}}$ (د) $\frac{\text{٤}}{\text{٩س}}$

(٣) إذا كان : ١٦ $\text{ح}'_{\text{٥}} = \text{ح}_{\text{٩}}$ فإن س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ± ١ (د) ± ٢

[٢] (أ) إذا كان مجموع الحدود الثلاثة الأول والأوسط والأخير فى مفكوك $(\text{س}+\text{٢})^{\text{٨}}$ يساوى = ١٣٧٧ أوجد قيمة س.

(ب) إذا كان : $(\text{س}-\text{٣})^{\text{٥}} = \text{أ} + \text{ب س} + \text{ج س}^{\text{٢}} + \text{ء س}^{\text{٣}} + \text{هـ س}^{\text{٤}} + \text{و س}^{\text{٥}}$

أوجد قيمة: (١) أ + ب + جـ + ء + هـ + و

(٢) أ + ٢ب + ٤ جـ + ٨ ء + ١٦ هـ + ٣٢ و

[٣] (أ) إذا كان معاملات $\text{س}^{\text{٧}}$ ، $\text{س}^{\text{٤}}$ فى مفكوك $\left(\text{م س}^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{جـ س}}\right)^{\text{١١}}$ حسب قوى س التنازلين متساويين

فإثبت أن : م جـ = ١ .

(ب) أوجد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{١١}}$ فى مفكوك $\text{س}^{\text{٧}}\left(\text{س}^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{١٢}}$

الاختبار الثاني

[١] (أ) اكمل : فى مفكوك $\left(٢س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١١}$

(١) معامل ح٥ = ... (٢) $\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}}$ = ...

(ب) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة. فى مفكوك : $(١-س)^{١٤}$:

(١) مجموع معاملات جميع الحدود.

(أ) $٢^{١٤}$ (ب) صفر (ج) ١٢٨ (د) -١٢٨

(٢) إذا كان : $\frac{ح_{٩}}{ح_{٨}} = \frac{١٤}{٨}$ فإن س = ...

(أ) ١ (ب) -١ (ج) ٢ (د) -٢

[٢] (أ) فى مفكوك $\left(س- \frac{١}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية وجد أن الحد الخامس هو الحد الخالى من س

أوجد قيمة ن ثم اوجد معامل الحد الأوسط.

(ب) إذا كان مجموع الحدين الأوسطين فى مفكوك $\left(س^{٢} - \frac{١}{٨س}\right)^{١٣}$ يساوى الصفر فأوجد قيمة س.

[٣] فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية.

أولاً : أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س وأثبت أن هذا المفكوك لا غيرى $س^{٥}$

ثانياً: إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س والحد السادس تساوى ٢ : ٣ فأوجد قيمة س الحقيقية.

الوحدة الثانية:

الأعداد المركبة

١ـ الصورة المثلثية للعدد المركب

٢ـ نظرية ديموافر

٣ـ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

تمارين عامة

تمارين واختبارات الكتاب

اختبارات عامة

الأعداد المركبة

- **مقدمة عن الأعداد المركبة:** مجموعة الأعداد المركبة يرمز لها بالرمز ك

تذكر من دراستك السابقة:

يعرف العدد التخيلى "ت" بأنه العدد الذى مربعه = (- ١)

أى أن $\boxed{ت^{٢} = -١}$

- **قيم قوى ت الصحيحة :** كل قوى ت الصحيحة تساوى إحدى القيم.

١ أ، - ١ أ، ت أ، - ت فمثلاً $(ت)^{١} = ت$ ، $ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٣} = -ت$ ، $ت^{٤} = ١$ ......

وعلى ذلك فقوى ت الصحيحة الموجبة تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بقدر ٤ ،

وكل أس صحيح موجب يزيد عن ٤ يمكن كتابته على الصورة:

$ت^{٤ن} = (ت^{٤})^{ن} = ١$ ، $ت^{٤ن+١} = ت^{٤ن} \times ت = ت$ ،

$ت^{٤ن+٢} = ت^{٤ن} \times ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٤ن+٣} = ت^{٤ن} \times ت^{٣} = -ت$

- **الصورة الجبرية للعدد المركب :**

هى : $\boxed{ع = أ + ب ت}$ حيث أ ، ب ∈ ح

عندما ع = أ يسمى العدد حقيقى صرف (بحت)

، عندما ع = ب ت يسمى العدد تخيلى صرف (بحت).

لاحظ: $(١ + ت)^{٢} = ٢ ت$ ، $(١ - ت)^{٢} = -٢ ت$

العددان المركبان المترافقان فى الصورة الجبرية: هما عددان على الصورة: ع = أ + ب ت

والمرافق $\bar{ع}$ = أ - ب ت حيث أ ، ب ∈ ح

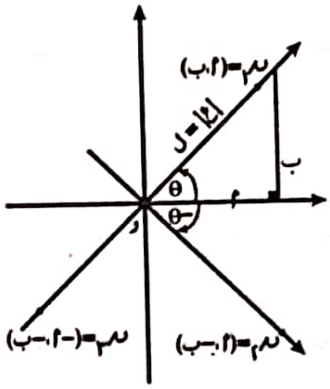
- **خواص هامة للعددان المركبان المترافقان :**

(١) $ع + \bar{ع}$ = عدد حقيقى (٢) $ع \times \bar{ع}$ = عدد حقيقى موجب

ومنها: أى عددان مركبان مجموعهما = عدد حقيقى، حاصل ضربهما = عدد حقيقى موجب لابد أنهما مترافقان.

التمثيل البيانى للأعداد المركبة – أشكال أرجاند

- شكل أرجاند هو الشكل الذى تمثل فيه الأعداد المركبة بأزواج مرتبة.



فمثلاً العدد المركب:

ع = أ + ب ت حيث أ ، ب ∈ ح تمثله النقطة ن١ = (أ ، ب)

مرافق ع هو $\bar{ع}$ = أ – ب ت تمثله النقطة ن٢ (أ ، - ب) ،

- ع = المعكوس الجمعى للعدد ع = - أ – ب ت

تمثله النقطة ن٣ = (- أ ، - ب)

- **المقياس :** إذا كان العدد المركب ع = أ + ب ت حيث أ ، ب ∈ ح تمثله النقطة ن١ فى شكل أرجاند

إن العدد الحقيقى الموجب ل = و ن١ يسمى مقياس العدد ع أى أن:

$$|ع| = و ن_١ = ل = \sqrt{أ^٢ + ب^٢}$$

- **السعة :** إذا كان θ هو قياس الزاوية الموجبة التى يضعها $\overleftarrow{و ن_١}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (حيث ن١ هى النقطة التى تمثل ع فى شكل أرجاند فإن θ تسمى "سعة العدد ع" ويرمز لها بالرمز سعـ(ع).

● **لاحظ:** أن θ = سعة العدد ع يمكن أن تأخذ عدداً غير منته من القيم التى تختلف كل منها عن الأخرى بعدد صحيح من الدورات الكاملة أى أنه إذا كانت θ سعة لعدد مركب ما فإن θ +٢ ن π حيث ن ∈ ص سعة لنفس العدد المركب

- **السعة الأساسية:** إذا كانت $\theta \in]-\pi ، \pi]$ فإن θ تسمى سعة أساسية للعدد المركب.

● من شكل أرجاند يمكن استنتاج الآتى:

- **مقياس العدد ع** = مقياس المرافق للعدد ع = مقياس المعكوس الجمعى للعدد ع أى أن:

$$|ع| = |\bar{ع}| = |-ع|$$

- **سعة المرافق** = - سعة العدد أى أن سعة $\bar{ع}$ تساوى $-\theta$
- **سعة المعكوس الجمعى** = ١٨٠ – سعة العدد أى أن سعة (- ع) = ١٨٠ - θ

الصورة المثلثية للعدد المركب

■ من شكل أرجاند م = ل جتا θ ، ب = ل جا θ ومنها

∵ ع = م + ب ت ∴ ع = ل جتا θ + ت × ل جا θ

وتكون $\boxed{\text{ع} = \text{ل}\left(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta\right)}$

تسمى هذه الصورة بالصورة المثلثية للعدد المركب ع

حيث ل = مقياس العدد ع = |ع| وهو عدد حقيقي موجب ، θ سعة العدد المركب ع.

لاحظ تتغير قيم العدد المركب ع فى الصورة المثلثية إذا تغيرت قيمة ل ، θ أو كليهما وتظل الصورة المثلثية كالتالى:

$$\text{ع} = \underbrace{\dots}_{\text{المقياس}} \left(\text{جتا}\dots + \text{ت جا}\dots\right) \quad \text{(السعة: ما بعد جتا وجا)}$$

■ **حاصل ضرب وخارج قسمة عددين مركبين فى الصورة المثلثية :**

إذا كان : $\text{ع}_1 = \text{ل}_1\left(\text{جتا}\theta_1 + \text{ت جا}\theta_1\right)$ ، $\text{ع}_2 = \text{ل}_2\left(\text{جتا}\theta_2 + \text{ت جا}\theta_2\right)$ فإن:

١) حاصل الضرب $\text{ع}_1 \times \text{ع}_2 = \text{ل}_1\text{ل}_2\left[\text{جتا}\left(\theta_1 + \theta_2\right) + \text{ت جا}\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right]$

أى أن: مقياس حاصل الضرب = حاصل ضرب مقياس العددين،

، سعة حاصل الضرب = ناتج جمع سعتى العددين.

٢) خارج القسمة $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}\left[\text{جتا}\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \text{ت جا}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$

أى أن مقياس خارج القسمة = مقياس البسط ÷ مقياس المقام

، سعة خارج القسمة = سعة البسط – سعة المقام.

نتيجة (١) : إذا كان $ع = ل\left(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta\right)$

فإن: $ع^{2} = ل^{2}\left(\text{جتا}2\theta + \text{ت جا}2\theta\right)$

، $ع^{3} = ل^{3}\left(\text{جتا}3\theta + \text{ت جا}3\theta\right)$ ، ..

بوجه عام : $ع^{ن} = ل^{ن}\left(\text{جتا}ن\theta + \text{ت جا}ن\theta\right)$ حيث $ن \in ص^{+}$

نتيجة (٢) $ع^{-1} = \frac{1}{ع} = \frac{\left(\text{جتا}. + \text{ت جا}.\right)}{ل\left(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta\right)} = \frac{1}{ل}\left[\text{جتا}(-\theta) + \text{ت جا}(-\theta)\right]$

وبوجه عام : $ع^{-ن} = \frac{1}{ع^{ن}} = \frac{1}{ل^{ن}}\left[\text{جتا}(-ن\theta) + \text{ت جا}(-ن\theta)\right]$ حيث $ن \in ص^{+}$

من نتيجة (١) ، نتيجة (٢) فإن :

$$ع^{ن} = ل^{ن}\left[\text{جتا}ن\theta + \text{ت جا}ن\theta\right] \text{ حيث } ن \in ص$$

■ الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) :

$$\text{جتا}\theta = 1 - \frac{\theta^{2}}{\underline{|2}} + \frac{\theta^{4}}{\underline{|4}} - \frac{\theta^{6}}{\underline{|6}} + \frac{\theta^{8}}{\underline{|8}} \ldots + (-1)^{ن} \times \frac{\theta^{2ن}}{\underline{|2ن}}$$

$$\text{جا}\theta = \theta - \frac{\theta^{3}}{\underline{|3}} + \frac{\theta^{5}}{\underline{|5}} - \frac{\theta^{7}}{\underline{|7}} + \frac{\theta^{9}}{\underline{|9}} \ldots + (-1)^{ن} \times \frac{\theta^{2ن+1}}{\underline{|2ن+1}} \text{ ،}$$

$$هـ^{\theta} = 1 + \theta + \frac{\theta^{2}}{\underline{|2}} + \frac{\theta^{3}}{\underline{|3}} + \frac{\theta^{4}}{\underline{|4}} + \ldots \text{ ،}$$

$$هـ^{-\theta} = 1 - \theta + \frac{\theta^{2}}{\underline{|2}} + \frac{\theta^{3}}{\underline{|3}} + \frac{\theta^{4}}{\underline{|4}} \ldots$$

ومنها : $هـ^{ت\theta} = 1 + ت\theta + \frac{(ت\theta)^{2}}{\underline{|2}} + \frac{(ت\theta)^{3}}{\underline{|3}} + \frac{(ت\theta)^{4}}{\underline{|4}} + \ldots$

ومنها : $هـ^{ت\theta} = هـ = 2 = \left(1 + \frac{\theta^{2}}{\underline{|2}} + \frac{\theta^{4}}{\underline{|4}} + \frac{\theta^{6}}{\underline{|6}} \ldots\right)$

$$+ ت\left(\theta - \frac{\theta^{3}}{\underline{|3}} + \frac{\theta^{5}}{\underline{|5}} \ldots\right) = \text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta$$

ومنها : $\boxed{ع = ل \left(\text{جتا}\theta + ت\text{جا}\theta \right) = ل \times هـ^{ت\theta}}$

حيث θ مقاسة بالتقدير الدائرى أى بدلالة π.

والصورة $\boxed{ع = ل \times هـ^{ت\theta}}$ تسمى بالصورة الأسية للعدد المركب ع

- مما سبق العدد المركب ع يمكن كتابته وكتابة مرافقه $\bar{ع}$ كالتالى:
  - صورة جبرية:

$$ع = أ + ب ت \quad , \quad \bar{ع} = أ - ب ت \quad \text{حيث } أ ، ب \in ح$$

  - صورة مثلثية:

$$ع = ل \left[\text{جتا}\theta + ت\text{جا}\theta \right] ، \bar{ع} = ل \left[\text{جتا}(-\theta) + ت\text{جا}(-\theta) \right]$$

  - صورة أسية:

$$ع = ل \times هـ^{ت\theta} ، \bar{ع} = ل \times هـ^{-ت\theta} \quad \text{حيث } \theta \text{ بالتقدير الدائرى.}$$

$$هـ^{ت\theta} = \text{جتا}\theta + ت\text{جا}\theta$$

مما سبق:

الصورة / العدد	العدد المركب	المرافق ع	المعكوس الجمعي - ع	ملاحظات
صورة جبرية	أ + ب ت	أ - ب ت	-أ - ب ت	أ ، ب $\in$ ح
صورة مثلثية	ل (جتا θ + ت جا θ)	ل (جتا $(-\theta)$ + ت جا $(-\theta)$)	ل (جتا $(\pi-\theta)$ + ت جا $(\pi-\theta)$)	ل عدد حقيقي موجب
صورة أسية	ل × $هـ^{ت\theta}$	ل × $هـ^{-ت\theta}$	ل × $هـ^{ت(\pi+\theta)}$	θ بالتقدير الدائري

ضرب وقسمة عددين مركبين في الصورة الاسية:

إذا كان $ع_1 = ل_1 \times هـ^{ت\theta_1}$ ، $ع_2 = ل_2 \times هـ^{ت\theta_2}$

فإن : **حاصل ضرب :** $ع_1 \times ع_2 = ل_1 \times ل_2 \times هـ^{ت(\theta_1 + \theta_2)}$

خارج القسمة : $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} هـ^{ت(\theta_1 + \theta_2)}$

نظرية ديموافر

. إذا كان ن عدداً نسبياً فإن:

$$ع^{ن} = \left(جتا\theta + ت جا\theta\right)^{ن} = جتا ن\theta + ت جا ن\theta.$$

- **حالات الاستخدام :**

أولاً : عندما ن = عدد صحيح فإن :

$\left(جتا\theta + ت جا\theta\right)^{ن} = جتا ن\theta + ت جا ن\theta =$ قيمة واحد فقط "كما فى النتيجة السابقة"

ثانياً : عندما ن = كسر حقيقى أى ن $= \frac{١}{م}$ حيث م ∈ ص$^{+}$

$ع^{ن} = \left(جتا\theta + ت جا\theta\right)^{ن} = \left(جتا\theta + ت جا\theta\right)^{\frac{١}{م}}$ جذور العدد

لها م من القيم المختلفة للحصول عليها تعتبر السعة

على أنها $\theta + ٢ ر \pi$ حيث ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، م − ١}.

ثالثاً : عندما ن $= \frac{ك}{م}$ حيث م ∈ ص$^{+}$ ، ك ∈ ص فإن

$ع^{ن} = ع^{\frac{ك}{م}} = \left(ع^{ك}\right)^{\frac{١}{م}}$ حيث $ع^{ك} =$ قيمة واحدة فقط.

$\left(ع^{ك}\right)^{\frac{١}{م}}$ لها م من القيم المختلفة نحصل عليها كما فى ثانياً.

تذكر : ١ = جتا . + ت جا . ، - ١ = جتا ط + ث جا ط ،
ت = جتا $\frac{ط}{٢}$ + ث جا $\frac{ط}{٢}$ ، - ث = جتا $\frac{٣ط}{٢}$ = ث جا $\frac{٣ط}{٢}$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

- نحصل على قيم هذه الجذور بحل المعادلة س^{٣} = ١ حيث س ∋ ك وتكون القيم:

  • فى الصورة الجبرية هي: ١ ، $-\frac{١}{٢}+\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت ، $-\frac{١}{٢}-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت

  • في الصورة المثلثية فتكون القيم هي:

  جتا ٠ + ت جا ٠ ، جتا$\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا$\frac{٢\pi}{٣}$ ، جتا$\frac{٤\pi}{٣}$ + ت جا$\frac{٤\pi}{٣}$

  • فى الصورة الأسية القيم هي: ١ = هـ^{٠} ، هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$ ، هـ$^{\frac{٤\pi}{٣}ت}$

ويرمز لهذه الجذور بالرموز: ω ، $\omega^{٢}$

وقد سمى الجذران المركبان ω ، $\omega^{٢}$ لأن كل منهما = مربع الآخر.

- خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

(١) $\boxed{١+\omega+\omega^{٢}=٠}$

ومنها $\boxed{١+\omega=-\omega^{٢} ، ١+\omega^{٢}=-\omega ، \omega+\omega^{٢}=-١}$

أيضاً $\boxed{\omega^{٢}=-١-\omega}$

(٢) $١\times\omega\times\omega^{٢}=\omega\times\omega^{٢}=\omega^{٣}=$ مكعب الجذر التكعيبى للواحد = ١

أى أن $\boxed{\omega^{٣}=١}$ ومنها .

(i) $\frac{١}{\omega}=\omega^{٢}$ ، $\frac{١}{\omega^{٢}}=\omega$ ، $\frac{١}{١+\omega}=\frac{١}{-\omega^{٢}}=-\omega$ ، $\frac{١}{١+\omega^{٢}}=\frac{١}{-\omega}=-\omega^{٢}$

(ii) $\because \omega^{٣}=١ \quad \therefore \omega^{٣ن}=\left(\omega^{٣}\right)^{ن}=١$ وتكون عندما ن ∋ ص$^{+}$

$\omega=\omega^{٤}=\omega^{٧}=\omega^{١٠}=...=\omega^{٣ن+١}$

، $\omega^{٢}=\omega^{٥}=\omega^{٨}=\omega^{١١}=....=\omega^{٣ن+٢}$

، $١=\omega^{٣}=\omega^{٦}=\omega^{٩}=...=\omega^{٣ن}$

(٣) $\boxed{\omega-\omega^{٢}=\pm\sqrt{٣}ت}$

- **ملاحظة هامة:** إذا أعطيت العدد المركب $-\frac{١}{٢}+\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت ويراد استخدامه فى التعويض وتحقيق صيغة ما فلابد من اعتباره = ω والتحقيق تم اعتباره = $\omega^{٢}$ والتحقيق أيضاً.

تمارين (٣) على الأعداد المركبة

المجموعة الأولى:

أ) أكمل ما يأ . . :

(١) الصورة الجبرية للعدد المركب الذى مقياسه ٥ وسعته π هى ....

(٢) الصورة الجبرية للعدد المركب الذى مقياسه ٣ وسعته ٢ π هى ....

(٣) الصورة الجبرية للعدد المركب الذى مقياسه ٢ وسعته $\frac{\pi}{٢}$ هى ....

(٤) الصورة الجبرية للعدد المركب الذى مقياسه ٧ وسعته $\frac{٣\pi}{٢}$ هى ....

(٥) العدد المركب ع = $\frac{ت - \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}\,ت}$ مقياسه = ...

(٦) إذا كان $\sqrt{أ + ب ت}$ = ٣ − ت فإن : أ + ب = ...

(٧) إذا كان ع = − ٣ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°) فإن : | ع | = ...

(٨) ٣ (جتا ٢٧° + ت جا ٢٧°) × ٥ (جتا ١٨° + ت جا ١٨°) = ...

(٩) السعة الأساسية لحاصل الضرب : ٤ (جتا ١٦° + ت جا ١٦°)

× ٣ (جتا ١٤° + ت جا ١٤°) هى ....

(١٠) السعة الأساسية لخارج القسمة : $\frac{٦(\text{جتا}٢١٨° + \text{ت جا}٢١٨°)}{٣(\text{جتا}٣٨° + \text{ت جا}٣٨°)}$ = ...

(١١) إذا كان : ع$_١$ = ٢ (جتا ١٨° + ت جا ١٨°) ، ع$_٢$ = ٣ (جتا ٩° + ت جا ٩°) ،

ع$_٣$ = ٤ (جتا ٣٣° + ت جا ٣٣°) فإن : | ع$_١$ ع$_٢$ ع$_٣$ | = ...

(١٢) الصورة المثلثية للعدد ع = ٢هـ$^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$ هى ....

(١٣) القيمة العددية للمقدار (١ + ω)^٣ = ...

(١٤) $(٢ + ٢\omega + ٥\omega^٢)^٣$ = ...

(١٥) الصورة المثلثية للعدد المركب ت هى ....

(١٦) السعة الأساسية للعدد المركب $(\text{جتا } ٢٠^\circ + \text{ت جا } ٢٠^\circ)^{٣٠}$ تساوى ....

(١٧) $\omega + \omega^{٢} = ...$ (١٨) $\dfrac{١}{\omega + \omega^{٢}} = ...$

(١٩) $\sqrt{\omega} = ...$ (٢٠) $(١ + \omega)^{٢٠} = ...$

ب) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ع = ٣ − ٤ ت فإن : | ع | = ... [٥ ، ٤ ، −٤ ، ٣]

(٢) الصورة الأسية للعدد المركب $(-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت})$ هى .... $\left[٢\text{هـ}^{\frac{٢\pi}{٣}\text{ت}} ، \text{هـ}^{\pi\text{ت}} ، \text{هـ}^{\frac{\pi}{٢}\text{ت}} ، \text{هـ}^{\frac{\pi}{٣}\text{ت}}\right]$

(٣) $(\text{جتا } ٦٠^\circ + \text{ت جا } ٦٠^\circ)^{٤} = \text{هـ}^{.....}$ [$\frac{١}{٢}$ ط ت ، $\frac{٢}{٣}$ ط ، $\frac{٤}{٣}$ ط ، $\frac{٤}{٣}$ ط ت]

(٤) السعة الأساسية للعدد ع = جا ٦٠° − ت جتا ٦٠° هى ....

[$\frac{١١}{٣}$ ط ، $\frac{٤}{٣}$ ط ، $\frac{١١}{٦}$ ط ، $\frac{٣}{٤}$ ط]

(٥) السعة الأساسية للعدد ع = جا ٦٠° + ت جتا ٦٠° هى ...... $\left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٦} ، \frac{٧\pi}{٦}\right]$

(٦) إذا كان : ع = − ٣ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°) فإن : | ع | = ... [−٣ ، ٣ ، ٩ ، −٩]

(٧) إذا كان : ع = ٣ (جتا ١٣٥° + ت جا ١٣٥°) فإن السعة الأساسية للعدد $\text{ع}^{٧}$ هى ....
$\left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٤} ، \frac{٣\pi}{٤}\right]$

(٨) $(\omega^{٢} - \omega)^{٤} = ...$ ١ [−٣ ، ٩ ، −٩ ، $\omega^{٢} - \omega$]

(٩) مرافق العدد المركب (٥ + ω) هو ...... [٥ − ω ، ٥ + $\omega^{٢}$ ، −٥ + ω ، ٥ω + ١]

(١٠) $٢٧ + ٢٩\omega^{١٠} + ٢٩\omega^{٨} = ...$ [صفر ، ١ ، ٢ ، −٢]

(١١) $٧ + ٦\omega^{-١} + ٦\omega^{-١} = ...$ [صفر ، ١ ، −١ ، ٢]

(١٢) العدد : $\dfrac{٥\omega - ٢}{٥ - ٢\omega^{٢}}$ .... [٥ω + ٢ ، ٥ + ٢$\omega^{٢}$ ، ω ، $\omega^{٢}$]

(١٣) أبسط صورة للعدد : $\dfrac{٧ - ٣\omega}{٧\omega - ٣}$ هي...... [$\omega^{٢}$ ، $\omega^{٢} - ٣$ ، ٥ − ω ، ٥ − ٣ω]

(١٤) الجذرين التربيعيين للعدد المركب (ω) هما ..... ، ...... [ω ، $\omega^{٢}$ ، $-\omega^{٢}$ ، $\pm\omega^{٢}$]

المجموعة الثانية :

الصورة الجبرية:

أوجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة :

■ (١) : إذا كانت ع = ٣ - ت اثبت أن $ع^{٣} - ٧ع^{٢} + ١٦ع - ١٠ =$ صفر

■ (٢) : إذا كانت ل = ١ + ٢ت ، م = ٢ + ت اثبت أن :

(أولاً) : $ل م^{٣} + م ل^{٣} = -٤٠$ (ثانياً) : $ل^{٣} + م^{٣} = ٩ (ت - ١)$

■ (٣) الطبري : إذا كان ن عدد صحيح موجب، اثبت أن :

(أ) $(١ + ت + ت^{٢})^{٤ن} = ١$

(ب) $(١ + ت)^{٤ن} - (١ - ت)^{٤ن} =$ صفر

(حـ) $\left[\left(\sqrt{-١}\right)^{٤ن+٣} - \left(\sqrt{-١}\right)^{٢(٢ن+١)}\right]^{٤} = -٤$

■ (٤) : إذا كانت ن عدد صحيح موجب، اثبت أن : $١ + ت^{ن} + ت^{٢ن} + ت^{٣ن} = ٤$ أ، صفر

■ (٥) : اثبت أن : $١ + {}^{٢٠}ق_{١}\, ت + {}^{٢٠}ق_{٢}\, ت^{٢} + \cdots + {}^{٢٠}ق_{٢٠}\, ت^{٢٠} = -١٠٢٤$

■ (٦) : إذا كانت $ع_{١} = ٣ + ٢ت$ ، $ع_{٢} = ١ + ٣ت$ حقق أن :

أ) $ع_{١} + |ع_{١}| \in ح$ ب) $ع_{١} \; |ع_{١}| \in ح$

جـ) $|ع_{١}| + |ع_{٢}| = |ع_{١}| + |ع_{٢}|$ د) $|ع_{١}||ع_{٢}| = |ع_{١}| \; |ع_{٢}|$

هـ) مربع $|ع_{١}| =$ مرافق $ع^{٢}_{١}$

■ (٧) : مصر (٤٩) : إذا كانت $ل = \frac{٢ + ت}{١ + ت}$ ، $م = \frac{١ + ٢ت}{١ + ت}$ فبرهن أن ل ، م كميتان مترافقتان ثم احسب

قيمة $\frac{١٥(ل^{٢} + م^{٢})}{٨ ل م (ل + م)}$ [١]

■ (٨) أوجد المعادلة التربيعية فى س ذات المعاملات الحقيقية والتى أحد جذريها هو:

$$\frac{١ + ٥\sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} + ٤ت^{٧}} \qquad س^{٢} + ٢\sqrt{٣}س + ٤ = ٠$$

■ (٩) إذا كان م ، ب ∋ ح فأوجد قيمة كل من م ، ب إذا كان :

(م) م + ب ت = $(١ + ت)^{١٧}$ [م = ٢٥٦ ، ب = ٢٥٦]

(ب) م + ب ت = $\sqrt{٨ت}$ [م = ±٢ ، ب = ±٢]

(جـ) م + ب ت = $\sqrt{-\frac{١}{٢}ت}$ [م = $\pm\frac{١}{٢}$ ، ب = $\mp\frac{١}{٢}$]

أوجد العدد المركب ع الذي يحقق كلاً من المعادلات الآتية :

■ (١٠) : $ع^٢$ + ٤ع + ١٣ = ٠ [-٢ + ٣ت ، -٢ - ٣ت]

■ (١١) : $ع^٢$ − (٢ − ت)ع + (٣ − ت) = ٠ [١ + ت ، ١ - ٢ت]

الصورة المثلثية للعدد المركب

أوجد مقياس وسعة كل من الأعداد المركبة الآتية ثم ضع كلاً منها على الصورة المثلثية :

■ (١) : (م) $ع_١$ = ٨ (ب) $ع_٢$ = -٥

(حـ) $ع_٣$ = ٤ت (د) $ع_٤$ = -٣ت

■ (٢) : (م) $ع_١$ = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت (ب) $ع_٢$ = -٣ + $\sqrt{٣}$ ت

(حـ) $ع_٣$ = -٢ (١ + ت) (د) $ع_٤$ = $\sqrt{٣}$ - ت

■ (٣) : (م) $ع_١$ = -٣ + ٣ت (ب) $ع_٢$ = ٢ $\sqrt{٢}$ (١ − ت)

(حـ) $ع_٣$ = -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت (د) $ع_٤$ = −٢ $\sqrt{٣}$ - ٦ت

■ (٤) : أوجد مقياس كل من الأعداد الآتية وعين سعة كل منها مقربة إلى أقرب درجة ومن ثم اكتب كلاً منها بالصورة المثلثية :

(م) $ع_١$ = ٣ + ٤ت (ب) $ع_٢$ = -٥ + ١٢ت

(حـ) $ع_٣$ = -٧ − ٢٤ت (د) $ع_٤$ = ١٥ − ٨ت

أوجد الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة الآتية :

■ (٥) : (م) العدد الذي مقياسه = ٣ وسعته = ط [-٣]

(ب) العدد الذي مقياسه = ٥ وسعته = ٩٠° [٥ت]

(حـ) العدد الذي مقياسه = ٤ وسعته = $\frac{٣}{٢}$ ط [-٤ت]

(د) العدد الذي مقياسه = ٦ وسعته = ١٢٠° [-٣ + ٣ $\sqrt{٣}$ ت]

■ (٦) : (أ) العدد الذي مقياسه = ٢ $\sqrt{٢}$ وسعته = $\frac{٥}{٤}$ ط [-٢ – ٢ت]

(ب) العدد الذي مقياسه = ٢ وسعته = $\frac{٥}{٣}$ ط [١ - $\sqrt{٣}$ ت]

(حـ) العدد الذي مقياسه = ١٠ وسعته = θ حيث طا θ = $\frac{٣}{٤}$ ، ط $\leq \theta \leq$ $\frac{٣}{٢}$ ط [-٨ – ٦ت]

اختصر كلاً مما يأتي إلى الصورة : س + ت ص ثم حول كلاً منها إلى الصورة المثلثية :

■ (٧) : ع = $\frac{٨}{١ - \sqrt{٣}ت}$ [٤ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)]

■ (٨) : ع = $\frac{٥ - ت}{٣ + ٢ت}$ [$\sqrt{٢}$ (حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°)]

■ (٩) : ع = $\frac{٩ + ٢١ت}{٢ - ٥ت}$ [٣ $\sqrt{٢}$ (حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°)]

■ (١٠) : ع = $\frac{٢ + \sqrt{٥}ت}{\sqrt{٥} - ٢ت}$ [حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°]

■ (١١) : ع = $\frac{١ + ٥\sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} - ٤ت}$ [٢ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°)]

■ (١٢) : ع = $\frac{٢ + ت}{١ + ت}$ - $\frac{٢ - ت}{١ - ت}$ [حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°]

■ (١٣) : إذا كانت ع = ٢ $\sqrt{٢}$ + ٢ $\sqrt{٢}$ ت ، اكتب الصورة المثلثية لكل من : ع ، -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ ، $(\bar{ع})^{-١}$

■ (١٤) : إذا كانت ع = -١ + $\sqrt{٣}$ ت ، اكتب الصورة المثلثية لكل من ع ، -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ ، $(\bar{ع})^{-١}$

■ (١٥) : إذا كانت ع = ٢ $\sqrt{٣}$ - ٢ت ، أوجد الصورة المثلثية لكل من : ع ، -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ ، $(\bar{ع})^{-١}$

أوجد السعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم اكتب كلاً منها بالصورة المثلثية الصحيحة :

■ (١٦) : (أ) $ع_١$ = ٢ (حا ٣٠° + ت حتا ٣٠°) [$\frac{١}{٣}$ ط]

(ب) $ع_٢$ = -٤ (حتا ٤٥° – ت حا ٤٥°) [$\frac{٣}{٤}$ ط]

■ (١٧) : (أ) $ع_٣$ = -٦ (حتا $\frac{ط}{٦}$ - ت حا $\frac{ط}{٦}$) [$\frac{٧}{٦}$ ط]

(ب) $ع_٤$ = $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{ط}{٤}$ - ت حا $\frac{ط}{٤}$) [$\frac{٧}{٤}$ ط]

■ (١٨) : (أ) $ع_١$ = ٣ (حا $\frac{ط}{٣}$ - ت حتا $\frac{ط}{٣}$) [$\frac{١١}{٦}$ ط]

(ب) $ع_٢$ = -٨ (حا ٤٥° + ت حتا ٤٥°) [$\frac{٥}{٤}$ ط]

■ (١٩) : (أ) ع١ = ٦ (حتا ١٢٠ ° – ت حا ١٢٠ °) [٢٤٠°]

(ب) ع٢ = ٢ (حا $\frac{٧}{٦}$ ط + ت حتا $\frac{٧}{٦}$ ط) [$\frac{٤}{٣}$ ط]

حاصل ضرب وخارج قسمة عددين مركبين بالصورة المثلثية :

■ (٢٠) : أوجد حاصل ضرب أزواج الأعداد الآتية بالصورة المثلثية :

(أ) ٢ (حتا ٢٩ ° + ت حا ٢٩ °) × ٥ (حتا ١٦ ° + ت حا ١٦ °)

(ب) ٤ (حتا ٣٧ ° + ت حا ٣٧ °) × ٧ (حتا ٢٣ ° + ت حا ٢٣ °)

(حـ) ٣ (حتا ٦٩ ° + ت حا ٦٩ °) × ٢ (حتا ٥١ °+ ت حا ٥١ °)

(د) ٦ (حتا ١١٧ ° + ت حا ١١٧ °) × ٣ (حتا ١٠٨ ° + ت حا ١٠٨ °)

(هـ) ٨ (حتا ٩٢ ° + ت حا ٩٢ °) × ٣ (حتا ٤٧ ° + ت حا ٤٧ °)

■ (٢١) : أوجد حاصر ضرب أزواج الأعداد الآتية بالصورة المثلثية وكذلك بالصورة الجبرية :

(أ) ٢ (حتا ١٧ ° + ت حا ١٧ °) × ٣ (حتا ٤٣ ° + ت حا ٤٣°)

(ب) ٨ (حتا ٨٣ ° + ت حا ٨٣ °) × $\frac{٧}{٢}$ (حتا ٦٧ ° + ت حا ٦٧ °)

(حـ) ٥ (حتا ١١٩ °+ ت حا ١١٩ °) × ٢ (حتا ١٥١ °+ ت حا ١٥١ °)

(د) ٤ (حتا ٢٥ ° + ت حتا ٢٥ °) × $\frac{٣}{٢}$ (حتا ٩٥ °– ت حا ٩٥ °)

(هـ) ٤ (حا ١٦ ° + ت حتا ١٦ °) × – $\frac{٥}{٣}$ (حتا ١٤ °– ت حا ١٤ °)

■ (٢٢) : أوجد خارج قسمة كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

(أ) $\frac{\text{٣(جتا ٨٤° + ت جا ٨٤°)}}{\text{٢(جتا ٣٩° + ت جا ٣٩°)}}$

(ب) $\frac{\text{١٥(جتا ٢١٧° + ت جا ٢١٧°)}}{\text{٥(جتا ٣٧° + ت جا ٣٧°)}}$

(حـ) $\frac{\text{٢١(جتا ١٥٣° + ت جا ١٥٣°)}}{\text{٧(جتا ٣٣° + ت جا ٣٣°)}}$

(د) $\frac{\text{١٨(جتا ١٧٩° + ت جا ١٧٩°)}}{\text{٩(جا ٤٦° + ت جتا ٤٦°)}}$

■ (٢٣) : أوجد خارج قسمة كل مما يأتي بالصورة الجبرية :

(أ) $\frac{\text{١٢(جتا ٧٢° + ت جا ٧٢°)}}{\text{٣(جتا ٢٧° + ت جا ٢٧°)}}$

(ب) $\frac{\text{٢٨(جتا ٨٥° + ت جا ٨٥°)}}{\text{٧(جا ٦٥° + ت جتا ٦٥°)}}$

(حـ) $\frac{\text{١٨(جتا ١٨٣° + ت جا ١٨٣°)}}{\text{٩(جا ٥٧° + ت جتا ٥٧°)}}$

(د) $\frac{\text{٣٤(جتا ٢٨٧° + ت جا ٢٨٧°)}}{\text{١٧(جا ٤٣° + ت جتا ٤٣°)}}$

■ (٢٤) : أوجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

(أ) $\dfrac{٤(\text{جتا } ١٤١^\circ + \text{ت جا } ١٤١^\circ) \times ٥(\text{جتا } ٩٨^\circ + \text{ت جا } ٩٨^\circ)}{١٠(\text{جتا } ١١٩^\circ + \text{ت جا } ١١٩^\circ)}$

(ب) $\dfrac{٣٠(\text{جتا } ١٥٣^\circ + \text{ت جا } ١٥٣^\circ)}{٥(\text{جتا } ٣٨^\circ + \text{ت جا } ٣٨^\circ) \times ٣(\text{جتا } ٨٥^\circ + \text{ت جا } ٨٥^\circ)}$

■ (٢٥) : إذا كان $ع_{١} = \frac{٣}{٢}$ (جتا ٢٩ ° + ت جا ٢٩°) ، $ع_{٢}$ = ٨ (جتا ٥٣ ° + ت جا ٥٣ °) ، $ع_{٣} = \frac{٥}{٤}$ (جتا ٣٨ ° + ت جا ٣٨ °) ،أوجد $ع_{١} \times ع_{٢} \times ع_{٣}$ بكل من الصورة المثلثية والجبرية. [$\frac{١٥}{٢}$ (-١ + $\sqrt{٣}$ ت)]

■ (٢٦) : إذا كان ع١ = ١٠ (جتا ٢٤٩°+ ت جا ٢٤٩ °) ، $ع_{٢}$ = ٢١ (جتا ١٧٠° + ت جا ١٧٠°) ، $ع_{٣}$ = ٤٢ (جتا ١٠٤° + ت جا ١٠٤°) ،أوجد $\frac{ع_{١} \times ع_{٢}}{ع_{٣}}$ بكل من الصورة المثلثية والجبرية. [$\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ (١ – ت)]

■ (٢٧) : إذا كانت $ع_{١}$ = ٣$\sqrt{٣}$ - ٣ت ، $ع_{٢}$ = ٣ (جتا ١٢٠ °+ ت جا ١٢٠ °) أوجد كل من $ع_{١}$ $ع_{٢}$ ، $ع_{١}$ / $ع_{٢}$ بالصورة المثلثية. [١٨(جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°) ، ٢ (جتا ٢١٠° + ت جا ٢١٠°)]

■ (٢٨) : إذا كانت ع١ = ٦ت^{٣} ، $ع_{٢}$ = ١ + ت ، $ع_{٣}$ = ٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°) أوجد العدد ($ع_{١} \times ع_{٢}$) / $ع_{٣}$ بكل من الصورة المثلثية والجبرية. [$-\frac{٣}{٢}\sqrt{٢} - \frac{٣}{٢}\sqrt{٦}$ت]

■ (٢٩) : إذا كانت $ع_{١}$ = ٨ (جتا ١٠٥° + ت جا ١٠٥°) ، $ع_{٢}$ = ت – ١ ، $ع_{٣}$ = – $\sqrt{٣}$ - ت أوجد العدد $ع_{١}$ / ($ع_{٢} \times ع_{٣}$) بكل من الصورة المثلثية والجبرية. [– $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٦}$ت]

■ (٣٠) : إذا كانت $ع_{١} = \frac{\sqrt{٣} + ٧ت}{١ - ٢\sqrt{٣}ت}$ ، $ع_{٢}$ = جا $\frac{ط}{٣}$ + ت جتا $\frac{ط}{٣}$ ، أوجد كلاً من $ع_{١}$ ، $ع_{١}$ $ع_{٢}$ ، $ع_{١}$ / $ع_{٢}$ في الصورة المثلثية والجبرية [(-$\sqrt{٣}$ + ت ، -٢ ، -١ + $\sqrt{٣}$ ت)]

■ (٣١) : إذا كان طا ى = $\frac{٣}{٤}$ حيث ٠ < ى < $\frac{١}{٢}$ ط ، أوجد العدد $\frac{(\text{جتا٢ي} + \text{ت جا٢ي})\ (\text{جتا٣ي} + \text{ت جا٣ي})}{\text{جا}(٩٠^\circ - ٤\text{ي}) + \text{ت جتا}(٩٠^\circ - ٤\text{ي})}$ بالصورة الجبرية [$\frac{١}{٥}$ (٤ + ٣ت)]

■ (٣٢) : إذا كانت ع١ = ١٠ت ، $ع_{٢}$ = ٢,٥ (جتا ى + ت جا ى) ، طا ى = $\frac{٤}{٣}$ حيث ٠ < ى < $\frac{١}{٢}$ ط ، أوجد كلاً من $ع_{١}$ $ع_{٢}$ ، $ع_{١}$ / $ع_{٢}$ في الصورة المثلثية ، كذلك بالصورة الجبرية

[-٢٠ + ١٥ت ، ٣,٢ + ٢,٤ت]

■ (٣٣) : إذا كانت ع١ = ٥ (جتا ٢ θ - ت جا ٢ θ) ، حيث ط < θ < $\frac{٣}{٢}$ ط ، ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ ، $ع_{٢}$ = -٢ (جتا θ - ت جا θ) أوجد العدد $ع_{١}$ $ع_{٢}$ بالصورة المثلثية ، الصورة الجبرية [٨ + ٦ت]

■ (٣٤) : إذا كانت ع١ = ٥ (جا θ + ت جتا θ) ، $ع_{٢}$ = – $\sqrt{٥}$ (جتا ٢ θ - ت جا ٢ θ) حيث ٠ < θ < $\frac{١}{٢}$ ط ، طا θ = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد العدد $ع_{١}$ / $ع_{٢}$ بالصورة المثلثية والجبرية [١ – ٢ت]

مسائل على نظرية ديموافر :

■ (١) : أوجد كلاً من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية والجبرية :

أ) $ع_١ = [\sqrt{٢}\ (جتا ٢٤° + ت جا ٢٤°)]^{٥}$ $[-١ + \sqrt{٣}\ ت]$

ب) $ع_٢ = [\sqrt{٢}\ (جتا \frac{٣}{٤} ط + ت جا \frac{٣}{٤} ط)]^{٧}$ $[-٨ (١ + ت)]$

■ (٢) : أ) $ع_٣ = (جا ٧٥° + ت جتا ٧٥°)^{٩}$ $[\frac{١}{٢} \sqrt{٢} (ت - ١)]$

ب) $ع_٤ = [٢ (جتا \frac{١}{٦} ط - ت جا \frac{١}{٦} ط)]^{٤}$ $[-٨ (١ + \sqrt{٣}\ ت)]$

■ (٣) : أوجد العدد : ع = ١ + ت بالصورة المثلثية ومن ثم أوجد كلاً من $ع^{٢}$ ، $ع^{٧}$ ، $ع^{-٣}$ بكل من الصورة المثلثية والجبرية.

$[٢ت ، ٨ - ٨ت ، -\frac{١}{٤} (١ + ت)]$

■ (٤) : أوجد العدد : ع = $\sqrt{٣}$ ت - ١ بالصورة المثلثية ومن ثم استخدم نظرية ديموافر لإثبات أن :

أ) $ع^{٣} = (\bar{ع})^{٣} = ٨$ ب) $ع^{٥} = ٨ع^{٢}$

■ (٥) : أوجد كلاً مما يأتي بالصورة المثلثية والجبرية :

(أ) $(جتا ٣٩° + ت جا ٣٩°)^{٤} \times (جتا ٥٣° + ت جا ٥٣°)^{٣}$

(ب) $(جتا \frac{ط}{٦} + ت جا \frac{ط}{٦})^{٥} \times (جتا \frac{ط}{٣} + ت جا \frac{ط}{٣})^{٤}$

(حـ) $[\sqrt{٢}\ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)]^{٨} \times [(جتا ط/٨ + ت جا ط/٨)]^{١٢}$

$[\frac{١}{٢} \sqrt{٢}\ (١ - ت) ، \frac{١}{٢} (\sqrt{٣} + ت) ، ٨ (\sqrt{٣} + ت)]$

■ (٦) : أوجد قيمة كل مما يأتي بالصورتين المثلثية والجبرية :

(أ) $\frac{(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)^{٤}}{(جتا ١٩° + ت جا ١٩°)^{٥}}$ (ب) $\frac{(جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)^{٥}}{(جتا ٢٠° + ت جا ٢٠°)^{٣}}$

$[\frac{١}{٢} \sqrt{٢}\ (١ + ت) ، \frac{١}{٢} (\sqrt{٣} + ت)]$

■ (٧) : أوجد العدد الآتي بالصورتين المثلثية والجبرية :

$$\frac{(جتا ٦٣° + ت جا ٦٣°)^{٤} \times (جتا ٣٨° + ت جا ٣٨°)^{٣}}{(جتا ٤٨° + ت جا ٤٨°)^{٧}}$$

$[\frac{١}{٢} \sqrt{٣} + \frac{١}{٢} ت]$

■ (٨) : إذا كانت $ع = \frac{٢ - ٢\sqrt{٣}ت}{١ + \sqrt{٣}ت}$ ، أوجد بالصورة المثلثية كلاً من : ع ، - ع ، $\bar{ع}$ ، $ع^{-١}$

ثم اثبت أن $ع^{٤} = ٨ ع$

■ (٩) : إذا كانت $ع_١ = ١ + ت$ ، $ع_٢ = ١ - \sqrt{٣}$ ت ضع كلاً من $ع_١$ ، $ع_٢$ بالصورة المثلثية ومن ثم أوجد $ع_١^٤ \times ع_٢^٦$ بكل من الصورة المثلثية والصورة الجبرية [٣٢]

■ (١٠) : ضع كلاً من العددين $ع_١ = ١ - ت$ ، $ع_٢ = -٣ - \sqrt{٣}$ ت بالصورة المثلثية ومن ثم أوجد كلاً من العددين $(ع_٢ \div ع_١)^٤$ ، $(ع_٢^٣ \div ع_١^٢)$ بكل من الصورة المثلثية والجبرية. [١٨ (١ + $\sqrt{٣}$ت) ، $١٢\sqrt{٣}$]

■ (١١) : ضع كلاً من الأعداد $ع_١ = -٢ + ٢$ت ، $ع_٢ = -١ - \sqrt{٣}$ ت $ع_٣ = \sqrt{٣}$ - ت بصورة مثلثية ومن ثم أوجد العدد $ع_١^٤ \times ع_٢^٣ / ع_٣^٢$ بكل من الصورة المثلثية والجبرية. [١٦ ($\sqrt{٣}$ + ت)]

■ (١٢) : إذا كانت $ع_١ = ت - \sqrt{٣}$ ، $ع_٢ =$ جتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ط}{٣}$ ، $ع_٣ =$ (جتا ١٣٥° + ت جا ١٣٥°)

أوجد العدد : $(ع_١^٢ \times ع_٢^٢) \div ع_٣^٤$ بكل من الصورة المثلثية والجبرية [٤ (ت - $\sqrt{٣}$ + ت)]

■ (١٣) : إذا كانت $ع_١ =$ جتا ٢ θ+ ت جا٢ θ ، $ع_٢ = ٢$ (جتا θ - ت جا θ)

حيث جا Θ = $\frac{٣}{٤}$ ، ٠ < θ < $\frac{١}{٢}$ ط ، أوجد العدد $ع_١^٢ \times ع_٢^٢$ بالصورة الجبرية. [$٢\sqrt{٧}$ + ٦ت]

■ (١٤) : إذا كانت ع١ = $\sqrt{٥}$ (جتا θ - ت جا θ) ، ع٢ = ٢ (جا θ + ت جتا θ) ، طا θ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ٠ < θ < $\frac{١}{٢}$ ط ، أوجد بالصورة الجبرية العدد ٨ $(ع_١^٤ / ع_٢^٢)$ [١٥ + ٢٠ ت]

■ (١٥) : استخدم نظرية ديموافر لإثبات أن :

أ) جا٢θ = ٢جاθجتاθ ب) جتا ٢ θ = جتا^٢ θ - جا^٢ θ

جـ) جا٣θ = ٣جاθ - ٤ جا^{٣}θ د) جتا٣θ = ٤جتا^{٣}θ-٣جتاθ

جذور العدد المركب :

■ (١) : باستخدام نظرية ديموافر أوجد الجذرين التربيعيين لكل مما يأتي :

(أ) ع = ٢ + $٢\sqrt{٣}$ ت (ب) ع = ٩ت

(حـ) ع = ٢ (ت - $\sqrt{٣}$) (د) ع = - ٤

(هـ) ع = -٤ت (و) ع = ٢ - $٢\sqrt{٣}$ت

■ (٢) : أوجد الجذرين التربيعيين لكل مما يأتي بالطريقة الجبرية وبطريقة ديموافر :

(أ) ع = ٨ + $٨\sqrt{٣}$ ت (ب) ع = ٢ت (حـ) ع = -٤ (١ + $\sqrt{٣}$ ت)

أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

■ (٣) : ضع العدد ع = $\frac{(\sqrt{٣} - ت)^{٦}}{(ت - ١)^{٨}}$ بالصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع [ـ ٢ت]

■ (٤) : استخدم نظرية ديموافر لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد ع = $\frac{(ت + ١)^{١٠}(ت - \sqrt{٣})^{٤}}{١٢٨ ت^{٧}}$

[ـ ($\sqrt{٣}$ + ت)]

■ (٥) : مصر (٦١) : أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد ع = ٢٧ في ك

■ (٦) : أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد ع = -٦٤ ت بكل من الصورتين المثلثية والجبرية ومثلها على شكل آرجاند

أوجد حلول كل من المعادلات الآتية بالصورتين المثلثية والجبرية ثم مثلها على شكل آرجاند

■ (٧) : $ع^{٣} + ٨ = ٠$

■ (٨) : $ع^{٤} = ٢٥٦$

■ (٩) : $ع^{٤} + ٨ - ٨\sqrt{٣}\,ت = ٠$

أوجد بالصورة المثلثية مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

■ (١٠) : $ع^{٤} + ٨١\,ت = ٠$

■ (١١) : $ع^{٥} - ٣٢\,ت = ٠$

■ (١٢) : إذا كانت ع = $\frac{(\text{جتا}\,ط/٤ - ت\,\text{جا}\,ط/٤)^{٨}(\text{جا}\,ط/٦ - ت\,\text{جتا}\,ط/٦)^{٦}}{(\text{جا}\,٥ط/٤ - ت\,\text{جتا}\,٥ط/٤)^{١٢}}$ أوجد بالصورة المثلثية القيم المختلفة للعدد $ع^{١/٤}$

■ (١٣) : أوجد جبرياً القيم المختلفة للعدد ع = $(٥ + ١٢ت)^{٢/٣}$

■ (١٤) : أوجد بالصورة المثلثية القيم المختلفة للعدد ع = $(١ + \sqrt{٣}\,ت)^{٢/٥}$

■ (١٥) : أوجد بالصورة المثلثية القيم المختلفة للعدد ع = $(ت - ١)^{٣/٤}$

■ (١٦) : إذا كانت ل = $\frac{١ + ت}{١ - ت}$ ، م = $\frac{١ - ت}{١ + ت}$ ، ع = ٥ $ل^{١٣}$ - ٣ $م^{٧}$ أوجد القيم المختلفة للعدد $ع^{٢/٣}$

[ـ ٢ (١ - ت)]

الصور الأسية للعدد المركب والعمليات على الصور الأسية :

أوجد الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة الآتية :

■ (١) : (أ) $ع_{١} = ٢هـ^{٥ط ت/٦}$ (ب) $ع_{٢} = ٤هـ^{٢ط ت/٣}$ (حـ) $ع_{٣} = ٣هـ^{ط ت/٢}$

■ (٢) : (أ) $ع_{١} = هـ^{٣ط ت/٢}$ (ب) $ع_{٢} = \sqrt{٢} هـ^{٥ط ت/٤}$ (حـ) $ع_{٣} = ١٢هـ^{٥ط ت/٣}$

أوجد مقياس وسعة كلاً من الأعداد المركبة الآتية ثم اكتب كلاً منها بالصورة الأسية :

■ (٣) : (i) $ع_{١} = ٣$ (ii) $ع_{٢} = ٢ت$ (iii) $ع_{٣} = -٩ت$ (vi) $ع_{٤} = -٤$

■ (٤) : (i) $ع_{١} = ٢\sqrt{٣} + ٢ت$ (ii) $ع_{٢} = -\sqrt{٣} - ت$ (iii) $ع_{٣} = ٢ - ٢ت$

■ (٥) : (i) $ع_{١} = ٢\sqrt{٢}(ت - ١)$ (ii) $ع_{٢} = ٢(ت - \sqrt{٣})$

اختصر كلاً مما يأتي إلى الصورة س + ت ص ثم حول كلاً منها إلى الصورة الأسية :

■ (٦) : $ع = \frac{١٢}{١ + \sqrt{٣}ت}$ [$٦هـ^{٥ط ت/٣}$]

■ (٧) : $ع = \frac{١ + ٥ت}{٢ - ٣ت}$ [$\sqrt{٢} هـ^{٣ط ت/٤}$]

■ (٨) : $ع = \frac{(٧ت - ٣)^{٢}}{٢ + ٥ت}$ [$٢\sqrt{٢} هـ^{ط ت/٤}$]

■ (٩) : $ع = \frac{٦ - ٣\sqrt{٥}ت}{\sqrt{٥} + ٢ت}$ [$٣هـ^{٣ط ت/٢}$]

■ (١٠) : $ع = \frac{١ - ٥\sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} + ٤ت}$ [$٢هـ^{٧ط ت/٦}$]

أوجد ناتج كل مما يأتي بالصورة الأسية والمثلثية :

■ (١١) : $ع = ٣هـ^{٥ط ت/٦} \times ٢هـ^{٢ط ت/٣}$ [٦(جتا ٢٧٠° + ت جا ٢٧٠°)]

■ (١٢) : $ع = \sqrt{٢} هـ^{ط ت/٣} \times ٢\sqrt{٢} هـ^{٧ط ت/١٢} \times \sqrt{٣} هـ^{ط ت/٤}$ [$٤\sqrt{٣}$ (جتا ٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°)]

■ (١٣) : $ع = ٦هـ^{٧ط ت/٣} + ٢\sqrt{٣} هـ^{١١ط ت/٦}$ [$\sqrt{٣}$ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)]

■ (١٤) : $ع = \frac{٢\sqrt{٣}هـ^{٥ط ت/١٢} \times \sqrt{٣}هـ^{٥ط ت/٦}}{٣هـ^{ط ت}}$ [٢(جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)]

■ (١٥) : $ع = \frac{٣\sqrt{٢}هـ^{٨ط ت/١٥} \times \sqrt{٢}هـ^{٤ط ت/٥}}{٢هـ^{ط ت/٥} \times هـ^{٤ط ت/٥}}$ [٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)]

■ (١٦) : إذا كان $\text{ع}_1 = \text{هـ}^{1+\text{ط ت}/3}$ ، $\text{ع}_2 = \text{هـ}^{-3\text{ط ت}/2}$. اثبت أن كلاً من $\text{ع}_1\text{ع}_2$، $\text{ع}_1 / \text{ع}_2$ هي عدد حقيقي.

[-هـ ، هـ]

■ (١٧) : إذا كانت $\text{ع}_1 = \text{هـ}^{4\text{ط ت}/3}$ ، $\text{ع}_2 = \text{هـ}^{5\text{ط ت}/4}$ ، $\text{ع}_3 = \text{هـ}^{\frac{1}{2}(3\text{ط ت}-2)}$ اثبت أن $(\text{ع}_1^3 \times \text{ع}_2^4) / \text{ع}_3^2 = \text{هـ}^2$.

أوجد قيمة كل مما يأتي بالصورة الجبرية :

■ (١٨) : $\text{ع} = \frac{3}{2}(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{4}) \times 4\text{هـ}^{\frac{3}{2}\text{ط ت}}$

■ (١٩) : $\text{ع} = 2(\text{جتا}\frac{5\text{ط}}{6} + \text{ت جا}\frac{5\text{ط}}{6}) \times 3\text{هـ}^{\frac{\text{ط}}{3}\text{ت}}$

■ (٢٠) : $\text{ع} = 7\text{هـ}^{-\frac{4}{3}\text{ط ت}}(\text{جتا}\frac{11\text{ط}}{6} + \text{ت جا}\frac{11\text{ط}}{6})$

■ (٢١) : $\text{ع} = 4\text{هـ}^{-\frac{3}{2}\text{ط ت}}(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{3} - \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{3})$

أوجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية والأسية :

■ (٢٢) : (أ) $9\text{ت هـ}^{\frac{3}{4}\text{ط ت}}$ (ب) $-4\text{ت هـ}^{\frac{2}{3}\text{ط ت}}$

■ (٢٣) : (أ) $2(\sqrt{3} + \text{ت})\,\text{هـ}^{\frac{5\text{ط}}{6}\text{ت}}$ (ب) $3(\text{ت} - 1)\,\text{هـ}^{\frac{7}{12}\text{ط ت}}$

■ (٢٤) : (أ) $-2(\sqrt{3} + \text{ت})\,\text{هـ}^{-\frac{5\text{ط}}{12}\text{ت}}$ (ب) $3(1 - \sqrt{3}\,\text{ت})\,\text{هـ}^{\frac{-5\text{ط}}{6}\text{ت}}$

أوجد ناتج كل مما يأتي بالصورتين المثلثية والجبرية :

■ (٢٥) : (أ) $2\text{ت هـ}^{\frac{2}{3}\text{ط ت}}$ (ب) $-8\text{ت هـ}^{\frac{\text{ط}}{6}\text{ت}}$

■ (٢٦) : (أ) $(\text{ت} - \sqrt{3})\,\text{هـ}^{\text{ط ت}}$ (ب) $-2(1 + \text{ت})\,\text{هـ}^{\frac{5\text{ط}}{12}\text{ت}}$

■ (٢٧) : (أ) $2(3 - \sqrt{3}\,\text{ت})\,\text{هـ}^{-\frac{2\text{ط}}{3}\text{ت}}$ (ب) $2\sqrt{2}(1 - \text{ت})\,\text{هـ}^{-\frac{7}{12}\text{ط ت}}$

■ (٢٨) : إذا كانت $\text{ع}_1 = 2\sqrt{3} - 2\text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = 3(\text{جتا } 150^\circ + \text{ت جا } 150^\circ)$ أوجد كلاً من $\text{ع}_1\text{ع}_2$ ، $\text{ع}_1/\text{ع}_2$ بالصورة المثلثية والأسية.

■ (٢٩) : إذا كانت $\text{ع}_1 = 3\sqrt{2}\,\text{ت}^3$ ، $\text{ع}_2 = -1 + \text{ت}$ ، $\text{ع}_3 = 2(\text{جتا } 105^\circ + \text{ت جا } 105^\circ)$ أوجد $(\text{ع}_1 \times \text{ع}_2) / \text{ع}_3$ بالصورة المثلثية والأسية.

■ (٣٠) : إذا كانت $\text{ع}_1 = 4(\text{جتا } 75^\circ + \text{ت جا } 75^\circ)$ ، $\text{ع}_2 = 1 + \text{ت}$ ، $\text{ع}_3 = \sqrt{3} - \text{ت}$ أوجد العدد $\text{ع}_1 / (\text{ع}_2 \times \text{ع}_3)$ بالصورة المثلثية والأسية.

■ (٣١) : إذا كانت $ع_١ = ٣\,(١ - ت)$ ، $ع_٢ = \frac{١}{٢}\sqrt{٢}\,(ت - \sqrt{٣})$، أوجد كلاً من $ع_١ ع_٢$ ، $ع_١ / ع_٢$ بالصورة المثلثية والأسية.

■ (٣٢) : إذا كانت $ع_١ = -٢ + ٢ت$ ، $ع_٢ = ١ - \sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_٣ = -\sqrt{٣} - ت$ أوجد العدد $(ع_١ \times ع_٢) / ع_٣$ بالصورة المثلثية والأسية.

■ (٣٣) : إذا كانت $ع = ٢\,(ت - ١)$ ، أوجد بالصورة الأسية كلاً من الأعداد : $ع$ ، $-ع$ ، ع| ، $\frac{١}{ع}$ ، $(ع|)^{-١}$.

■ (٣٤) : إذا كانت $ع = \sqrt{٢}\; هـ^{٢ط ت/٣}$ أوجد كلاً من الأعداد : $ع^٢$ ، $ع^٦$ ، $ع^{-٢}$ بالصورة المثلثية والجبرية

[$-(١ + \sqrt{٣}\,ت)$ ، ٨ ، $-\frac{١}{٤}(١ - \sqrt{٣}\,ت)$]

■ (٣٥) : إذا كانت $ع = \frac{٥ - \sqrt{٣}\,ت}{\sqrt{٣} - ٢ت}$ أوجد كلاً مما يأتي بالصورة الأسية :

(أولاً) : $ع$ ، $-ع$ ، ع| ، $ع^{-١}$ (ثانياً) : $ع^٢$ ، $ع^{-٢}$ ، $ع^٥$

■ (٣٦) : إذا كانت $ع_١ = ٢\sqrt{٢}\,(ت - ١)$ ، $ع_٢ = ١ + \sqrt{٣}\,ت$ ، أوجد كلاً من : $(ع_١ / ع_٢)^٤$ ، $ع_١^٢ / ع_٢^٣$ بالصورة الأسية

■ (٣٧) : إذا كانت $ع_١ = ٢\,(جتا\, ١٥٠^\circ + ت\, جا\, ١٥٠^\circ)$ ، $ع_٢ = -٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_٣ = ١ + ت$. أوجد العدد $ع_١^٣ \times ع_٢^٢ / ع_٣^٦$ بالصورة الأسية والجبرية.
[$-٨ - ٨\sqrt{٣}\,ت$]

أوجد الجذرين التربيعيين لكل مما يأتي بالصورة الأسية والجبرية :

■ (١) : (أ) $ع = ٢هـ^{ط ت/٢}$ (ب) $ع = ٤هـ^{٢ط ت/٣}$

■ (٢) : (أ) $ع = ١٦هـ^{٥ط ت/٣}$ (ب) $ع = ٨هـ^{٣ط ت/٢}$

■ (٣) (أ) $ع = ٤\,(جتا\, ٢٤٠^\circ + ت\, جا\, ٢٤٠^\circ)$ (ب) $ع = ٤ + ٤\sqrt{٣}\,ت$

أوجد بالصورة الأسية كلاً من :

■ (٤) : الجذران التربيعيان للعدد : $ع = -٢\sqrt{٣} + ٢ت$

■ (٥) : الجذران التربيعيان للعدد : $ع = \frac{٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت}{١ + \sqrt{٣}\,ت}$

■ (٦) : الجذور التكعيبية للعدد $ع = -٨\,ت$

■ (٧) : جذور المعادلة : $ع^٣ = ٢٧$

■ (٨) : حلول المعادلة : $ع^{٤} + ١٦ = ٠$

■ (٩) : حلول المعادلة : $ع^{٥} + ٢٤٣ = ٠$

■ (١٠) : قيم العدد $ع = (١ + ت)^{٣/٤}$

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، اثبت صحة كلاً من العلاقات الآتية :

■ (١) : (أ) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٣} = ٢٧$ (ب) $١ + \frac{\omega^{٢}+\omega^{٤}}{٢+\omega+\omega^{٢}} = $ صفر

■ (٢) : (أ) $(١ - \omega + ٢\omega^{٢})(١ + \omega - ٥\omega^{٢}) = ١٨$ (ب) $\left(\frac{١}{١+\omega^{٥}} - \frac{١}{١+\omega^{٤}}\right)^{٢} = -٣$

■ (٣) : (أ) $(١ + \omega - \omega^{٢})^{٣} = (١ - \omega + \omega^{٢})^{٣}$ (ب) $\left(\frac{٢\omega+١}{\omega}\right)^{٢} - \left(\frac{\omega^{٢}-١}{\omega^{٢}}\right)^{٢} = ٠$

■ (٤) : (أ) $(٢ + ١١\omega + ٢\omega^{٢})(٢ + ١١\omega^{٢} + ٢\omega^{٤}) = ٨١$

(ب) $(١ + \omega)(١ + \frac{١}{\omega})(١ + \omega^{٢})(١ + \frac{١}{\omega^{٢}}) = ١$

■ (٥) : (أ) $(١ - \omega)^{٣}(١ - \omega^{٢})^{٣} = ٢٧$ (ب) $(١ - \frac{٢}{\omega^{٢}} + \omega^{٢})(١ + \omega - \frac{٣}{\omega}) = ١٢$

■ (٦) : $(١ - \omega + \omega^{٢})(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})(١ - \omega^{٤} + \omega^{٨})(١ - \omega^{٨} + \omega^{١٦}) = ١٦$

■ (٧) : السودان (٦٤) : $\frac{\omega^{٢}(\omega-١)(\omega^{٢}-١)}{(٢\omega+١)(\omega^{٢}+٢)} = -١$

■ (٨) : مصر (٤٧) : $\frac{\omega}{(٢+٥\omega+٢\omega^{٢})^{٢}} + \frac{\omega^{٢}}{(٢+٢\omega+٥\omega^{٢})^{٢}} = -\frac{١}{٩}$

■ (٩) : مصر (٥٦) : $\frac{٤}{٣+٣\omega+\omega^{٢}} + \frac{١+٧\omega+\omega^{٢}}{٥-٤\omega-٤\omega^{٢}} + \frac{٤\omega}{٣} = ٠$

■ (١٠) : $(٢ - \omega)^{٣} + (٢ - \omega^{٢})^{٣} = ٢٠$

■ (١١) : مصر (٥٨) : $\frac{١}{١-٢\omega} + \frac{١}{١-٢\omega^{٢}} = \frac{٤}{٧}$

■ (١٢) : مصر (٥٣) : $\frac{٢+\omega}{١+٣\omega} + \frac{٢+\omega^{٢}}{١+٣\omega^{٢}} = \frac{٣}{٧}$

■ (١٣) : البحرين (٧٢) : $(\omega - \omega^{٢})\left(\frac{\omega-٣}{٤+٣\omega} - \frac{\omega^{٢}-٣}{٤+٣\omega^{٢}}\right) = -٣$

■ (١٤) : مصر (٥٢) : $\frac{١}{١+٣\omega-\omega^{٢}}+\frac{١}{١-\omega+٣\omega^{٢}}=٠$

■ (١٥) : مصر (٦٤) : $\frac{١}{٤+٣\omega+٢\omega^{٢}}+\frac{١}{٥+٣\omega+٤\omega^{٢}}=٠$

■ (١٦) : مصر (٥٤) : $(٥+\omega)\left\{\frac{١}{٥+٤\omega+٣\omega^{٢}}-\frac{١}{٣\omega+٢\omega^{٢}}\right\}=٤$

■ (١٧) مصر (٦٦) : $\frac{١}{٣-٢\omega+\omega^{٢}}+\frac{١}{٣+٢\omega-٢\omega^{٢}}=\frac{٢}{٧}$

■ (١٨) : السودان (٦٦) : $\left(\frac{\omega}{١+٢\omega^{٢}}\right)^{٢}+\left(\frac{\omega^{٢}}{١+٢\omega}\right)^{٢}=\frac{١}{٣}$

■ (١٩) : مصر (٣٨) : $\left(\frac{١}{١+٢\omega}-\frac{١}{١+٢\omega^{٢}}\right)^{٢}=-\frac{٤}{٣}$

■ (٢٠) :مصر (٤٨) : $\left(\frac{١}{١+٣\omega^{٢}}-\frac{١}{١+٣\omega^{٤}}\right)^{٢}=-\frac{٢٧}{٤٩}$

■ (٢١) : مصر (٥٦) : $\left(\frac{١}{١+٢\omega-٢\omega^{٢}}-\frac{١}{١-٢\omega+٢\omega^{٢}}\right)^{٢}=-\frac{٤٨}{١٦٩}$

■ (٢٢) : مصر (٦٥) : $\left(\frac{٥-٣\omega^{٢}}{٥\omega-٣}-\frac{٢-٧\omega}{٢\omega^{٢}-٧}\right)^{٤}=٩$

■ (٢٣) : $\left(\frac{٣\omega^{٢}+٢\omega+٧}{٢\omega^{٢}+٧\omega+٣}+\frac{٥-٨\omega}{٨-٥\omega^{٢}}\right)^{٨}=٨١$

■ (٢٤) : (أ) $\left(\frac{٣+٥\omega+\omega^{٢}}{٥+\omega+٣\omega^{٢}}\right)^{٣ن}=١$

(ب) $(٣+٥\omega+٣\omega^{٢})^{٣ن}+(٣+٣\omega+٥\omega^{٢})^{٣ن}=٢^{٣ن+١}$

■ (٢٥) : $\frac{٤+٢\omega+\omega^{٢}}{٤+٣\omega+٢\omega^{٢}}+\frac{٤+\omega+٢\omega^{٢}}{٤+٢\omega+٣\omega^{٢}}=٣$

■ (٢٦) : اثبت أن $-\frac{١}{٢}(١-\sqrt{٣}\,ت)$ هو أحد جذور المعادلة $٤ع^{١٥}+٣ع^{١٦}+٣ع^{١٧}-١=٠$

■ (٢٧) : مصر (٤١) : كون معادلة الدرجة الثانية التي جذراها $(١+\omega-\omega^{٢})^{٣}$ ، $(١-\omega+\omega^{٢})^{٣}$

[$س^{٢}+١٦س+٦٤=٠$]

■ (٢٨) : حلل $س^{٣}+ص^{٣}$ إلى ثلاثة عوامل من الدرجة الأولى في س ، ص بدلالة ω

[$(س+ص)(س+\omega ص)(س+\omega^{٢}ص)$]

■ (٢٩) : اثبت أن : $١+\omega^{ن}+\omega^{٢ن}=$ صفر أ ، ٣ حيث $ن\in ط$

مسائل عامة على الأعداد المركبة

■ (١) : اثبت أن : $(\omega ت + \omega^2 ت + 1)^4 (1 + \frac{1}{\omega})^3 = 4$

■ (٢) : اثبت أن : $\frac{(1+ت)^2}{(1+ت)^4} + \frac{(1+\omega^2)^2}{(1-ت)^4} = \frac{1}{4}$

■ (٣) : إذا كان : س + ت ص = $\frac{3+ت}{1+ت} - (\sqrt{1+\omega} - \sqrt{1+\omega^2})^2$ أوجد قيم س ، ص الحقيقية [٣ ، -١]

■ (٤) : اثبت أن جذري المعادلة : $ع^2 - (2 - ت)\, ع - ت = 0$ هما $(1 + \omega ت)$ ، $(1 + \omega^2 ت)$

■ (٥) : اثبت باستخدام نظرية ديموافر أن : $(\sqrt{3} + ت)^{12} + (\sqrt{3} - ت)^{12} = 2^{13}$

■ (٦) : إذا كانت ع = $\frac{(1-ت)^{18}}{(\sqrt{3}ت+1)^9} + \frac{(1+ت)^{12}}{(\sqrt{3}ت-1)^6}$ ، اســتخدم نظرية ديموافر لإيجاد كل من ع ، $\sqrt{ع}$ بالصورة المثلثية.

■ (٧) : إذا كانت ع = $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\, ت)$ اكتب كلاً من ع ، ١ + ع بالصورة المثلثية

ثم اثبت أن $(1 + ع)^8 = 81\, ع^4$

■ (٨) : بفرض أن ع = ٢ω حيث ω هو أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أوجد بالصورة المثلثية

كلاً من ع ، -ع ، ع| ، ١/ع ، ١/ع| ، $\sqrt{ع}$

■ (٩) : اثبت أن أ) $\sqrt{1+\omega^2} = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3} - ت)$

ب) $(1+\omega)^ن = جتا\, \frac{ن ط}{3} + ت\, جا\, \frac{ن ط}{3}$ حيث ن ∈ ص+

■ (١٠) : اثبت أن $(1 + جتا\, \frac{ط}{3} + ت\, جا\, \frac{ط}{3})^6 = -27$

■ (١١) : باستخدام مفكوك $(1 + ت)^{10}$ بذات الحدين ونظرية ديموافر اثبت أن :

(أ) $1 - {}^{10}ق_2 + {}^{10}ق_4 - {}^{10}ق_6 + {}^{10}ق_8 - {}^{10}ق_{10} =$ صفر

(ب) ${}^{10}ق_1 - {}^{10}ق_3 + {}^{10}ق_5 - {}^{10}ق_7 + {}^{10}ق_9 = 32$

■ (١٢) : أوجد المقياس والسعة الاساسية للعدد ع = $((2\omega^2 + ت)^8 - 8\, (3\omega^2 - 2\omega)$

$(\omega^2 2 + ت)^7 + \frac{8\times7}{2\times1}(3ت^2 - 2\omega)^2 (\omega^2 2 + ت)^6 - \cdots + (3ت^2 - 2\omega)^8$ [١٦ ، صفر]

■ (١٣) : أوجد مجموعة حل المعادلة : $(٢ع + ١)^{٦} - ٢\,(٢ع + ١)^{٣} + ١ = ٠$ في ك

[صفر ، $\frac{١}{٢}\,(\omega - ١)$ ، $\frac{١}{٢}\,(\omega^{٢} - ١)$]

■ (١٤) : اثبت أن : $\left(\frac{١ + جاهـ + ت جتاهـ}{١ + جاهـ - ت جتاهـ}\right)^{٨} =$ جتا ٨ هـ - ت جا ٨ هـ

■ (١٥) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

(جتا هـ + ت جا هـ) (جتا ٢ هـ + ت جا ٢ هـ) .... (جتا ١٥ هـ + ت جا ١٥ هـ) = ١

■ (١٦) : اثبت أن : $(١ + ت)^{ن} + (١ - ت)^{ن} = ٢^{\frac{ن}{٢} + ١}$ جتا $\frac{ن ط}{٤}$

■ (١٧) : إذا كانت ع = $(ظتا\,\theta + ت)^{٤}$ ، اثبت أن : ع + $\bar{ع}$ = ٢ جتا^{٤} θ قتا^{٤} θ

■ (١٨) : إذا كانت ع عدد مركب ، |ع| = ١ ، سع (ع) = θ اثبت أن : $\frac{١ - ع}{١ + ع} = ت^{٣}$ ظا $\frac{\theta}{٢}$

■ (١٩) : إذا كانت $ع_{١} = ٢ت^{٤} + ٣\omega^{٧} + ٥\omega^{١١}$ ، $ع_{٢} = ٢\omega^{٥} + ٣ت^{٨} + ٥\omega^{١٣}$ ،

$ع_{٣} = ٢\omega^{٤} + ٣\omega^{٨} + ٥ت^{١٢}$ اثبت أن :

أ) $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{ع_{٣}}{ع_{٢}} = \omega^{٢}$ ب) $ع_{١}^{٤} + ع_{٢}^{٤} + ع_{٣}^{٤} =$ صفر

المجموعة الثالثة:

تمارين (٢-١) من الكتاب المدرسي

أكمل ما يلى :

(١) العدد ع = ٣ - ٤ت يمثل على شكل أرجاند بالنقطة م حيث م = (... ، ...).

(٢) إذا كانت نقطة م تمثل العدد ع على مستوى أرجاند ، ب تمثل العدد $\bar{ع}$ على مستوى أرجاند فإن ب صورة م بالانعكاس فى ......

(٣) مقياس العدد المركب ع = - ٥ ت يساوى ......

(٤) إذا كان $ع = \frac{٢ - ت}{٢ + ت}$ فإن |ع| = ...

(٥) إذا كانت θ هى السعة الأساسية للعدد المركب ع فإن سعة $\bar{ع}$ هى ....

(٦) إذا كان $ع = \frac{١}{\bar{ع}}$ فإن $|ع| = ...$

(٧) الصورة الأسية للعدد - ١ + ت هى ......

(٨) إذا كان $١ + \sqrt{٣}ت$ فإن السعة الأساسية للعدد $(١ + \sqrt{٣}ت)^{٨}$ هى ......

(٩) الصورة المثلثية للعدد $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت$ هى ......

(١٠) إذا كانت سعة العدد المركب هى θ فإن سعة العدد المركب ٢ ع هى ......

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١١) إذا كان : $ع = \sqrt{٢}(جا ٣ + ت جتا ٣)$ فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(١٢) إذا كان $ع = (١ + \sqrt{٣})^{ن}$ وكان $|ع| = ٨$ فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى ......

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

(١٣) إذا كان : $ع_١ = ل_١(جتا\theta_١ + ت جا\theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢(جتا\theta_٢ + ت جا\theta_٢)$ وكان $ع_١ + ع_٢ = \pi$ فإن $ع_١ ع_٢ = ...$

(أ) $ل_١ ل_٢$ (ب) $- ل_١ ل_٢$ (جـ) $ل_١ ل_٢ ت$ (د) $- ل_١ ل_٢ ت$

(١٤) سعة العدد المركب ع = - ٣ تساوى ......

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(١٥) إذا كان $ع = -١ + \sqrt{٣}ت$ فإن $|ع| = ...$

(أ) $-١ - \sqrt{٣}ت$ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ (د) - ٢

(١٦) إذا كان $ع_١ = - ١ - ت$ فإن الصورة الأسية للعدد ع هى ......

(أ) $هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$ (ب) $هـ^{\frac{٥\pi}{٤}ت}$ (جـ) $\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{-٣\pi}{٤}ت}$ (د) $\sqrt{٢}\,هـ^{٢٢٥°ت}$

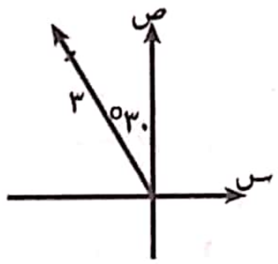
(١٧) إذا كان $ع_١ = ٢ + ٢\sqrt{٣}ت$ ، $ع_٢ = -٣ - ٣\sqrt{٣}ت$ فإن سعة العدد $ع_١ + ع_٢ =$ ......

(أ) ٦٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٣٠٠°

(١٨) إذا كانت $س + صت = \frac{أ + بت}{أ - بت}$ فإن $س^٢ + ص^٢ =$ ......

(أ) $أ^٢ + ب^٢$ (ب) $أ^٢ - ب^٢$ (جـ) ٢ أ ب (د) ١

(١٩) الشكل المقابل يمثل العدد المركب ......



(أ) ٣ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠) (ب) ٣ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

(جـ) ٣ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠) (جـ) ٣ (جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠)

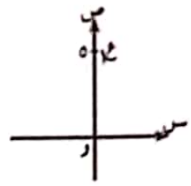
(٢٠) إذا كان ع عدد مركب سعته الأساسية θ فإن سعة $\frac{١}{ع}$ هى ......

(أ) θ (ب) $-\theta$ (جـ) $\pi - \theta$ (د) $-\pi + \theta$

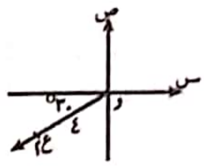
أجب عن الأسئلة الآتية :

(٢١) اكتب كل من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية :

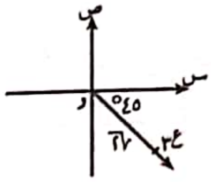
(أ)



(ب)



(جـ)



(د) $ع_٤ = -٣ + ٤$ ت

(هـ) $ع_٥ = ٤$ (جتا ٤٠° − ت جا ٤٠°)

(٢٢) أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد المركبة الآتية :

(أ) $ع_١ = -١ + ت$ (ب) $ع_٢ = \frac{٤}{\sqrt{٣} - ت}$

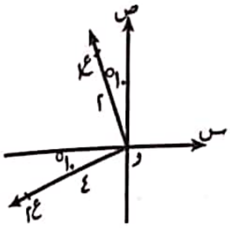
(جـ) $ع_٣ = -٢$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥) (د) $ع_٤ = ١ + ت$ ظا ٢

(٢٣) إذا كان : $ع_١$ = جتا ١١٤ + ت جا ٦٦ ، $ع_٢$ = جتا ٤٢ + ت جا ١٣٨ ، $ع_٣$ = جا ٢٤ + ت جا ١١٤

أوجد الصورة الجبرية للعدد $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$

(٢٤) إذا كان $ع_١ = ٢(\text{جتا } ٧٥^\circ + \text{ت جا } ٧٥^\circ)$ ، $ع_٢ = ٤ (\text{جتا } ١٥ + \text{ت جا } ١٥)$ أوجد على الصورة الأسية العدد $ع_١ ع_٢$ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$

(٢٥) فى الشكل المقابل أوجد على الصورة الأسية العدد $\frac{ع_٢}{ع_١}$



(٢٦) اكتب كل من الأعداد الآتية بالصورة الجبرية :

(أ) $ع_١ = هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (ب) $٢هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$ (جـ) $٣هـ^{-\frac{\pi}{٦}ت}$

(٢٧) إذا كان $ع = ٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٣}\right)$ اثبت أن : $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$

(٢٨) إذا كان $ع = \sqrt{٣} + ت$ أوجد بالصورة الجبرية $ع^٦$

(٢٩) إذا كان $ع = \frac{(أ + ب) + ت(أ - ب)}{(أ - ب) - ت(أ + ب)}$ فأوجد $|ع|$

(٣٠) تفكير إبداعى : إذا كان $ع_١ = \text{جتا } ٧٥ + \text{ت جا } ٧٥$ ، $ع_٢ = \text{جتا } ١٥ + \text{ت جا } ١٥$ أوجد بالصورة المثلثية للعدد $ع_١ + ع_٢$

(٣١) إذا كان سعة $ع_١ = \frac{\pi}{٣}$ وسعة $ع_٢ = \frac{٣\pi}{٤}$ وسعة $ع_٣ = \frac{\pi}{٦}$ أوجد :

(أ) سعة $\left(ع_١^٣ ع_٢^٢\right)$ (ب) سعة $(٢ ع_١ . ع_٢)$

(جـ) سعة $\left(\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}\right)$ (د) سعة $\left(ع_٣^٦\right)$

(٣٢) تفكير إبداعى اثبت أن : $\text{جتا}\theta = \frac{١}{٢}\left(هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}\right)$ ، $\text{جا}^٣\theta = \frac{-ت}{٢}\left(هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}\right)$

تمارين (٢-٢) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة :

(١) باستخدام نظرية ديموافر اثبت صحة المتطابقات الآتية :

$$(\text{أ})\quad \text{جا}\,5\theta = 16\,\text{جا}^{5}\theta - 20\,\text{جا}^{3}\theta + 5\,\text{جا}\,\theta$$

$$(\text{ب})\quad \text{جتا}\,4\theta = 8\,\text{جتا}^{4}\theta - 8\,\text{جتا}^{2}\theta + 1$$

(٢) أوجد في ك مجموعة حل كل من المعادلات الآتية. اكتب الجذور على صورة س + ص ت.

(أ) $\text{ع}^{4} = 16$ (ب) $\text{ع}^{3} + 8 = 0$ (جـ) $\text{ع}^{3} + 8\,\text{ت} = 0$

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلة $\text{ع}^{5} + 243 = 0$ حيث ع ∋ ك.

(٤) أوجد مجموعة حل المعادلة $\text{ع}^{4} = 2 + 2\sqrt{3}\,\text{ت}$. اكتب الحل على الصورة الأسية.

(٥) أوجد الجذور التربيعية لكل من : (أ) $2 - 2\sqrt{3}\,\text{ت}$ (ب) ١ - ت

(جـ) ٨ ت (د) ٣ + ٤ ت (هـ) ٥ - ١٢ ت

(٦) أوجد الجذور التكعيبية للعدد ٨ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

(٧) أوجد الجذور الرابعة للعد - ١ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

(٨) اذا كان : $\dfrac{7 - 11\,\text{ت}}{4 + \text{ت}} = \text{أ} + \text{ب}\,\text{ت}$ اوجد قيم المقدار $\left(\sqrt{-\text{ب}^{2} + \text{أ}\text{ت}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(٩) ضع العدد $2\sqrt{2}$ (١ + ت) على الصورة المثلثية ثم اوجد جذورة التربيعية على الصورة الاسية

(١٠) إذا كان ع = ٨ - ٦ ت أوجد $\text{ع}^{\frac{3}{2}}$ على الصورة الجبرية.

(١١) تفكير إبداعي : اثبت أن : $\text{جتا}^{4}\theta = \dfrac{1}{8}\left(\text{جتا}\,4\theta - 4\,\text{جتا}\,2\theta + 3\right)$

تمارين (٢-٣) من الكتاب المدرسي

إذا كان ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

أكمل ما يلى :

(١) $\left(٢+٥\omega+٢\omega^{٢}\right)^{٢}=....$

(٢) $\left(\omega-\omega^{٢}\right)^{٤}=....$

(٣) $\left(\omega^{٢}+\frac{١}{\omega^{٢}}\right)^{٢}\left(\omega+\frac{١}{\omega}\right)^{٢}=....$

(٤) إذا كان $\text{س}=\frac{-١+\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ فإن $\text{س}^{٨}+\text{س}^{٤}=....$

(٥) $\left(\frac{١}{١+\omega}\right)\left(١+\omega-\frac{٣}{\omega}\right)=....$

(٦) $١+٣\omega+٣\omega^{٢}=....$

(٧) إذا كان : $\text{أ}=٢\omega-٣\omega^{٢}$ ، $\text{ب}=٣+٥\omega^{٢}$ فإن $\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}=....$

(٨) $\sum_{\text{ر}=١}^{٥}\omega^{\text{ر}}=.........$

اختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٩) مرافق العدد ω = ...

(أ) ω (ب) $\omega^{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{\omega}$

(١٠) $\left(\omega^{٢}+\frac{١}{\omega}\right)\left(١+\frac{١}{\omega^{٢}}\right)^{٢}$

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) − ٣ (د) − ٥

(١١) $\left(\text{أ}+\text{ب}\,\omega+\text{أ}\,\omega^{٢}\right)\left(\text{أ}+\text{ب}\,\omega^{٢}+\text{أ}\,\omega^{٤}\right)=......$

(أ) ١ (ب) أ − ب (جـ) $(\text{أ}-\text{ب})^{٢}$ (د) $\text{ب}^{٢}-\text{أ}^{٢}$

(١٢) $\left(1+2\omega^{5}+\frac{1}{\omega^{2}}\right)\left(1+2\omega+\frac{1}{\omega^{4}}\right)=$ ......

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) - ١ (د) ٢

(١٣) $\frac{1-d\omega}{1\omega^{2}-d}-\omega^{2}=$ ....

(أ) ٣ ت (ب) $\pm\sqrt{3}$ ت (جـ) - ٣ (د) ٣

(١٤) إذا كان $(1+\omega)^{7}=$ أ + ب ω حيث أ ، ب أعداد حقيقية فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٠ ، - ١) (ب) (١ ، ١) (جـ) (٠ ، ١) (د) (١ ، - ١)

(١٥) $(1+\omega)^{n}=(1+\omega^{2})^{n}$ فإن أقل قيمة لـ n الصحيحة هى ......

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٦) $1+\omega+\omega^{2}+\omega^{3}+......+\omega^{100}=$ ......

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) ω^{2}

(١٧) إذا كان ع $=\omega^{س}$ فإن $|ع|=$ ....

(أ) ١ (ب) ω (جـ) س (د) ω^{2}

(١٨) $\sum_{ر=1}^{6}\left(1+\omega^{ر}\right)=$ ......

(أ) صفر (ب) ٦ (جـ) ١ (د) ١ + ω

(١٩) اثبت صحة المتطابقات الآتية :

(أ) $\left(1-\omega+\omega^{2}\right)\left(1-\omega^{2}+\omega^{4}\right)\left(1-\omega^{4}+\omega^{8}\right)\left(1-\omega^{8}+\omega^{16}\right)=2^{4}$

(ب) $\left(\frac{\omega}{1+2\omega}\right)^{2}+\left(\frac{1+2\omega^{2}}{\omega^{2}}\right)^{2}=\frac{-10}{3}\omega^{2}$

(جـ) $\left[\frac{1}{1+\omega ت}-\frac{\omega+ت}{1+\omega^{2}ت}\right]^{8}=16$

(د) $\left[\dfrac{٥-٣\omega^{٢}}{٥\omega-٣}-\dfrac{٢-٧\omega}{٢\omega^{٢}-٧}\right]^{٢}=-٣$

(هـ) $\left(١+\omega^{٢}\right)^{٨}=\omega^{٢}$

(و) $\left(١-\omega^{٢}+\omega^{٤}\right)^{٢}+\left(١+\omega^{٢}+\omega^{٤}\right)^{٢}=٤\omega$

(٢٠) أوجد قيمة كل مما يأتى :

(أ) $٥+٣\omega+٣\omega^{٢}$

(ب) $\left(١+\omega+٢\omega^{٢}\right)^{٢}+\left(١+٢\omega+\omega^{٢}\right)^{٢}$

(جـ) $\dfrac{\omega^{٢}(\omega-١)(\omega^{٢}-١)}{(٢\omega+١)(\omega^{٢}+٢)}$

(د) $\left[\dfrac{١}{١+٣\omega^{٢}}-\dfrac{١}{١+٣\omega}\right]^{٢}$

(هـ) $\left(١+\dfrac{١}{\omega}+ت\right)\left(١+\dfrac{١}{\omega^{٢}}+ت\right)$

(٢١) إذا كان : $س=\dfrac{-١+\sqrt{٣}\,ت}{٢}$ اثبت أن :

$١+٦س^{٥}+١٥س^{٤}+٢٠س^{٣}+١٥س^{٢}+٦س=٠$

(٢٢) إذا كان : $\dfrac{١}{١+\omega}$ ، $\dfrac{١}{١+\omega^{٢}}$ هما جذرا معادلة تربيعية فأوجد المعادلة

(٢٣) إذا كان: $ع=٢(\omega+ت)(\omega^{٢}+ت)$ أوجد الصـــور المختلفة للعدد ع ثم أوجد الجذران التربيعيان للعدد ع فى الصورة المثلثية.

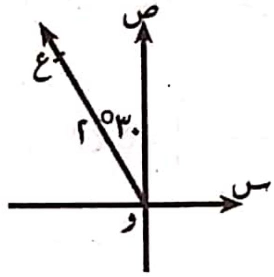
(٢٤) تفكير إبداعى : أوجد قيم ن التى تجعل $\left(٢+٥\omega+٢\omega^{٢}\right)^{ن}=\left(٢+٢\omega+٥\omega^{٢}\right)^{ن}$

(٢٥) أوجد : (أ) $\sum_{ر=٠}^{١٠}\omega^{ر}$ (ب) $\sum_{ر=٠}^{١٠}\left(١+\omega^{ر}+\omega^{٢ر}\right)$

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة الثانية

أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان : $ع = \frac{٢+ت}{٢-ت}$ فإن $|ع| = ...$



(٢) الصورة المثلثية للعدد ع الممثل على شكل أرجاند المقابل هى:

(٣) إذا كانت $ع = جا\theta - ت جتا\theta$ فإن سعة ع تساوى ....

(٤) مرافق العدد ت + $\omega^٢$ هو ......

(٥) $١ + ٢\omega + ٢\omega^٢ = ...$

(٦) إذا كانت : $ع_١$ ، $ع_٢$ ، ...... ، $ع_٦$ تمثل الجذور السداسية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند فإن

$\left(ع_ر \hat{و} ع_{ر+١}\right) = ...$ حيث $١ \leq ر \leq ٥$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٧) إذا كانت السعة الأساسية للعدد $ع_١$ هى $\theta_١$ والسعة الأساسية للعدد $ع_٢$ هى $\theta_٢$ فإن السعة الأساسية للعدد $ع_١ ع_٢$ هى:

(أ) $\theta_١ + \theta_٢$ (ب) $\theta_١ \times \theta_٢$ (جـ) $\theta_١ - \theta_٢$ (د) $\pi - (\theta_١ + \theta_٢)$

(٨) أى مما يأتى تمثل الصورة الجبرية للعدد : $٢\left(جتا\frac{٢\pi}{٣} + ت جا\frac{٢\pi}{٣}\right)$

(أ) $-\sqrt{٣} + ت$ (ب) $-١ + \sqrt{٣}ت$ (جـ) $-\sqrt{٢} + \sqrt{٢}ت$ (د) $-\sqrt{٣} - \sqrt{٣}ت$

(٩) إذا كانت النقطة $أ = \left(\sqrt{٣} ، -١\right)$ تمثل العدد المركب ع على مستوى أرجاند فإن مقياس وسعة العدد ع هى ......

(أ) $\left(٢ ، \frac{\pi}{٦}\right)$ (ب) $\left(٢ ، \frac{٥\pi}{٦}\right)$ (جـ) $\left(\sqrt{٢} ، \frac{-٢\pi}{٦}\right)$ (د) $\left(٢ ، -\frac{\pi}{٦}\right)$

(١٠) الجزء الحقيقى للعدد المركب الذي مقياسه $\sqrt{٢}$ وسعته $\frac{\pi}{٦}$ هو ......

(أ) $-\sqrt{٣}$ (ب) $-\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ (جـ) $-\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ (د) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

(١١) مرافق العدد $١ + \omega$ هو :

(أ) $١ - \omega$ (ب) $- \omega^٢$ (جـ) $١ + \omega^٢$ (د) $١ - \omega^٢$

(١٢) الجذور الخماسية للواحد الصحيح تمثل على مستوى أرجاند ......

(أ) مثلث (ب) مربع (جـ) خماسى منتظم (د) سداسى منتظم

(١٣) إذا كان أ عدد حقيقى فإن مرافق العدد $\frac{أ^{٣} + ت}{أ^{٢} + أت - ١}$ هو ....

(١٤) إذا كان ع $= \left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right)^{ن}$ وكان ع = ١ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ١ (د) صفر

(١٥) إذا كان $|ع| = |ع - ٢|$ فإن الجزء الحقيقى للعدد ع يساوى ......

(أ) ١ (ب) - ١ (جـ) - ٢ (د) ٢

(١٦) $هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت} = ...$

(أ) $هـ^{٢ظات}$ (ب) ٢جتاθ (جـ) ٢جاθ (د) $هـ^{-٢\theta ت}$

(١٧) إذا كان : $|ع| = ١٠$ فإن ع $\bar{ع}$ يساوى ......

(أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١ (د) - ١٠٠

(١٨) عبر عن كل مما يأتى بالصورة : س + ص ت

(أ) $\left(جتا\frac{٣\pi}{١١} + ت جا\frac{٣\pi}{١١}\right)\left(جتا\frac{٨\pi}{١١} + ت جا\frac{٨\pi}{١١}\right)$

(ب) $٣\left(جتا\frac{\pi}{١٢} + ت جا\frac{\pi}{١٢}\right) \times \sqrt{٢}\left(جتا\frac{\pi}{٣} - ت جا\frac{\pi}{٣}\right)$

(جـ) $\frac{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{\pi}{٢} + ت جا\frac{\pi}{٢}\right)}{\frac{١}{٢}\left(جتا\frac{\pi}{٤} + ت جا\frac{\pi}{٤}\right)}$

(١٩) إذا كان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ عددين مركبين حيث $ع_{١} = -٩ + ٣\sqrt{٣}$ ت ، $|ع_{٢}| = \sqrt{٣}$ ، سعة $ع_{٢} = \frac{٧\pi}{١٢}$ أوجد كل من الأعداد المركبة الآتية على الصورة : ل$\left(جتا\theta + ت جا\theta\right)$ حيث $-\pi > \theta > \pi$

(أ) $ع_{١}$ (ب) $ع_{٢}$ (جـ) $ع_{١}$ $ع_{٢}$ (د) $ع_{١} \div ع_{٢}$

(٢٠) عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة الأسية :

(أ) $ع_١ = ٧$ (ب) $ع_٢ = -٥ ت$ (جـ) $ع_٣ = \frac{١}{٢}(جتا ٦ + ت جا ٦)$

(د) $ع_٤ = \frac{٤}{١ + \sqrt{٣} ت}$ (هـ) $ع_٥ = -٤\left(جتا \frac{٧\pi}{٦} + ت جا \frac{٧\pi}{٦}\right)$

(٢١) إذا كانت $\theta \in]-\pi ، \pi[$ أوجد مقياس وسعة العدد $ع = ١ + جتا \theta + ت جا \theta$

(٢٢) إذا كان : $ع = \frac{(١+ت)(٢-ت)}{(١-ت)(٣+ت)}$ فأوجد $|ع|$

(٢٣) تفكير إبداعى : استخدم الأعداد المركبة فى إثبات صحة كل من المتطابقات الآتية :

(أ) $ظا^{-١} \sqrt{٣} + ظا^{-١}(١) = \frac{٧\pi}{١٢}$ (ب) $ظا^{-١} \sqrt{٣} + ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = \frac{\pi}{٢}$

اختبارات كتاب المدرسة التراكمية على الوحدة الثانية

(١) حدد الربع الذى تقع فيه الزاوية θ فى كل مما يأتى :

(أ) جتا $\theta > ٠$ ، جا $\theta > ٠$ (ب) جتا $\theta < ٠$ ، جا $\theta < ٠$ (جـ) جتا $\theta > ٠$ ، جا $\theta < ٠$

(٢) أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة : $س^٢ - ٣ س + ١ =$ صفر

(٣) أوجد مقياس وسعة كل من الأعداد المركبة الآتية :

(أ) $ع_١ = \sqrt{٣} + ت$ (ب) $ع_٢ = -١ + ت$ (جـ) $ع_٣ = ٤ت$

(ء) $ع_٤ = -٥$ (هـ) $ع_٥ = ٣ - ٤ت$.

(٤) أوجد فى أبسط صورة $ع = \frac{١ + ٤ت + ت^٢}{٢ - ت - ٢ت^٢ - ت^٣}$ ثم أوجد الجذران التربيعيان للعدد ع فى الصورة المثلثية.

(٥) إذا كان ع عدد مركب أوجد مجموعة حل المعادلة : $٢ ع - ٣ \bar{ع} = ٥ + ١٠ ت$

(٦) إذا كان $ع = ٤ + ٤\sqrt{٣}ت$ أوجد الصورة الأسية للعدد ع ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع ومثلها على شكل أرجاند.

(٧) أوجد الصور المختلفة للعدد $ع = \frac{-\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت}$ ثم أوجد الجذران التربيعيان للعدد ع ومثل الجذرين على شكل أرجاند.

(٨) إذا كان $ع_١ = \sqrt{٣}\left(جتا\frac{\pi}{٣} - ت جا\frac{\pi}{٣}\right)$ ، $ع_٢ = ٢(جا ٣٠ + ت جتا ٣٠)$ أوجد $ع_١ ع_٢$ فى الصورة الأسية ثم أوجد الصورة المثلثية للعدد $ع = (ع_١ ع_٢)^{\frac{١}{٤}}$.

(٩) ضع العدد المركب $ع = \frac{-٤}{١ - \sqrt{٣}ت}$ فى الصورة المثلثية والأسية ثم :

(أ) اثبت أن $ع^٦$ = عدد حقيقى. (ب) اثبت أن $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}هـ^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$.

(١٠) إذا كان $ع = هـ^{\theta ت}$ أوجد المقياس والسعة للعدد $\frac{١ + ع}{١ - ع}$.

(١١) إذا كان $ع = \frac{-١ + \sqrt{٣}ت}{٢}$ وكان $ع_١ = \frac{١ + ع}{١ - ع}$ أوجد $ع_١$ وجذراه التربيعيان فى الصورة المثلثية.

(١٢) اثبت أن :

$$(أ)\quad \left(١ - \frac{٢}{\omega^٢} + \omega^٢\right)\left(١ + \omega - \frac{٥}{\omega}\right) = ١٨$$

$$(ب)\quad \frac{٣ + ٥\omega + ٣\omega^٢}{١ - ٢\omega - ٤\omega^٢} + \frac{٣ + ٥\omega^٢ + ٣\omega}{١ - ٢\omega^٢ - ٤\omega} = \frac{-٢}{١٩}$$

المجموعة الرابعة:

تمارين مختارة من إمتحانات الثانوية العامة لسنوات سابقة

فى جميع المسائل الآتية : $ت^٢ = -١$ ، ١ ، ω ، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

■ (١) مصر٩٨:

(أ) إذا كانت $ع = \left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^٥$ ، $ت^٢ = -١$ ضع العدد ع على الصورة المثلثية ثم أوجد

الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة الأسية [$هـ^{\frac{ت\pi}{٤}}$ ، $هـ^{\frac{٥ت\pi}{٤}}$]

(ب) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، $ت^٢ = -١$

فاثبت أن : $\frac{١ - \omega ت}{\omega + ت} - \frac{ت}{\omega - ت} + \omega^٢ =$ صفر.

■ (٢) مصر٩٨:

(أ) إذا كان $\text{ع} = \frac{٢}{\sqrt{٣} + \text{ت}}$ ، $\text{ت}^{٢} = -١$ ضع العدد ع على الصورة المثلثية ومن ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع فى الصورة الأسبق.. [$\text{هـ}^{\frac{١١ط\text{ت}}{١٨}}$ ، $\text{هـ}^{\frac{٢٣ط\text{ت}}{١٨}}$ ، $\text{هـ}^{\frac{٣٥ط\text{ت}}{١٨}}$]

(ب) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح اثبت أن:

$$\frac{٢+\omega}{٢\omega-\omega^{٢}} + \frac{٢+\omega^{٢}}{٢\omega^{٢}-\omega} = \frac{٣}{٧}$$

■ (٣) مصر ٩٩:

(أ) إذا كانت: $\text{ع}_{١} = ٤\left(\text{جتا}\frac{٥\pi}{٦} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{٥\pi}{٦}\right)$ ، $\text{ع}_{٢} = \left(\text{جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{٢}\right)$ ، $\text{ت}^{٢} = -١$

ضع العدد $\text{ع}_{١}\text{ع}_{٢}$ على الصورة الجبرية وأوجد الجذور التربيعية للعدد $\text{ع}_{١}\text{ع}_{٢}$ فى الصورة الأسية

[$-٢ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$ ، $٢\text{هـ}^{\frac{٢\pi\text{ت}}{٣}}$ ، $٢\text{هـ}^{\frac{٥\pi\text{ت}}{٣}}$]

(ب) إذا كانت $\text{أ} = ٢\left(٤ + ٣\omega^{٢}\right)$ ، $\text{ب} = ٢\omega\left(١ + \frac{٢}{١+\omega}\right)$ أوجد قيمة $(\text{أ} + \text{ب})^{٢}$. [٢١٦]

■ (٤) مصر ٩٩ :

(أ) إذا كانت $\text{ع} = \frac{٢(١+\text{ت})}{\text{ت}-١}$ ، $\text{ت}^{٢} = -١$ ضع العدد ع على الصورة المثلثية ثم أوجد جذرية التربيعيين فى الصورة الأسية. [$\text{ع} = ٢\left(\text{جتا}\frac{٣ط}{٢} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{٣ط}{٢}\right)$ ، $\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٣}{٤}ط\text{ت}}$ ، $\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٧}{٤}ط\text{ت}}$]

(ب) اثبت أن : $\left(١ - \frac{\text{ت}}{\omega}\right)\left(١ - \frac{\text{ت}}{\omega^{٢}}\right) = \text{ت}$

■ (٥) مصر ٢٠٠٠ :

(أ) اثبت أن: $\left(١ + \frac{١}{\omega} + \text{ت}\right)\left(١ + \frac{١}{\omega^{٢}} + \text{ت}\right) = \text{ت}$

(ب) ضع العدد $\text{ع} = \frac{\sqrt{٣} + \text{ت}}{\sqrt{٣} - \text{ت}}$ حيث $\text{ت}^{٢} = -١$ فى الصورة الأسية ثم استنتج الجذور التكعيبية للعدد ع

[$\text{ع} = \text{هـ}^{\frac{ط\text{ت}}{٣}}$ ، $\text{هـ}^{\frac{ط\text{ت}}{٩}}$ ، $\text{هـ}^{\frac{٧ط\text{ت}}{٩}}$ ، $\text{هـ}^{\frac{١٣ط\text{ت}}{٩}}$]

■ (٦) مصر ٢٠٠٠ :

(أ) ضع كلاً من $ع_1 = 2 + 2\sqrt{3}ت$ ، $ع_2 = \sqrt{3} + ت$ في الصورة الأسية ومن ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $ع_1$ ، $ع_2$.

[$ع_1 = 4ه^{\frac{طت}{6}}$ ، $ع_2 = 2ه^{\frac{طت}{6}}$ ، $2ه^{\frac{طت}{6}}$ ، $2ه^{\frac{5طت}{6}}$ ، $2ه^{\frac{3طت}{2}}$]

(ب) اثبت أن: $\left(\frac{\omega^2}{2\omega+1}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2\omega^2+1}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

■ (٧) مصر ٢٠٠١ :

(أ) ضع العدد $ع_1 = -1 + \sqrt{3}ت$ على الصورة الأسية وإذا كان $ع_1 ع_2 = 8ه^{\frac{11طت}{3}}$. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $ع_2$ في الصورة المثلثية

[$2\left(جتا\frac{ط}{2} + ت جا\frac{ط}{2}\right)$ ، $2\left(جتا\frac{3ط}{2} + ت جا\frac{3ط}{2}\right)$]

(ب) اثبت أن: $\left(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2}\right)\left(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4}\right) = 1$.

■ (٨) مصر ٢٠٠١ :

(أ) ضع العدد $ع = \frac{\sqrt{2}ت}{1+ت}$ في الصورة الأسية ثم استنتج الجذور التكعيبية للعدد ع

[$ع = ه^{\frac{طت}{4}}$ ، $ه^{\frac{طت}{12}}$ ، $ه^{\frac{3طت}{4}}$ ، $ه^{\frac{17طت}{12}}$]

(ب) اثبت أن: $\left(\frac{1}{2+3\omega} - \frac{1}{2+3\omega^2}\right)^2 = -\frac{27}{49}$.

■ (٩) مصر ٢٠٠٢ : ضع العدد $ع = \frac{-8}{1+\sqrt{3}ت}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة الأسية

[$4\left(جتا\frac{2ط}{3} + ت جا\frac{2ط}{3}\right)$ ، $2ه^{\frac{طت}{3}}$ ، $2ه^{\frac{4طت}{3}}$]

■ (١٠) مصر ٢٠٠٢ :

(أ) بوضع $ي = \left(\frac{ط}{2} - 2\theta\right)$ أو بأية طريقة أخرى اثبت أن:

$$\left(\frac{1+جاي+ت جتاي}{1+جاي-ت جتاي}\right)^ن = جتان\left(\frac{ط}{2}-ي\right) + ت جان\left(\frac{ط}{2}-ي\right)$$

(ب) اثبت أن $\frac{2}{3}ت$ هو أحد الجذرين التربيعيين للمقدار $\frac{1-3\omega-3\omega^2}{1+10\omega+10\omega^2}$.

■ (١١) مصر ٢٠٠٣ :

(م) إذا كان العدد ع $= \frac{-1 + \sqrt{3}\,ت}{2}$ وكان $ع_1 = \frac{1 - ع}{1 + ع}$ أوجد العدد $ع_1$ فى الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $ع_1$ فى الصورة الأسية

[$ع_1 = \sqrt{3}\left(جتا\frac{3ط}{2} + ت جا\frac{3ط}{2}\right)$ ، $\sqrt[4]{3}$ هـ$^{\frac{3ط ت}{4}}$ ، $\sqrt[4]{3}$ هـ$^{\frac{7ط ت}{4}}$]

(ب) أوجد قيمة المقدار $\left(\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right)^2$ [-٣]

■ (١٢) مصر ٢٠٠٣ : إذا كان: $ع_1 = -1 - \sqrt{3}\,ت$ ، $ع_2 = 1 + ت$ أوجد العدد ع $= \frac{ع_1}{ع_2}$ فى الصورة الأسية ثم اثبت أن: $ع^{12}$ = عدد حقيقى [$\sqrt{2}$ هـ$^{\frac{17ط ت}{12}}$ ، -٦٤]

■ (١٣) مصر ٢٠٠٤ :

(م) إذا كان: ع + ٢ = ت (ع - ٢) فأوجد العدد المركب ع على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة الأسية

[ع $= 2\left(جتا\frac{3ط}{2} + ت جا\frac{3ط}{2}\right)$ ، $\sqrt{2}$ هـ$^{\frac{3ط ت}{4}}$ ، $\sqrt{2}$ هـ$^{\frac{7ط ت}{4}}$]

(ب) إذا كانت: ل = م + ب ، م = م ω + ب ω^2 ، ن = م ω^2 + ب ω س حيث م ، ب ∈ ح

أوجد قيمة $\frac{ل م ن}{م^3 + ب^3}$ [١]

■ (١٤) مصر ٢٠٠٤ : إذا كان ع $= \frac{\sqrt{3} - ت}{\sqrt{3} + ت}$ أوجد:

أولاً : المقياس والسعة الأساسية للعدد المركب ع [١ ، $-\frac{\pi}{3}$]

ثانياً : الجذور التكعيبية للعدد المركب ع فى الصورة الأسية. [هـ$^{\frac{5\pi ت}{9}}$ ، هـ$^{\frac{11\pi ت}{9}}$ ، هـ$^{\frac{17\pi ت}{9}}$]

■ (١٥) مصر ٢٠٠٥ :

(أ) إذا كان $ع_١ =$ جتا $\frac{٧ط}{٤}$ − ت جا $\frac{٧ط}{٤}$ ، $ع_٢ = -١ + ت$ أوجد العدد $ع = ع_١^٢ \, ع_٢^٦$ على الصورة الأسية.

[$٨ هـ^{ط ت}$]

(ب) أوجد القيمة العددية للمقدار: $\frac{أ + ب\omega}{أ\omega^٢ + ب} + \frac{جـ\omega^٢ + د}{جـ + د\omega}$ [−١]

■ (١٦) مصر ٢٠٠٥ :

(أ) ضع العدد $ع = \frac{٥ - ٣\sqrt{٣}\,ت}{١ + ٢\sqrt{٣}\,ت}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد جذرية التربيعيين فى الصورة الأسية

[$\left(ع = ٢ \left(جتا \frac{٤ط}{٣} + ت جا \frac{٤ط}{٣}\right)\right)$ ، $\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٢ط ت}{٣}}$ ، $\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٥ط ت}{٣}}$]

(ب) إذا كان: $\frac{١ + ١٠\omega + ١٠\omega^٢}{١ - ٣\omega - ٣\omega^٢} = \left(\frac{أ}{ب}\,ت\right)^٢$ أوجد قيمة العدد الحقيقي $\frac{أ}{ب}$ [$\pm \frac{٣}{٢}$]

■ (١٧) مصر ٢٠٠٦ :

(أ) إذا كان $ع_١ = ٤\left(جتا \frac{٥\pi}{٣} - ت جا \frac{٥\pi}{٣}\right)$ ، $ع_٢ = هـ^{\frac{\pi ت}{٢}}$ أوجد العدد $ع = \frac{ع_٢}{ع_١}$ فى الصورة المثلثية

[$\frac{١}{٤}\left(جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦}\right)$]

(ب) أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: $\left(٢ + \omega^٢ - \frac{٢}{\omega}\right)\left(٢ - \omega^٢ + \frac{٢}{\omega}\right) + \frac{١}{\omega^٢}$ [٤]

■ (١٨) مصر ٢٠٠٦ :

(أ) إذا كان: $ع =$ جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$ أوجد كلاً من : $ع_١ = ع - ١$ ، $ع_٢ = ع + ١$ ومن ثم برهن على أن العدد المركب $\frac{ع_٢}{ع_١}$ يكون عدداً تمثيلياً صرفاً.

(ب) إذا كانت $س = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ أوجد القيمة العددية للمقدار: $\omega^٨ + \omega^٤ + ٥$ [٤]

■ (١٩) مصر ٢٠٠٧ :

(أ) إذا كان $ع_١ = ٦\left(جتا\frac{٢ط}{٣} - ت\,جا\frac{٢ط}{٣}\right)$ ، $ع_٢ = ٢هـ^{\frac{٥ط ت}{٣}}$ أوجد العدد $ع = ع_١ \, ع_٢^{٢}$ فى الصورة المثلثية.

[$٢٤\left(جتا\frac{٢ط}{٣} + ت\,جا\frac{٢ط}{٣}\right)$]

(ب) أوجد المعادلة التربيعية فى س التى جذريها هما: $\left(\frac{\omega^{٢}}{١+٢\omega}\right)^{٢}$ ، $\left(\frac{\omega}{١+٢\omega^{٢}}\right)^{٢}$

[$٩\omega^{٢} - ٣\omega + ١ = ٠$]

■ (٢٠) مصر ٢٠٠٧ :

(أ) ضع العدد $\frac{٢\left(٥ - ٣\sqrt{٣}\,ت\right)}{١ + ٢\sqrt{٣}\,ت}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد جذرية التربيعين فى الصورة الأسية ومثلهما على شكل ارجاند.

[$٤\left(جتا\,٢٤٠ + ت\,جا\,٢٤٠\right)$ ، $٢هـ^{\frac{٢ط ت}{٣}}$ ، $٢هـ^{\frac{٥ط ت}{٣}}$]

(ب) أوجد فى أبسط صورة القيمة العددية للمقدار: $\left(\frac{\omega + ص\,\omega}{ص + \omega\,\omega^{٢}} - \frac{ص + \omega\,\omega^{٢}}{ص\,\omega + \omega}\right)^{٤}$ [٩]

■ (٢١) مصر ٢٠٠٨:

(أ) إذا كان $س = \frac{٤}{\sqrt{٣} + ت}$ ، $ص = \frac{٢}{جتا\frac{ط}{٦} - ت\,جا\frac{ط}{٦}}$ اثبت أن: س ، ص عددان مركبان مترافقان ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية حيث $ع = س^{٢} - ٢\,س\,ص + ص^{٢}$

[$\sqrt[٣]{٤}\,هـ^{\frac{ط ت}{٣}}$ ، $\sqrt[٣]{٤}\,هـ^{ط ت}$ ، $\sqrt[٣]{٤}\,هـ^{\frac{٥ط ت}{٣}}$]

(ب) أوجد قيمة المقدار: $\left[ل - \frac{ل - ١}{١ + \omega} + (ل + ١)\omega^{٢}\right]^{٨}$ حيث $ل \in ح$ [٨١]

■ (٢٢) مصر ٢٠٠٨ :

(أ) ضع العدد $ع = \frac{١ + \sqrt{٣}\,ت}{١ + ت}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد جذرية التربيعين فى الصورة الأسية

[$ع = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{ط}{١٢} + ت\,جا\frac{ط}{١٢}\right)$ ، $\sqrt[٤]{٢}\,هـ^{\frac{ط ت}{٢٤}}$ ، $\sqrt[٤]{٢}\,هـ^{\frac{٢٥ط ت}{٢٤}}$]

(ب) أوجد قيمة : $\left(\frac{٦ - ٧\omega^{٢}}{٦\omega - ٧} - \frac{٣ - ٥\omega}{٣\omega^{٢} - ٥}\right)^{٨}$ [٨١]

■ (٢٣) مصر ٢٠٠٩ :

(م) ضع العدد $ع = \left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{٥}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع .

(ب) اثبت أن: $\left(\frac{١}{١ + \omega ت} - \frac{ت + \omega}{١ + \omega^{٢} ت}\right)^{٨} = ١٦$

■ (٢٤) مصر ٢٠٠٩ : $ع_{١} = ١ + \sqrt{٣} ت$ ، $ع_{٢} = جتا \frac{ط}{٦} - ت جا \frac{ط}{٦}$ أوجد العدد $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ على الصورة الأسية $\left[٣ هـ^{\frac{ط ت}{٢}} \right]$

اختبارات كتاب لامي للمراجعة على (الأعداد المركبة)

الاختبار الأول

"أجب عن الأسئلة الآتية" اعتبر $ت^{٢} = -١$

[١] (م) أكمل: (١) $\left| -٢(٣ - ٤ت) \right| = ...$

(٢) $هـ^{٣ + \frac{٢}{٣} ط ت} = ...(جتا.... + ت جا....)$

(ب) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) مرافق العدد ع = ٢ ت - ٣ هو $\bar{ع} = ...$

(م) ٢ ت + ٣ (ب) - ٢ ت + ٣ (ج) $٣ ت^{٢} + ٢ ت^{٧}$ (د) $\frac{١}{٣ - ٢ت}$

(٢) العدد $ع = جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}$ مرافقه فى الصورة الأسية هو :

(م) $هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$ (ب) $هـ^{٥ \pi ت}$ (ج) $هـ^{\frac{٣ ت}{\pi}}$ (د) $هـ^{١ - \frac{\pi}{٣} ت}$

[٢] (م) أوجد م ، ب ∋ ح إذا كان:

(١) $م + ب ت = \frac{(١ - ت)^{١١}}{(١ + ت)^{٨}}$ (٢) $م + ب ت = \sqrt{\frac{١}{٢} ت}$.

(ب) ضع العدد $ع = \left(\frac{٢\sqrt{٣} + ٢ت}{ت}\right)^{٢}$ على الصورة المثلثية وعلى الصورة الأسية

[٣] (أ) أوجد جميع قيم س المختلفة ومثلها على شكل أرجاند حيث:

(١) $\text{س}^{٦} + \text{ت} = \text{صفر}$ (٢) $\omega = \left(\frac{٢}{١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}\right)^{\frac{٣}{٥}}$

(ب) إذا كانت: ١ ، ω س ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

(١) اثبت أن: $\left(١ + \omega^{٢} - \frac{٢}{\omega}\right)\left(١ - \omega^{٢} + \frac{٢}{\omega}\right) + \frac{١}{\omega^{٢}} = ١$

(٢) اثبت أن: $٨ - ٣\omega + ٥\omega^{٢}$ ، $١٠ - \omega^{٢} + ٧\omega$ س عددان مركبان مترافقان.

ومن ثم أوجد المعادلة التربيعية في س التي جذراها هذان العددان.

الاختبار الثاني

أجب عن الأسئلة الآتية : [اعتبر : $\text{ت}^{٢} = -١$ ، ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح]

[١] (أ) أكمل: إذا كان $\text{ع} = \text{هـ}^{\frac{٦ - ٥\pi\text{ت}}{٣}}$ فإن:

(١) $|\text{ع}| = ...$

(٢) السعة الأساسية للعدد ع = ...

(ب) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) العدد $١ + \omega$ مرافقه هو ....

(أ) ١ − س (ب) $١ + \omega^{٢}$ (ج) $١ - \omega^{٢}$ (د) $\frac{١}{١ + \omega}$

(٢) إذا كان العدد $\text{ع} = \frac{١}{٢\text{جاهـ}}\left(\text{جا}٢\text{هـ} + ٢\text{ت}\,\text{جا}^{٢}\text{هـ}\right)$ فإن: $|\text{ع}| = ...$

(أ) $\frac{١}{٢\text{جاهـ}}$ (ب) جا هـ (ج) ١ (د) $\frac{١}{٢}$.

[٢] (أ) إذا كان: $\frac{\text{س} + \text{ت ص}}{٢ + ٢\text{ت}} + \frac{\text{س} - \text{ت ص}}{١ - \text{ت}} = -٦ + ٢\text{ت}$ ، س ، ص $\in$ ح

أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع = س − ت ص في صورة أسية.

(ب) اثبت أن: $\frac{١}{١ + \omega}$ ، $\frac{١}{١ + \omega^{٢}}$ هما جذرا المعادلة $\text{س}^{٢} - \text{س} + ١ = ٠$

[٣] (أ) (١) اثبت أن:

$$\left(1+\frac{1}{\omega^{2}}+2\omega^{5}\right)^{2}+\left(6+7\omega+\frac{6}{\omega^{4}}\right)^{2}-\left(\frac{1+3\text{ت}}{3-\text{ت}}\right)^{2}=\text{صفر}$$

(٢) أوجد المعادلة التربيعية فى س ذات المعاملات الحقيقية والتى أحد جذريها هو: $2\text{هـ}^{\frac{2}{3}\pi\text{ت}}$

(ب) إذا كان $\text{ع}_1=\text{جتا}\frac{7\text{ط}}{4}-\text{ت جا}\frac{7\text{ط}}{4}$ ، $\text{ع}_2=-2-2\sqrt{3}\,\text{ت}$ ، $\text{ع}_3=\text{جتا}\frac{\text{ط}}{3}+\text{ت جتا}\frac{\text{ط}}{3}$

أوجد المقياس والسعة للعدد $\text{ع}=\frac{\text{ع}_1^{4}\times\text{ع}_2}{\text{ع}_3^{5}}$ **ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع ومثلها على شكل أرجاند.**

الوحدة الثالثة:

المحددات والمصفوفات

١ـ المحددات

٢ـ المصفوفات

٣ـ حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربي

٤ـ تطبيقات التشابه في الدائرة

تمارين عامة

تمارين واختبارات الكتاب

اختبارات عامة

المحددات

- تذكر من الصف الأول الثانوى أن:

$م_1$ = قيمة محدد الدرجة الأولى = $|أ_{11}| = أ_{11}$

$م_2$ = قيمة محدد الدرجة الثانية = $\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{vmatrix} = أ_{11} \times أ_{22} - أ_{21} \times أ_{12}$

$$م_3 = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix} = أ_{11} \times \begin{vmatrix} أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix} - أ_{21} \times \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{33} \end{vmatrix} + أ_{31} \times \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{22} \\ أ_{13} & أ_{23} \end{vmatrix}$$

- **العوامل المرافقة لعناصر المحدد:**

- إذا أخذنا عنصر فى المحدد $م_ن$ وليكن العنصر أص ع الذى يقع فى الصف رقم ص و العمود رقم ع وحذفنا الصف ص و العمود ع من المحدد $م_ن$ فإنه :

ينشأ محدد من الدرجة (ن - ١) (يسمى محيدد العنصر أ ص ع فى المحدد $م_ن$)

فإذا ضربنا المحدد الناتج × $(-1)^{ص+ع}$

فإن الكمية الناتجة تسمى بالعامل المرافق للعنصر أ ص ع

ويمكن أن نرمز له بالرمز:

$(-1)^{ص+ع} \times م_{ص ع}$ (حيث $م_{ص ع}$ هو تحيدد العنصر $أ_{ص ع}$)

- وبصفة عامة :

قيمة المحدد $م_ن$ يمكن إيجادها كالتالى: (باستخدام العوامل المرافقة)

$$م_ن = (-1)^{1+1} \times أ_{11} \times م_{11} + (-1)^{2+1} \times أ_{21} \times م_{21}$$

$$+ (-1)^{3+1} \times أ_{31} \times م_{31} + ... + (-1)^{ن+1} \times أ_{ن1} \times م_{ن1}$$

▪ خواص المحددات :

○ يمكن كتابة خواص المحددات كالتالى:

(١) تنعدم قيمة المحدد فى الحالات الاتية: وذلك:

- إذا كانت جميع عناصر اى صف (او عمود) فى المحدد تساوى صفر.
- إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (او عمودين) فى المحدد.

(٢) لا تتغير قيمة المحدد: وذلك:

- إذا بدلت الصفوف بالاعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها.
- إذا تم فك المحدد عن طريق عناصر اى صف (أو أى عمود).
- إذا أخذنا عامل مشترك من جميع عناصر أى صف (أو عمود) وتركناه مضروباً فى المحدد من الخارج.
- إذا كتبنا جميع عناصر صف (أو عمود) كمجموع عنصرين فإن المحدد يمكن كتابته كمجموع محددين. (لاحظ بقاء باقى الصفوف أو الأعمدة كما هى فى المحددات الثلاثة- الأصلي والناتجين).
- إذا ضربنا عناصر أى صف (أو عمود) من محدد فى عدد وأضفنا النواتج إلى نظائرها من عناصر صف آخر (او عمود آخر).

  (لاحظ: الصف او العمود الذى نستخدمه يبقى كما هو).

(٣) تتغير إشارة المحدد مع بقاء قيمته العددية كما هى وذلك إذا بدلنا موضعى صفين (أو عمودين) فى المحدد كل مكان الآخر.

(٤) قيمة المحدد فى الصورة المثلثية = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى. (لاحظ المحدد فى الصورة المثلثية هو الذى تكون العناصر اسفل القطر الرئيسى او اعلاه جميعها أصفار).

(٥) فى أى محدد : إذا ضربنا عناصر صف (أو عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة من صف آخر (أو عمود آخر) وجمعنا النواتج فإن مجموعها = صفر.

تمارين (٤) على المحددات

المجموعة الأولى:

أ) أكمل ما يأ . . :

(١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} =$ ....

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} لو_٢ س & ٣ \\ -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ١٧$ فإن : س = ...

(٣) القيمة العددية للمحدد : $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} =$ ....

(٤) القيمة العددية للمحدد : $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} =$ ....

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٤ \\ -٢ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٣٥$ فإن : س =............

(٦) عند حل المعادلتين : $أ_١$ س + $ب_١$ ص = $جـ_١$ ، $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = $جـ_٢$ إذا كان :

س = $\dfrac{-٧}{\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}}$ ، ص = $\dfrac{-٢١}{\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}}$ فإن : $جـ_١$ = ... ، $جـ_٢$ = ...

ب) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\begin{vmatrix} ١٢٠ & ١١٩ & ١١٨ \\ ٤ & ٤ & ٤ \\ ١١٨ & ١١٧ & ١١٦ \end{vmatrix} =$ .... [صفر أ، ١٢٠ أ، ٤ أ، ١١٨]

(٢) $\begin{vmatrix} ١٢٠ & ١١٩ & ١١٨ \\ ٢ & ٤ & ٥ \\ ١١٨ & ١١٥ & ١١٣ \end{vmatrix} =$ .... [صفر أ، ٢ أ، ٤ أ، ٥]

(٣) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ س & ص & ع \\ ل & م & ن \end{vmatrix} = ١٠$ فإن : $\begin{vmatrix} ٤أ-٣س & ٤ب-٣ص & ٤جـ-٣ع \\ س & ص & ع \\ ل & م & ن \end{vmatrix} =$ ....

[٣٠ أ، ٤٠ أ، ٥٠ أ، ٦٠]

(٤) إذا كان : أ، ب هما جذرا المعادلة : $\text{س}^2 - 9\,\text{س} + 8 = 0$ فإن $\begin{vmatrix} \text{لو}_2\text{ب} & \text{لو}_2\text{أ} \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$: ....

[٣ أ، −٣ أ، ١ أ، −١]

(٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{جـ} & \text{ب} & 1 \\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10$ فإن : $\begin{vmatrix} 2\text{جـ} & 2\text{ب} & 2\text{أ} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ 16 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$ ....

[−٤٠ أ، −٣٠ أ، −٢٠ أ، −١٠]

(٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{vmatrix} = 3$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{ب}+7\text{د} & \text{أ}+7\text{جـ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{vmatrix} =$ .... [٧ أ، −٧ أ، −٣ أ، ٣]

(٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{س} \\ 0 & \text{س} & 1 \\ \text{س} & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$ فإن : س = ... [٢ أ، ٣ أ، ٤ أ، ٨]

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{س}^2+\text{س}+1 \\ 0 & \text{س}-1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ فإن $\text{س}^3 =$ .... [٦ أ، −٦ أ، ٥ أ، ٣]

(٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{س}-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \text{س}^2+\text{س}+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$ فإن س = ... [٧ أ، −٧ أ، ١ أ، ٢]

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & \text{س} & 1 \\ \text{س} & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ في ح هى ....

[{٦، −٦} أ، {٣، −٣} أ، {−٢، ٢} أ، Ø]

(١١) إذا تم تدوير محدد ما فإن قيمته .... [صفر أ، لا تتغير أ، تتغير أ، مدور المحدد]

(١٢) إذا كانت (س − ١) عامل من عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س}-1 & \text{ك}+6 \\ 2\text{س} & 3-\text{س} \end{vmatrix}$ فإن : ك = ...

[٦ أ، −٦ أ، ±٦ أ، ٣]

المجموعة الثانية :

➢ إيجاد قيمة المحدد بالتعريف :

■ (١) : (أ) $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \\ -٢ & ٣ & -٥ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٠ \end{vmatrix}$ [-٥٨ ، ٥٦]

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

■ (٢) : $\begin{vmatrix} ٢\text{س}-١ & ٠ \\ ٤ & \text{س}+٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س}^٢ & ٢ \\ -\text{س} & ١ \end{vmatrix}$ [-٢ ، ١]

■ (٣) : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & -\text{س}^٢ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & \text{س}^٢ \end{vmatrix}$ = صفر [٠ ، -١]

➢ خواص المحددات

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية مستخدماً الخاصية المناسبة :

■ (١) : (أ) $\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٩ & ٢ \\ ٠ & ٧ & ٠ \end{vmatrix}$ [٢٠ ، ٧]

■ (٢) : (أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & -٢ & -٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ١١ & ١٢ & ١٣ \\ ١٤ & ١٥ & ١٦ \\ ١٧ & ١٨ & ١٩ \end{vmatrix}$ [صفر ، صفر]

■ (٣) : (أ) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ -١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & -١ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ١١ & ١٢ & ١٤ \\ ١٢ & ١٣ & ١٧ \\ ١٣ & ١٤ & ٢٠ \end{vmatrix}$ [صفر ، صفر]

■ (٤) : (أ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٢ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٠ & \text{أ} & ٠ \\ \text{ب} & ٠ & \text{جـ} \\ ٠ & \text{ء} & ٠ \end{vmatrix}$ [٣٠ ، صفر]

■ (٥) : (أ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٧ & ١٣ \\ ٤ & ٠ & ٨ \\ ٢ & ٥ & ٩ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & -٧ \\ -٥ & ٠ & ١١ \\ ٧ & -١١ & ٠ \end{vmatrix}$ [صفر ، صفر]

■ (٦) : (أ) $\begin{vmatrix} -٢ & ٨ & ١٥ \\ ٥ & -١٧ & -٣٢ \\ ١ & -٣ & -٧ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٩ \\ ١٦ & ٢٥ & ٨١ \end{vmatrix}$ [٨ ، ٢٠]

■ (٧) : اكتب كلاً من المحددين الآتيين على هيئة مجموع محددين قيمة أحدهما = صفر

(أ) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} \text{٢ل+١} & \text{٢م−٥} & \text{٢ن+٣} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

باستخدام خواص المحددات ، اثبت كلاً مما يأتي (بدون فك المحدد)

■ (٨) : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \\ 11 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 11 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

■ (٩) : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \\ 10 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

■ (١٠) : $\begin{vmatrix} 7 & 8 & -4 \\ 3 & 18 & 6 \\ 12 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

■ (١١) : (أ) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ−٢د} & 2 \\ \text{ب} & \text{ب−٥د} & 5 \\ \text{جـ} & \text{جـ−٨د} & 8 \end{vmatrix} = 0$ (ب) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ+س} & \text{ب+س} & \text{جـ+س} \end{vmatrix} = 0$

■ (١٢) : (أ) $\begin{vmatrix} \text{قا}^2\text{أ} & 1 & \text{ظا}^2\text{أ} \\ \text{قا}^2\text{ب} & 1 & \text{ظا}^2\text{ب} \\ \text{قا}^2\text{جـ} & 1 & \text{ظا}^2\text{جـ} \end{vmatrix} = 0$ (ب) $\begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{جـ}^2 \\ \text{أد} & \text{بد} & \text{جـد} \end{vmatrix} = 0$

■ (١٣) : (أ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{٢أ} & \text{ب} & \text{٣جـ} \\ \text{ب+٣جـ} & \text{٢أ+٣جـ} & \text{٢أ+ب} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

■ (١٤) : $\begin{vmatrix} 1 & \text{جتا}^2\text{أ} & \text{جتا٢أ} \\ 1 & \text{جتا}^2\text{ب} & \text{جتا٢ب} \\ 1 & \text{جتا}^2\text{جـ} & \text{جتا٢جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

■ (١٥) : $\begin{vmatrix} \text{أ−ب} & 13 & \text{ب−٥أ} \\ \text{ب−جـ} & \text{٣ب} & \text{جـ−٥ب} \\ \text{جـ−أ} & \text{٣جـ} & \text{أ−٥جـ} \end{vmatrix} = 0$

■ (١٦) : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & 1 \\ \text{س}^2 & \text{ص}^2 & \text{س+ص} \\ \text{س}^3 & \text{ص}^3 & \text{س}^2\text{+سص+ص}^2 \end{vmatrix} = \text{صفر}$

■ (١٧) : $\begin{vmatrix} \text{٢+ت} & \text{٢ت+١} & 3 \\ \text{٣−٢ت} & \text{٣ت−٢} & 1 \\ \text{٤−٧ت} & \text{٤ت−٧} & -3 \end{vmatrix} = \text{صفر}$ حيث ت = $\sqrt{-1}$

■ (١٨) : $$\begin{vmatrix} \text{و} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{و} \\ \text{س} & \text{و} & \text{ص} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{و} & \text{س} \\ \text{و} & \text{ع} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{س} & \text{و} \end{vmatrix}$$

■ (١٩) : $$\text{صفر} = \begin{vmatrix} 58 & 55 & 48 \\ 37 & -24 & 43 \\ 22 & 19 & 12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 58 & 55 & 48 \\ 83 & 19 & 79 \\ 22 & 19 & 12 \end{vmatrix}$$

■ (٢٠) : $$\text{صفر} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 9 & -4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -7 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -9 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

■ (٢١) : $$2\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{أ}-1 & \text{س} \\ \text{م} & \text{ب}-1 & \text{ص} \\ \text{ن} & \text{جـ}-1 & \text{ع} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{جـ}+1 & \text{ب}+1 & \text{أ}+1 \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$$

■ (٢٢) : $$\text{صفر} = \begin{vmatrix} \omega^5 & \text{ت} & 1 \\ 0 & \omega\text{ت}^2 & \text{ت}^3 \\ \omega^4 & \omega^2\text{ت}^6 & -\text{ت} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega^2 & \text{ت}^5 & 0 \\ 0 & -\omega^4 & \omega^2\text{ت}^3 \\ \omega & -\omega^2 & -\omega\text{ت} \end{vmatrix}$$

■ (٢٣) : $$\text{صفر} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & 0 \\ \text{د} & 0 & -\text{أ} \\ 0 & -\text{د} & -\text{ب} \end{vmatrix}$$

■ (٢٤) : $$\begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب أ} & \text{جـ أ} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$$

■ (٢٥) : $$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix} \text{أ ب حـ} = \begin{vmatrix} \text{ب}^2 & \text{جـ}^2 & \text{ب جـ} \\ \text{أ}^2 & \text{جـ أ} & \text{جـ}^2 \\ \text{أ ب} & \text{أ}^2 & \text{ب}^2 \end{vmatrix}$$

■ (٢٦) : $$2\begin{vmatrix} \text{جا أ} & \text{جتا أ} & 1 \\ \text{جا ب} & \text{جتا ب} & 1 \\ \text{جا جـ} & \text{جتا جـ} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{جتا أ}+\text{جا أ} & \text{جتا أ}-\text{جا أ} & 1 \\ \text{جتا ب}+\text{جا ب} & \text{جتا ب}-\text{جا ب} & 1 \\ \text{جتا جـ}-\text{جا جـ} & \text{جتا جـ}-\text{جا جـ} & 1 \end{vmatrix}$$

■ (٢٧) : $$\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{م} & \text{د} & \text{جـ} \\ \text{ن} & \text{و} & \text{هـ} \end{vmatrix} 2\text{س} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب س}-\text{أ} & \text{أ}+\text{ب س} \\ \text{م} & \text{د س}-\text{جـ} & \text{جـ}+\text{د س} \\ \text{ن} & \text{و س}-\text{هـ} & \text{هـ}+\text{و س} \end{vmatrix}$$

■ (٢٨) : $$\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} 2 = \begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{ب}+\text{جـ} \\ \text{ل}+\text{م} & \text{ن}+\text{ل} & \text{م}+\text{ن} \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

■ (٢٩) : $$\begin{vmatrix} 0 & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} & 0 \\ \text{أ} & 0 & \text{جـ} \end{vmatrix} 2 = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{ب}+\text{جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

■ (٣٠) : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س ص} & \text{ص ع} \\ \text{ص} & \text{ص}^{٢} & \text{س ع} \\ ١ & \text{ع} & \text{ص} \end{vmatrix} = (\text{س} + \text{ص}) \begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{ص ع} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س ص} \end{vmatrix}$

■ (٣١) : $\begin{vmatrix} ٠ & \text{أ} & \text{س} \\ \text{ب} & \text{ص} & \text{أ} \\ \text{ع} & \text{ب} & ٠ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & ١ & \text{س} \\ ١ & \text{ص} & \text{أ}^{٢} \\ \text{ع} & \text{ب}^{٢} & ٠ \end{vmatrix}$

■ (٣٢) إذا علم أن $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \end{vmatrix} = ٧$ فأوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \text{٣ع} & \text{٣ص} & \text{٣س} \\ \text{ع+٢ن} & \text{ص+٢م} & \text{س+٢ل} \\ \text{٥و−ن} & \text{٥هـ−م} & \text{٥د−ل} \end{vmatrix}$ بدون فكه

استعن بخواص المحددات لتبسيط كلاً من المحددات الآتية ثم أوجد قيمة كل منها :

■ (٣٣) : $\begin{vmatrix} ٢١ & ٦٧ & ١٩ \\ ١٤ & ٣٩ & ١٣ \\ ٢٦ & ٨١ & ٢٤ \end{vmatrix}$ [٤٣]

■ (٣٤) : $\begin{vmatrix} ٢٢ & ٢٦ & ٢٢ \\ ٢٥ & ٣١ & ٢٧ \\ ٦٣ & ٦٤ & ٤٦ \end{vmatrix}$ [٨٤]

■ (٣٥) : $\begin{vmatrix} ٨٩ & ٤٠ & ١٨ \\ ١٩٨ & ٨٩ & ٤٠ \\ ٤٤٠ & ١٩٨ & ٨٩ \end{vmatrix}$ [-١]

■ (٣٦) : حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{٢س+١} & \text{٢س+١} & \text{س} \\ \text{٤س} & \text{٣س−١} & \text{٢س+١} \\ \text{٦س−١} & \text{٤س} & \text{٣س−١} \end{vmatrix} = \text{صفر}$ [٠ ، $\frac{١}{٢}$]

■ (٣٧) : أوجد مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{٥س+٤} & \text{س+٨} & \text{٣س+٦} \\ \text{س+٥} & \text{٣س+١} & \text{٥س+٣} \\ \text{٤س+٥} & \text{٨س+١} & \text{٦س+٣} \end{vmatrix} = ٠$ [{٠ و١ و-١}]

■ (٣٨) : حل المعادلة : $\begin{vmatrix} -١ & ١ & \text{٢جاهـ} \\ -١ & \text{٢جاهـ} & ١ \\ \text{٢جاهـ} & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ حيث $٠ \leq \text{هـ} \leq \text{ط}$

■ (٣٩) : أوجد قيمة ك بحيث تكون س أحد عوامل المحدد : $\begin{vmatrix} ٣ & ٣ & \text{س−٣} \\ \text{س+٣} & ١ & ١ \\ \text{ك+س} & ٧ & -١ \end{vmatrix}$ [١٣]

■ (٤٠) : أوجد قيمة ك بحيث يكون (س-٢) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & \text{س+٣} \\ \text{ك} & \text{ك−٢س} & \text{ك−٤} \\ ١ & \text{ك+١} & ١ \end{vmatrix}$ [٠ أ ، -٦]

■ (٤١) : أثبت أن المعادلة الكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطتين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) هي :

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{س}_{١} & \text{ص}_{١} \\ \text{١} & \text{س}_{٢} & \text{ص}_{٢} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

استعن بخواص المحددات لإثبات صحة كلاً مما يأتي :

■ (٤٢) :

$$\begin{vmatrix} \text{١+ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ل} & \text{١+م} & \text{ن} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{١+ن} \end{vmatrix} = \text{ل + م + ن + ١}$$

■ (٤٣) :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{(أ + ٢حـ) (أ − حـ)}^{٢}$$

■ (٤٤) :

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ \text{س}^{٢} & \text{١} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س}^{٢} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{(س}^{٣} \text{ − ١)}^{٢}$$

■ (٤٥) :

$$\begin{vmatrix} \text{ب − د} & \text{ب − جـ} & \text{جـ} \\ \text{ب − د} & \text{جـ} & \text{ب − جـ} \\ \text{− د} & \text{ب − جـ} & \text{ب + جـ} \end{vmatrix} = \text{ب (٢ب − د) (٢حـ − ب)}$$

■ (٤٦) :

$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{١} & \text{أ} \\ \text{جـ أ} & \text{١} & \text{ب} \\ \text{أ ب} & \text{١} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{(ب − حـ) (حـ − أ) (أ − ب)}$$

■ (٤٧) :

$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{١} & \text{أ}^{٢} \\ \text{جـ أ} & \text{١} & \text{ب}^{٢} \\ \text{أ ب} & \text{١} & \text{جـ}^{٢} \end{vmatrix} = \text{(أ − ب) (ب − حـ) (حـ − أ) (أ + ب + حـ)}$$

■ (٤٨) :

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{(س − أ) (س − ب) (س + أ + ب)}$$

■ (٤٩) :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}^{٢} & \text{ب}^{٢} & \text{جـ}^{٢} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \text{(أ − ب) (حـ − ب) (أ − حـ) (أب + ب حـ + حـ أ)}$$

■ (٥٠) :

$$\begin{vmatrix} \text{أ − ب − جـ} & \text{٢أ} & \text{٢أ} \\ \text{٢ب} & \text{ب − جـ − أ} & \text{٢ب} \\ \text{٢جـ} & \text{٢جـ} & \text{جـ − أ − ب} \end{vmatrix} = \text{(أ + ب + حـ)}^{٣}$$

■ (٥١) :

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{− ص} & \text{س − ص} \\ \text{− ص} & \text{س − ص} & \text{س} \\ \text{س − ص} & \text{س} & \text{− ص} \end{vmatrix} = \text{٢ (ص}^{٣} \text{ − س}^{٣}\text{)}$$

■ (٥٢) : $\begin{vmatrix} أ+١ & ب+١ & جـ+١ \\ جـ+٣ & ٣ & أ+٣ \\ أ+جـ & ب & أ+جـ \end{vmatrix} = ٤\,(أ - جـ)\,(أ - ب + جـ)$

■ (٥٣) : $\begin{vmatrix} س^٢+١ & س ص & س ع \\ س ص & ص^٢+١ & ص ع \\ س ع & ص ع & ع^٢+١ \end{vmatrix} = س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ١$

■ (٥٤) : إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & أ^٢ & أ^٣-١ \\ ب & ب^٢ & ب^٣-١ \\ جـ & جـ^٢ & ى^٣-١ \end{vmatrix}$ = صفر ، $أ \neq ب \neq جـ$ ، اثبت أن $أ\,ب\,جـ = ١$

■ (٥٥) : $\begin{vmatrix} ١ & جاس & ٢ \\ جاس & ١ & جتاس \\ ٠ & جتاس & ١ \end{vmatrix} = جا\,٢\,س$

■ (٥٦) : $\begin{vmatrix} ١ & أ & أ^٣ \\ ١ & ب & ب^٣ \\ ١ & جـ & جـ^٣ \end{vmatrix} = (أ + ب + جـ) \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^٢ \\ ١ & ب & ب^٢ \\ ١ & جـ & جـ^٢ \end{vmatrix}$

■ (٥٧) : $\begin{vmatrix} أ^٢ & (أ+١)^٢ & (أ+٢)^٢ \\ ب^٢ & (ب+١)^٢ & (ب+٢)^٢ \\ جـ^٢ & (جـ+١)^٢ & (جـ+٢)^٢ \end{vmatrix} = ٤\,(أ - ب)\,(ب - جـ)\,(أ - جـ)$

■ (٥٨) : $\begin{vmatrix} س^٣-أ^٣ & س^٢ & س \\ ب^٣-أ^٣ & ب^٢ & ب \\ جـ^٣-أ^٣ & جـ^٢ & جـ \end{vmatrix} = (ب - س)\,(جـ - س)\,(جـ - ب)\,(أ^٣ - ب\,جـ\,س)$

المجموعة الثالثة:

تمارين (٣-١) من الكتاب المدرسي

أكمل ما يلى :

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ى & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = ١٢$ فإن : $\begin{vmatrix} ع & س & ص \\ و & ى & هـ \\ جـ & أ & ب \end{vmatrix} = ...$

(أ) − ١٢ (ب) − ٦ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٢) إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ى & هـ & جـ \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = ١٥$ فإن : $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ س & ص & ع \\ ى & هـ & و \end{vmatrix} = ...$

(أ) − ٣٠ (ب) − ١٥ (جـ) صفر (د) ١٥

(٣) $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \dots$

(ﻡ) صفر (ب) ﻡ جـ (جـ) ب جـ (د) ﻡ ب جـ

(٤) $\begin{vmatrix} \frac{1}{\text{جـ}} & \text{ا} & \text{اب} \\ \frac{1}{\text{ب}} & \text{جـ} & \text{اجـ} \\ \frac{1}{\text{ا}} & \text{ب} & \text{بجـ} \end{vmatrix} = \dots$

(ﻡ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٥) $\begin{vmatrix} \text{ع} - \text{س} & \text{ص} - \text{ع} & \text{س} - \text{ص} \\ \text{س} - \text{ص} & \text{ع} - \text{س} & \text{ص} - \text{ع} \\ \text{ص} - \text{ع} & \text{س} - \text{ص} & \text{ع} - \text{ص} \end{vmatrix} = \dots$

(ﻡ) صفر (ب) س - ص (جـ) ص - ع (د) ع - س

(٦) إذا كانت $\text{ت}^2 = -1$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{ت} + 1 & \text{ت} & 1 \\ \text{ت} - 1 & 1 & 0 \\ \text{ت} & \text{ت} & 0 \end{vmatrix} = \dots$

(ﻡ) ٢ ت - ١ (ب) ٢ ت + ١ (جـ) ت (د) ١

(٧) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} 3\text{س} & 2\text{س} & \text{س} \\ \text{س} & 2\text{س} & 3\text{س} \\ 0 & -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = 96$ هى ...

(ﻡ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) - ٢

(٨) فى Δ ﻡ ب جـ يكون $\begin{vmatrix} \text{جـ}' & \text{ب}' & \text{ا}' \\ 8 & 7 & 5 \\ \text{جاجـ} & \text{جاب} & \text{جاا} \end{vmatrix} = \dots$

(ﻡ) ٥ ﻡ' (ب) ٧ ب' (جـ) ٨ جـ' (د) صفر

(٩) إذا كان $ن = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$ ، $م = \begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ١٠ & ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن م = ...

(أ) ن (ب) ١٠ ن (جـ) ٢٠ ن (د) ٣٠ ن

(١٠) $\begin{vmatrix} ٩ & -١ & ١ \\ -٧ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٧ & -٩ \end{vmatrix} = ...$

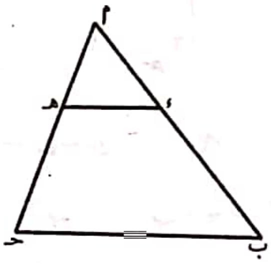
(أ) -٩ (ب) -٧ (جـ) ٤٩ (د) ٠

(١١) إثبت أن $\begin{vmatrix} س^٢ & س & ١ \\ ص^٢ & ص & ١ \\ ع^٢ & ع & ١ \end{vmatrix} = (س - ص)(ص - ع)(ع - س)$ ثم اوجد قيمة المحدد العددية

اذا كان : س - ص = ٥ ، ص - ع = ٧

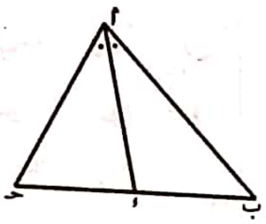
(١٢) الربط بالهندسة فى الشكل المقابل : $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بجـ}$

اثبت أن $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ اهـ & اى & ءهـ \\ اجـ & اب & بجـ \end{vmatrix} =$ صفر



(١٣) ا ب جـ مثلث $\overline{اى}$ ينصف $\angle$ ب ا جـ

اثبت أن : $\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ اب + اجـ & اجـ & اب \\ بجـ & ىجـ & بى \end{vmatrix} =$ صفر



(١٤) اثبت أن $\begin{vmatrix} جا^٢س & جتا^٢س & ١ \\ جا^٢ص & جتا^٢ص & ١ \\ جا^٢ع & جتا^٢ع & ١ \end{vmatrix} =$ صفر

(١٥) باستخدام خواص المحددات حل المعادلات الآتية :
$$\text{١٦} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{س} \\ \text{٤} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{س} & \text{٥} & \text{س} \end{vmatrix}$$

(١٦)
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س}^{\text{٢}} \\ \text{س} & -\text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{٠} & -\text{س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س} \\ \text{س}+\text{١} & -\text{١} & \text{١} \end{vmatrix}$$

(١٧)
$$\text{٢س}+\text{١} = \begin{vmatrix} \text{١} & -\text{س} & \text{٢} \\ \text{٠} & -\text{١} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س}+\text{١} \end{vmatrix}$$

(١٨)
$$\text{س}-\text{١} = \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{١} & \text{س} \\ \text{٢} & \text{س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{٢} & \text{١} \end{vmatrix}$$

باستخدام خواص المحددات اثبت أن :

(١٩)
$$(\text{ب}-\text{أ})(\text{ج}-\text{أ})(\text{ج}-\text{ب}) = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ج}^{\text{٢}} & \text{ب}^{\text{٢}} & \text{أ}^{\text{٢}} \end{vmatrix}$$

(٢٠)
$$(\text{أ}+\text{ب}+\text{ج})^{\text{٣}} = \begin{vmatrix} \text{٢أ} & \text{٢أ} & \text{أ}-\text{ب}-\text{ج} \\ \text{٢ب} & \text{ب}-\text{ج}-\text{أ} & \text{٢ب} \\ \text{ج}-\text{أ}-\text{ب} & \text{٢ج} & \text{٢ج} \end{vmatrix}$$

(٢١)
$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} \text{أ ب ج} = \begin{vmatrix} \text{ب}^{\text{٢}} & \text{ج}^{\text{٢}} & \text{ب ج} \\ \text{أ}^{\text{٢}} & \text{ج أ} & \text{ج}^{\text{٢}} \\ \text{أ ب} & \text{أ}^{\text{٢}} & \text{ب}^{\text{٢}} \end{vmatrix}$$

(٢٢)
$$\text{٤س ص ع} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

(٢٣) بدون فك المحدد اثبت أن : $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ص & س \\ س & س & -ص \end{vmatrix} = س^{٢} - ص^{٢}$

بدون فك المحدد أوجد قيمة :

(٢٤) $\begin{vmatrix} ٥ & -١ & ١٠ \\ ٤ & ٢ & ٨ \\ -٥ & ٢ & -١٠ \end{vmatrix}$

(٢٥) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ -٤ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$

باستخدام خواص المحددات اثبت أن :

(٢٦) $\begin{vmatrix} (س+ص)^{٢} & س^{٢}+ص^{٢} & ٣سص \\ (ع+ل)^{٢} & ع^{٢}+ل^{٢} & ٣عل \\ (م+ن)^{٢} & م^{٢}+ن^{٢} & ٣من \end{vmatrix} = \text{صفر}$

(٢٧) $\begin{vmatrix} ٠ & ل & -م \\ -ل & ٠ & -ن \\ م & ن & ٠ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

(٢٨) $\begin{vmatrix} ١ & من & سص+عل \\ ١ & سص & من+عل \\ ١ & عل & سص+من \end{vmatrix} = \text{صفر}$

بدون فك المحدد اثبت أن :

(٢٩) $\begin{vmatrix} س & ا & ا \\ ا & س & ا \\ ا & ا & س \end{vmatrix} = (س+٢ا)(س-ا)^{٢}$

(٣٠) $\begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ س & ١+س^{٢} & سص \\ ص & سص & ١+ص^{٢} \end{vmatrix} = ١$

(٣١) $\begin{vmatrix} س & -ص & -ع \\ ص & ١ & ٠ \\ ع^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = س+ص^{٢}+ع^{٣}$

(٣٢) باستخدام خواص المحددات اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & -7 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(٣٣) بدون فك المحدد اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{ا} \end{vmatrix} = (\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{جـ})(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})$$

(٣٤) باستخدام خواص المحددات اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{ا ب} & \text{ا} \\ \text{ا جـ} & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} = (\text{ا}+\text{ب})\begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & 1 \\ \text{ا} & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

(٣٥) بدون فك المحدد اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^2+1 & \text{ا ب} & \text{ا جـ} \\ \text{ا ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب جـ} \\ \text{ا جـ} & \text{ب جـ} & \text{جـ}^2+1 \end{vmatrix} = \text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2+1$$

(٣٦)

$$\begin{vmatrix} 1+\text{ا} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{ب} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{ا ب جـ}\left(\frac{1}{\text{ا}}+\frac{1}{\text{ب}}+\frac{1}{\text{جـ}}+1\right)$$

(٣٧) إذا كان :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^3-1 & \text{ا}^2 & \text{ا} \\ \text{ب}^3-1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{جـ}^3-1 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix} =$$

صفر حيث $\text{ا} \neq \text{ب} \neq \text{جـ}$ اثبت أن ا ب جـ = ١

(٣٨) بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ ا} & \text{ا ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{ا} & \text{ا}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

(٣٩) بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{ا}^2 & \text{ا}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{جـ ا} & \text{ب}^2 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 & \text{ا ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{ا ب} & \text{جـ ا} \\ \text{ا ب} & \text{جـ ا} & \text{ب جـ} \\ \text{ا جـ} & \text{ب جـ} & \text{ا ب} \end{vmatrix}$$

المجموعة الرابعة:

تمارين مختارة من إمتحانات الثانوية العامة لسنوات سابقة

على خواص المحددات واستخدامها فى الإثبات أو الحل بدون فك المحدد.

■ (١) مصر (٩٤) أثبت ان :

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ}^3 \\ 1 & \text{ب}^2 & \text{ب}^3 \\ 1 & \text{ج}^2 & \text{ج}^3 \end{vmatrix} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{ج})(\text{ج} - \text{أ})(\text{أب} + \text{ب ج} + \text{ج أ})$$

■ (٢) مصر ٩٧ أثبت ان:

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب ج} \\ 1 & \text{ب} & \text{ج أ} \\ 1 & \text{ج} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{ج})(\text{ج} - \text{أ})$$

■ (٣) مصر ٩٧ أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ءس} & \text{ءس} - \text{أ} & 1 \\ \text{ب} + \text{هس} & \text{هس} - \text{ب} & 1 \\ \text{ج} + \text{وس} & \text{وس} - \text{ج} & 1 \end{vmatrix} = 2\text{س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ء} & \text{ه} & \text{و} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

■ (٤) مصر ٩٨ : أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{س} \\ -2\text{س} + 2\text{س}^2 & 1 + 2\text{س}^2 & 2\text{س}^3 \\ -3\text{س} + 3\text{س}^2 & 3\text{س}^2 & 1 + 3\text{س}^3 \end{vmatrix} \quad 1 + 2\text{س} + 3\text{س}^2$$

■ (٥) مصر ٩٨ : إثبت ان:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & -\text{ب} & -\text{ج} \\ \text{ب} & 1 & 0 \\ \text{ج}^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{أ} + \text{ب}^2 + \text{ج}^3$$

■ (٦) مصر ٩٩ : إثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{ب ج} & \text{ج أ} + \text{أ ب} \\ 1 & \text{ج أ} & \text{أ ب} + \text{ب ج} \\ 1 & \text{أ ب} & \text{ب ج} + \text{ج أ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

■ (٧) أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ب}^2 + 1 & \text{ب ج} \\ \text{ج} & \text{ب ج} & \text{ج}^2 + 1 \end{vmatrix} = 1$$

■ (٨) مصر ٢٠٠٠ : أثبت أن $\begin{vmatrix} س+ا & ص & ع \\ س & ص+ا & ع \\ س & ص & ع+ا \end{vmatrix} = ا^{٢}(ا+س+ص+ع)$

■ (٩) مصر ٢٠٠٠ : أثبت أن: $\begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & س & ١ \\ ١ & ١ & س \end{vmatrix} = (س+٢)(س-١)^{٢}$

■ (١٠) مصر ٢٠٠١ : إذا كانت (س-١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} س-١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & س+١ \\ -١ & ١ & س+ك \end{vmatrix}$ فأوجد قيمة ك

■ (١١) مصر ٢٠٠١ : أثبت ان : $\begin{vmatrix} س & س^{٢}+١ & (س+١)^{٢} \\ ص & ص^{٢}+١ & (ص+١)^{٢} \\ ع & ع^{٢}+١ & (ع+١)^{٢} \end{vmatrix} =$ صفر

■ (١٢) مصر ٢٠٠٢ : اثبت أن: $\begin{vmatrix} ا-اب & ١ & ب-٣ \\ اب-اجـ & ب & جـ-٣ب \\ اجـ-ا & جـ & ١-٣جـ \end{vmatrix} =$ صفر

■ (١٣) مصر ٢٠٠٢ . أثبت أن : $\begin{vmatrix} ١ & ا & ا \\ ١ & ب & ا \\ ١ & ا & -ب \end{vmatrix} = ا^{٢} - ب^{٢}$

■ (١٤) مصر ٢٠٠٣ إذا كان $\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ك & ط & هـ \end{vmatrix} = ٢$

أوجد قيمة : $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ص & ٢ع \\ ٥ل+س & ٥م+ص & ٥ن+ع \\ ٧ك-٣ل & ٧ط-٣م & ٧هـ-٣ن \end{vmatrix}$ بدون فك المحدد [١٤٠]

■ (١٥) مصر ٢٠٠٣ : أثبت أن $\begin{vmatrix} س+ص+٢ & س & ص \\ ١ & ٢س+ص+١ & ص \\ ١ & س & س+٢ص+١ \end{vmatrix} = ٢(س+ص+١)^{٣}$

■ (١٦) مصر ٢٠٠٤ : أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ل}^{\text{٢}} & \text{م}^{\text{٢}} & \text{ن}^{\text{٢}} \end{vmatrix} = (\text{ل} - \text{م})(\text{م} - \text{ن})(\text{ن} - \text{ل})$$

■ (١٧) مصر ٢٠٠٧ : أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{س} + \text{أ} & \text{س} + \text{أ} & \text{٢أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{٠} & \text{أ} - \text{س} & \text{س} - \text{أ} \end{vmatrix} = (\text{س} + \text{٢أ})(\text{س} - \text{أ})^{\text{٢}}$$

■ (١٨) مصر ٢٠٠٤ . إذا كان (س-٢) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{١} & \text{س} + \text{٣} & \text{٢} \\ -\text{٣} & \text{س} + \text{٥} & -\text{٦} \\ \text{س} + \text{٣} & \text{٢} & \text{س} + \text{ك} \end{vmatrix}$$

أوجد قيمة ك

[ك = ٨]

■ (١٩) مصر ٢٠٠٧ : أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} - \text{جـ} & \text{٢أ} \\ \text{ب} & \text{أ} - \text{جـ} & \text{٢ب} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} + \text{جـ} \end{vmatrix} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{جـ})(\text{ب} - \text{جـ})$$

■ (٢٠) مصر ٢٠٠٨ : يوضع المحدد على الصورة المثلثية أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{س}^{\text{٢}} & \text{ص}^{\text{٢}} & \text{ع}^{\text{٢}} \end{vmatrix} = (\text{س} - \text{ص})(\text{ص} - \text{ع})(\text{ع} - \text{س})$$

■ (٢١) مصر ٢٠٠٨ : أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{١} \\ \text{س}^{\text{٢}} & \text{ص}^{\text{٢}} & \text{س} + \text{ص} \\ \text{س}^{\text{٣}} & \text{ص}^{\text{٣}} & \text{س}^{\text{٢}} + \text{س ص} + \text{ص}^{\text{٢}} \end{vmatrix}$$

بدون فك المحدد (صفر)

■ (٢٢) مصر ٢٠٠٩ : حل المعادلة :

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad \left(\text{١} \text{ ، } -\frac{\text{١}}{\text{٢}} \right)$$

■ (٢٣) مصر ٩٦ : أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٢س} & \text{س} \\ \text{١} & \text{٢ص} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{س} + \text{ص} & \text{ص} \end{vmatrix} = (\text{س} - \text{ص})^{\text{٢}}$$

المصفوفات

تذكر من دراستك بالصف الأول الثانوى

المصفوفة $أ_{م\times ن} = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} & أ_{٢ن} \\ \vdots & & & \\ أ_{١م} & أ_{٢م} & أ_{٣م} & أ_{من} \end{pmatrix}$

عندما م = ن تسمى مصفوفى مربعة.

- **المصفوفة المنفردة والمصفوفة غير المنفردة.**

○ **المصفوفة المنفردة** : هى مصفوفة مربعة قيمة محددها = صفر.

○ **المصفوفة غير المنفردة** : هى مصفوفة مربعة قيمة محددها $\pm$ صفر

- **المعكوس الضربي للمصفوفة :**

إذا كانت أ مصفوفة مربعة حيث $|أ| \neq ٠$

فإن أ يكون لها معكوساً ضربياً يرمز له بالرمز $أ^{-١}$ حيث: $أ \times أ^{-١} = أ^{-١} \times أ = I$

(أى أن كل مصفوفة غير منفردة أ يكون لها معكوساً ضربياً $أ^{-١}$)

- **تذكر :**

I = مصفوفة الوحدة هى المحايد الضربى لمجموعة المصفوفات غير المنفردة حيث

$I_٢ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $I_٣ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ وهكذا

إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة:

I) إذا كانت $\text{أ}_{٢\times٢} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{pmatrix}$ مصفوفة غير منفردة أى أن $|\text{أ}| \neq ٠$

لايجاد $\text{أ}^{-١}$:

(١) نوجد $|\text{أ}| = \Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١}.\text{أ}_{٢٢} - \text{أ}_{٢١}.\text{أ}_{١٢}$

(٢) نبدل عنصرى القطر الرئيسى وتغير إشارة عنصرى القطر

الثانى : نحصل على $\begin{pmatrix} \text{أ}_{٢٢} & -\text{أ}_{٢١} \\ -\text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \end{pmatrix}$

(٣) $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \begin{pmatrix} \text{أ}_{٢٢} & -\text{أ}_{٢١} \\ -\text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \end{pmatrix}$

II) إذا كانت $\text{أ}_{٣\times٣}$ مصفوفة غير منفردة أى أن $|\text{أ}| \neq ٠$ لايجاد $\text{أ}^{-١}$ نتبع الخطوات الآتية:

١- توجد قيمة $|\text{أ}|$ ونتأكد أنه $\neq ٠$

٢- نوجد مصفوفة العوامل المرافقه لكل عنصر من عناصر أ

٣- نوجد المصفوفة الملحقة $\text{أ}^{\text{مل}}$ = مدور مصفوفة العوامل المرافقة

٤- توجد $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$

بعض خواص المعكوس الضربي للمصفوفة

١- $(\text{أ ب})^{-١} = \text{ب}^{-١}\ \text{أ}^{-١}$

٢- $(\text{أ}^{-١})^{-١} = \text{أ}$

٣- $(\text{أ}^{-١})^{\text{مد}} = (\text{أ}^{\text{مد}})^{-١}$

■ حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة ٣ × ٣

إذا كانت المعادلات:

$أ_١$س + $ب_١$ص + $جـ_١$ع = $ى_١$ ،　　$أ_٢$س + $ب_٢$ص + $جـ_٢$ع = $ى_٢$ ،

$أ_٣$س + $ب_٣$ص + $جـ_٣$ع = $ى_٣$ ،

فإن المعادلات تكتب على الصورة = أ . س = ج I

حيث أ = مصفوفة المعاملات = $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{pmatrix}$ ،

س مصفوفة المجاهيل = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ،

ج مصفوفة الثوابت = $\begin{pmatrix} ى_١ \\ ى_٢ \\ ى_٣ \end{pmatrix}$

ويكون للمعادلات حل وحيد عندما |أ| ≠ ٠

وللحل توجد $أ^{-١}$ ونضرب طرفى (١) من اليمين فى $أ^{-١}$ نحصل على س = $أ^{-١}$ ج هو الحل.

■ المعادلات المتجانسة:

○ فى نظام المعادلات السابقة أ س = ج إذا كانت ج = □ = المصفوفة الصفرية سميت المعادلات بالمعادلات المتجانسة،

○ وعندما |أ| ≠ ٠ يكون للمعادلات حل وحيد هو الحل الصفرى (٠ ، ٠ ، ٠)

○ وعندما |أ| = ٠ فإنه يوجد حل خلاف الحل الصفرى أى يكون للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول.

■ المعادلات غير المتجانسة : هى عندما أ س = ج ± □ .

■ رتبة المصفوفة :

يرمز لرتبة المصفوفة أ بالرمز ر (أ) .

○ **تعريف :** رتبة المصفوفة أ على النظم م × ن هى درجة أعلى محدد داخل المصفوفة بحيث أن تكون قيمته لا تساوى صفراً.

من تعريف رتبة المصفوفة ممكن استنتاج الخصائص التالية لأى مصفوفة أ على النظم م × ن .

(١) رتبة المصفوفة أ لا تزيد عن العدد الأصغر من م ،ن.

(٢) رتبة أ تساوى صفراً إذا وفقط إذا كانت جميع عناصر المصفوفة أ = ٠

(أى عندما أ = ◻ فإن رتبة أ = ٠)

(٣) إضافة أو حذف صف (عمود) جميع عناصره أصفار لا يغير الرتبة.

(٤) إضافة أو حذف صف (عمود) عناصره عبارة عن تجميع لعناصر عدة صفوف (أعمدة) لا يغير رتبة المصفوفة.

(٥) إذا كانت أ = $I_{م\times م}$ فإن رتبة أ = م

(٦) رتبة أ = رتبة $أ^{مد}$

لبحث إمكانية حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفة الموسعة $أ^*$

إذا كانت أ = مصفوفة المعاملات، $أ^*$ = المصفوفة الموسعة فإن المعادلات:

(١) يكون لها حل وحيد عندما رتبة أ = رتبة $أ^*$ = عدد المجاهيل.

(٢) يكون لها عدد لا نهائى من الحلول عندما رتبة أ = رتبة $أ^*$ < عدد المجاهيل.

(٣) لا يكون لها حل على الإطلاق عندما رتبه أ ± رتبة $أ^*$

■ المصفوفة الموسعة :

نظام المعادلات السابقة أ س = ج يمكن كتابته كالتالى:

$$\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ & ى_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ & ى_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ & ى_٣ \end{pmatrix}$$ وتسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الموسعة

ويرمز لها بالرمز $أ^*$ وهى شملت المصفوفة أ والخط الرأسى المنقط وضع بدلاً من علاقة = وإلى يسار الخط الرأسى كتبت المصفوفة ج .

لامى

تمارين (٥) على المصفوفات

المجموعة الأولى:

[١] اكمل ما يأ .:

(١) إذا كانت $أ_{٢×٢}$ فإن رتبة $أ$ ≥ ....

(٢) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$ فإن $أ^{-١}$ = ...

(٣) إذا كانت $أ × أ^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن أ من النظم ....

(٤) نظام المعادلات أ س = ج ، $|أ| \neq ٠$ فإن المعادلات ....

(٥) رتبة مصفوفة المعاملات ± رتبة المصفوفة الموسعة فإن المعادلات ....

(٦) إذا كانت $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \square$ وكان $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١$ = صفر

فإن المعادلات يكون لها حل خلاف ....

(٧) إذا كانت $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \square$ وكان $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١ = ٠$

فإن الحل هو ....

(٨) فى نظام لمعادلات خطية فى مجهول إذا كان عدد المعادلات المعطاه هو ٣ معادلات وكانت

(أ) رتبة $أ$ = ٢ ، رتبة $أ^*$ = ٣ فإن المستقيمات تكون ....

(ب) رتبه $أ$ = ٢ ، رتبه $أ^*$ = ٢ فإن المستقيمات تكون ....

(جـ) رتبه $أ$ = ١، رتبه $أ^*$ = ١ فإن المستقيمات تكون ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) شرط وجود معكوس ضربى للمصفوفة أ هو أن:

(أ) مربعة (ب) من النظم ٢ × ٣ (جـ) مربعة ومحددها = ٠ (د) مربعة ومحددها ≠ ٠

(٢) مصفوفة الوحدة $I_{٢\times٢}$ معكوسها الضربى هو

(أ) □ (ب) $I_{٢\times٢}$ (جـ) $-I_{٢\times٢}$ (د) $I_{٢\times٢}$

(٣) رتبة المصفوفة $I_{٢\times٢}$ تساوى

(أ) ٣ × ٣ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٤) نظام المعادلات أ س = □ ، |أ| = ٠ يكون له.

(أ) حل وحيد (ب) لا يوجد حل (جـ) يوجد حل واحد خلاف الحل الصفرى.

(د) يوجد عدد لا نهائى من الحلول منها الحل الصفرى.

(٥) إذا كان نظام معادلات مكون من ٣ معادلات فى مجهول وتقاطعت المستقيمات المثلة للمعادلات فى نقطة واحدة فإن :

(أ) رتبة أ* = ٣ (ب) رتبة أ = رتبة أ* = ١

(جـ) رتبة أ = رتبة أ* = ٢ (د) رتبة أ ≠ رتبة أ*

(٦) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن أ* = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٨ & -٤ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix}$ (جـ) $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٨ & -٤ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix}$

(٧) إذا كان نظام المعادلات أ س = ج حيث |أ| ≠ ٠ فإن الحل هو ....

(أ) س = أ ج (ب) س = $أ^{-١}$ ج (جـ) س = ج $أ^{-١}$ (د) س = أ $ج^{-١}$

(٨) المصفوفة $□_{٢\times٢}$ رتبتها تساوى.

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) إذا كانت $أ_{م\times ن}$ لها معكوس ضربى فإن

(أ) م > ن (ب) م < ن (جـ) م = ن (د) م = ن ، |أ| ≠ ٠

المجموعة الثانية :

مسائل على المعكوس الضربي للمصفوفة:

بين أى المصفوفات الآتية لها معكوس ضربي وأيهما ليس له معكوس ضربي :

(١) $\begin{pmatrix} ٣ & ١٥ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix}$ [لها معكوس ضربي]

(٢) $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ -٦ & -٩ \end{pmatrix}$ [ليس لها معكوس ضربي]

(٣) $\begin{pmatrix} -٨ & ١٣ \\ -٥ & ٧ \end{pmatrix}$ [لها معكوس ضربي]

(٤) $\begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ ٢٤ & -١٥ \end{pmatrix}$ [ليس لها معكوس ضربي]

(٥) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٨ \\ -١ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ [لها معكوس ضربي]

(٦) $\begin{pmatrix} -١ & ١ & ٢ \\ ٤ & -١ & -٥ \\ ٣ & ١١ & ٨ \end{pmatrix}$ [ليس لها معكوس ضربي]

اوجد قيمة س التى لا تجعل للمصفوفة الآتية معكوس ضربي.

(٧) $\begin{pmatrix} ٣س & -٣ \\ ٣ & ٢-س \end{pmatrix}$ [{٣ ، -١}]

(٨) $\begin{pmatrix} ٢س & س-٤ \\ -٣ & س+١ \end{pmatrix}$ [{$\frac{٣}{٢}$ ، -٤}]

(٩) $\begin{pmatrix} س^{٢} & س & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$ [{-٣ ، ٢}]

(١٠) $\begin{pmatrix} \text{٣س} & ٢ & \text{٣س} - ٢ \\ \text{٢س} - ١ & \text{س} + ١ & ٤ \\ \text{٢س} - ١ & ١ & \text{٢س} \end{pmatrix}$ [{ -٢ ، $\frac{٤}{٥}$ }]

اوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات الآتية:

(١١) $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (١٢) $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$ (١٣) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

(١٤) $\begin{pmatrix} -٧ & ٤ \\ -١١ & ٧ \end{pmatrix}$ (١٥) $\begin{pmatrix} -٤ & -٩ \\ ٦ & ١٤ \end{pmatrix}$ (١٦) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$

(١٧) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٥ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ (١٨) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٩ & ٢ \\ ٥ & ٨ & ٢ \end{pmatrix}$ (١٩) $\begin{pmatrix} ٦ & ٥ & ٣ \\ ٧ & ٨ & ٤ \\ ١٣ & ١٤ & ٧ \end{pmatrix}$

(٢٠) $\begin{pmatrix} ٠ & -\text{جاس} & \text{جتاس} \\ ٠ & \text{جتاس} & \text{جاس} \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢١) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٥ & ٤ \\ ٨ & ٧ & ٦ \end{pmatrix}$ حقق أن $(\text{أ}^{\text{مل}})^{-١} = (\text{أ}^{-١})^{\text{مل}}$

(٢٢) أثبت أن المعكوس الضربي للمصفوفة: $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & \text{ل} \\ ٠ & \text{م} & ٠ \\ \text{ن} & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هو $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & \frac{١}{\text{ل}} \\ ٠ & \frac{١}{\text{م}} & ٠ \\ \frac{١}{\text{ن}} & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ حيث ل م ن $\neq$ ٠

(٢٣) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & -١ & ١ \\ -٢ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ اثبت أن $\text{أ}^{٣} - ٢\text{أ}^{٢} - ٣٢\text{أ} - ٣٤I = \square$ ومن ثم أوجد $\text{أ}^{-١}$

(٢٤) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق المعادلة: $٣ أ س + ٢ ب^{مد} = ٢ ب س + ٣ أ^{-١}$

➢ معادلات الدرجة الأولى باستخدام معكوس المصفوفة:

بإيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة المعاملات أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(١) ٢ س + ص = ٥ ، ٥ س + ٣ ص = ١٣ [(٢ ، ١)]

(٢) ٤ س + ٣ ص = ١ ، ٣ س - ٤ ص = ٧ [(١ ، -١)]

(٣) ٣ س - ٢ ص = ١٣ ، ٥ س + ٩ ص + ٣ = ٠ [(٣ ، -٢)]

(٤) ٣ س - ٧ ص = ٣٣ ، ٥ س + ٢ ص = ١٤ [(٤ ، -٣)]

(٥) ٧ س = ٢ ص + ١٧ ، ٤ س + ٩ ص + ٤١ = ٠ [(١ ، -٥)]

(٦) ٢س + ص - ع = ٦ ، ٣ س - ص + ٢ ع = ٣ ، س + ٢ ص + ٣ ع = ١ [(٢ ، ١ ، -١)]

(٧) ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ٧ ، س- ٦ ص - ٢ ع = -١ ، ٤ س - ص + ٥ ع = ٣ [(٥ ، ٢ ، -٣)]

(٨) س + ص - ع = ٠ ، ٢ س - ص + ع = ٣ ، -س + ٢ ص + ع = ٦ [(١ ، ٢ ، ٣)]

(٩) ٣ س - ص + ٢ ع = ١ ، - س + ٣ ص + ٥ ع = -٩ ، ٢ س - ٧ ص + ع = -٥ [(٢ ، ١ ، -٢)]

(١٠) ٣ س + ٢ ص - ع = ١٩ ، س + ٢ص - ٥ ع = ١٥ ، س - ٣ ص + ٢ ع = -٧ [(٤ ، ٣ ، -١)]

(١١) س + ص + ع = ٦ ، س - ص + ع = ٢ ، س + ص - ع = ٠ [(١ ، ٢ ، ٣)]

(١٢) س + ص +ع = ١ ، ٢س + ٤ ص + ٣ ع = ١ ، ص + ع = ١ [(٠ ، -٢ ، ٣)]

(١٣) س + ع = ٢ ، ٢ س + ص + ٥ ع = ٦ ، ٣ س + ٤ ص + ٢ ع = ١ [(١ ، -١ ، ١)]

(١٤) س- ص + ٣ ع = ٦ ، ٧ س - ٥ ص + ٧ ع = ٢ ، ٩ س - ٣ ص - ٢ ع = -٢٧ [(-٢ ، ١ ، ٣)]

(١٥) س - ص + ٣ ع = ٠ ، ٣ س + ٢ ص + ع = ٠ ، س - ٤ ص + ٥ ع = ٠ [(٠ ، ٠ ، ٠)]

(١٦) س + ص = ٤ ، ص + ع = ١ ، س + ع = -١ [(١ ، ٣ ، -٢)]

بين أى المعادلات الآتية لها حل خلاف الحل الصفرى وأيهما لها حل وحيد.

(١٧) س + ٤ ص - ٢ ع = ٠ ، ٢س - ٣ ص + ع = ٠ ، ٥س + ٣ ص - ع = ٠

[لا يوجد سوى الحل الصفرى أى لها حل وحيد هو الحل الصفرى]

(١٨) س - ٣ ص - ٣ ع = ٠ ، ٣ س + ٥ ص - ٢ ع = ٠ ، ٥ س + ص - ٧ ع = ٠

[لها عدد لا نهائى من الحلول]

أوجد قيمة ك التى تجعل كل مجموعة من المعادلات الآتية لها حل وحيد.

(١٩) ٢ س - ٣ ص = ٠ ، ك س - ٤ ص = ٠ [ك $\neq \frac{٨}{٣}$]

(٢٠) س + ص - ك ع = ٠ ، س - ك ص + ع = ٠ ، ك س - ص - ع = ٠ [ح - {-١ ، ٢ }]

أوجد قيمة ك التى تجعل كل مجموعة من المعادلات الآتية لها عدد لا نهائى من الحلول.

(٢١) ك س + ص = ٠ ، ٤ س + ك ص = ٠ [± ٢]

(٢٢) ك س + ص - ع = ٠ ، س - ص + ٣ ع = ٠ ، س + (٢ ك + ١) ص - ١١ ع = ٠ [٢ك - ١]

(٢٣) ٤ س + ٣ ص = ٠ ، ٢ س + ك ص = ٠ [ك = $\frac{٣}{٢}$]

(٢٤) س - ٢ ص = ٠ ، (ك-١) ص -س = ٠ [ك = ٣]

(٢٥) ٥ س + (ك + ١) ص = ٠ ، ٣ ص + (ك -١) س = ٠ [ك = ±٤]

إوجد رتبة كل من المصفوفات الآتية:

(١)	$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -٥ \end{pmatrix}$	[١]	(٢)	$\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ -١ \end{pmatrix}$	[١]
(٣)	$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$	[صفر]	(٤)	$\begin{pmatrix} ٦ & -٩ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix}$	[١]
(٥)	$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$	[١]	(٦)	$\begin{pmatrix} -٢ & ١+ت \\ ١-ت & -١ \end{pmatrix}$	[١]
(٧)	$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & -٤ \end{pmatrix}$	[٢]	(٨)	$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$	[١]

(٩) $\begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ ٤ & -١٢ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ [١]

(١٠) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ [٢]

(١١) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٠ \\ ٦ & ٤ & ٠ \\ ٩ & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ [١]

(١٢) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ [٣]

(١٣) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٨ \end{pmatrix}$ [٢]

(١٤) $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ -٢ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ [٣]

(١٥) $\begin{pmatrix} -١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$ [٣]

(١٦) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ٤ & -٢ & ٢ \\ -٢ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ [١]

(١٧) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ [٢]

(١٨) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -١ & -١ \\ ٣ & ١ & -١ & ١ \\ -١ & ٢ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ [٣]

(١٩) إذا كانت $ا = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أثبت أن رتبة (ا + ب) = رتبة ا ،

رتبة ا ب = رتبة ب .

بحث إمكانية حل المعادلات الخطية:

ابحث إمكانية حل كل من المعادلات الآتية وأوجد الحل أو صورته :

(١) ٣ س- ص = ١١ ، س - ٣ ص = ٩ [حل وحيد (٣ ، -٢)]

(٢) ٧ س + ٤ ص = ٣ ، ٢١ س + ١٢ ص = ١٥ [لا يوجد حل]

(٣) ٣ س - ٢ ص = ١ ، ٩ س - ٦ ص = ١٣ [لا يوجد حل]

(٤) ٢ س − ص = ٣ ، ٤ س − ٢ ص = ٦

[عدد لا نهائى من الحلول ، صورة الحل (ل ، ٢ ل - ٣)]

(٥) ٣ س − ٥ ص = ٠ ، س + ٢ ص = ٠ [حل وحيد (٠ ، ٠)]

(٦) ص = $\frac{٤}{٣}$ س ، ٣ ص − ٤ س = ٠ [عدد لا نهائى من الحلول صورة الحل (٣ ل ، ٤ ل)]

(٧) ٣ س + ص = ٤ ، ٢ ص = ٨ − ٦س

[عدد لا نهائى من الحلول ، صورة الحل (ل ، ٤ − ٣ ل)]

(٨) ٣ س+ ٢ ص = ٤ ، ٥ س + ص = ٠ ، ٢ س − ٢ ص = ١ [لا يوجد حل]

(٩) ص = ٣ (٥ − س) ٣، س + ص = ٨ ، ٤ ص = ١٩ − ١٢ س [لا يوجد حل]

(١٠) س + ٤ ص + ٣ ع = ١ ٢، س + ٥ ص + ٤ ع = ٤ ، س − ٣ ص − ٢ ع = ٥

[حل وحيد (٣ ، -٢ ، ٢)]

(١١) س − ٢ ص − ٣ ع = ٢ ، س − ٤ ص − ١٣ ع = ١٤ ، -٣ س + ٥ ص + ٤ ع = ٢ [لا يوجد حل]

(١٢) س + ص + ع = ١ ، س − ص + ٢ ع = -٢ ، ٣ س − ص + ٥ع = -٣

[عدد لا نهائى من الحلول ، صورة الحل (٤ − ٣ ل ، ل ، ٢ ل − ٣)]

(١٣) ٣ س + ٢ ص − ع = ١٩ ، س + ٢ ص − ٥ ع = ١٥ ، س − ٣ ص + ٢ ع = -٧

[حل وحيد (٤ ، ٣ ، -١)]

(١٤) ٣ س − ص − ٢ ع = ٢ ، ٢ ص − ع = -١ ٣، س − ٥ ص = ٣ [لا يوجد حل]

(١٥) ٣ س − ص + ٢ ع = ١ ، س + ص + ع = ٣ ، ٥ س + ص + ٤ ع = ٧

[عدد لا نهائى من الحلول]

(١٦) س + ٤ ص − ٢ ع = ٠ ، ٢ س − ٣ ص + ع = ٠ ، ٥ س + ٣ ص − ع = ٠

[لا يوجد سوى الحل الصفرى (٠ ، ٠ ، ٠)]

(١٧) س − ٣ ص − ٣ ع = ٠ ، ٣ س + ٥ ص − ٢ ع = ٠ ، ٥ س + ص − ٧ ع = ٠

[عدد لا نهائى من الحلول، صورة الحل (- ٣ ل ، ل ، - ٢ ل)]

مسائل عامة على إمكانية حل المعادلات الخطية:

عين قيم الثابت ك بحيث يكون لكل من مجموعات المعادلات الآتية:

أولاً: حل وحيد   ثانياً: عدد لا نهائى من الحلول   ثالثاً: لا حل على الإطلاق.

(١) س + ك ص = ٢ ، ك س = ك + ٢ - ٤ ص

[حل وحيد عندما ك ≠ ±٢ ، لا حل عندما ك = -٢ ، عدد لا نهائى من الحلول عندما ك = ٢

(٢) س + ص - ع = ١ ، ٢ س + ٥ ص + ك ع = ٥ ، س + ك ص + ٤ ع = ٢

[أولاً ك ≠ -٥ أ، ك ≠ ٤ ثالثاً ك = -٥ ، ك = ٤]

(٣) س + ص + ك ع = ١ ، س + ك ص + ع = ١ ، ك س + ص + ع = ١

[أولاً: ك ≠ ١ أ، ك ≠ -٢ ثانياً: ك = ١ ثالثاً ك = -٢]

(٤) س+ ٣ ص + ٢ ع = ١ ، ٢ س + ٤ ص + ٣ ع = ك ، ك س + ص + ع = ٠

[أولاً ك ≠ ١ ثانيا ك = ١ ثالثاً ك ≠ أى قيمة ٠]

(٥) س - ٣ ص = -٣ ، ٢ ص + ك ع - س = -٢ ، ص + ٢ ع + ل س = ١

[أولاً: ك ≠ ٢ أ، ك ≠ -٥ ثانياً: ك = ٢ ثالثاً ك = -٥]

(٦) ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ك ، س + ص + ك ع = ك٢.

[أولاً ك = ١ أ، ك = -٢ ثانياً ك = ١ ثالثاً ك = -٢]

(٧) س + ص + ك ع = ٢ ، ٢ س + ك ص + ٤ ع = ٥ ،

[أولاً ك ≠ أى عدد ثانياً ك ≠ ٢ ثالثاً ك = ٢]

(٨) إذا كان : ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ك ، س + ص + ك ع = ك٢ ابحث إمكانية الحل واكتب الحل أن وجد وذلك عندما: أولاً: ك = ١ ثانياً: ك = -١ ثالثاً : ك = -٢

[أولاً: عدد لا نهائى ثانياً: حل وحيد (٠ ، ١ ، ٠) ثالثاً: لا يوجد حل]

(٩) أوجد قيمة ك بحيث تكون مجموعة المعادلات:

٢ س - ك ص + ٤ ع = ١ ، ك س - ص = ٢ ، س + ٢ ص - ٤ ع = ١

أولاً: لها عدد لا نهائى من الحلول **ثانيا:** لا حل على الإطلاق [أولاً: ك = ٣ ، ثانياً: ك = -١٠]

(١٠) أوجد العلاقة بين الثوابت ك ، ل ، م بحيث يكون لمجموعة المعادلات الآتية أكثر من حل.

س + ٣ ص + ٢ ع = ك ، ٢ س - ص + ع = ل ، ٣ س + ٢ ص + ٣ ع = م [ك + ل - م = ٠]

(١١) أوجد جميع قيم جـ التى تجعل لمجموعة المعادلات الآتية حل:

س + ص + ع = ١ ، س + ٢ ص + ٤ ع = جـ ، س + ٤ ص + ١٠ ع = جـ^{٢} [جـ = ١ أ، جـ = ٢]

المجموعة الثالثة:

تمارين (٣-٢) من الكتاب المدرسي

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية :

(١) المصفوفة المنفردة بين المصفوفات التالية هى :

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix}$

(٢) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & س \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ منفردة هى :

(أ) - ٢ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٣) جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة :

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت أ ، ب مصفوفات غير منفردة فإن (أب)$^{-١}$ تساوى ...

(أ) أ ب (ب) أ$^{-١}$ ب$^{-١}$ (جـ) ب$^{-١}$ أ$^{-١}$ (د) (أ^{٢})$^{-١}$

ثانياً : أجب على ما يأتي :

(٥) أوجد قيمة س التى تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردة :

(أ) $\begin{pmatrix} \text{س} - ٣ & ٢ \\ ٧ & \text{س} + ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢\text{س} & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \text{س} + ٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & \text{س} - ١ & ١ \end{pmatrix}$

(٦) أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات الآتية :

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \text{جا}\theta & \text{جتا}\theta \\ \text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \text{قا}\theta & \text{ظا}^{٢}\theta \\ ١ & \text{قا}\theta \end{pmatrix}$

(هـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (و) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (ز) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ -٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (ح) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(٧) إذا كان أ $= \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ فحقق أن : $(\text{أب})^{-١} = \text{ب}^{-١}\text{أ}^{-١}$

(٨) إذا كان أ $= \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٢ & -١ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ فحقق أن $(\text{أ}^{\text{مد}})^{-١} = (\text{أ}^{-١})^{\text{مد}}$

(٩) إذا كان أ $= \begin{pmatrix} -٣ & ٤ & ٠ \\ ٢ & -١ & ٥ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ فحقق أن : $(\text{أ}^{٢})^{-١} = (\text{أ}^{-١})^{٢}$

(١٠) تفكير إبداعي: إذا كان : أ $= \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ اثبت أن : $\text{أ}^{٢} - ٧\text{أ} - ٨I = \boxed{}$ واستخدام ذلك فى إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة أ.

تمارين (٣-٣) من الكتاب المدرسي

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) من بين الأنظمة الخطية الآتية، مجموعة المعادلات المتجانسة هى :

(أ) ٢ س + ص = ٣ ، س + ٢ ص = ٢ (ب) س − ص = ٠ ، س + ٢ ص = ١٢

(جـ) ٣ س + ص = ١ ، ٢ س + ص = ٠ (د) س − ٢ ص = ٠ ، ٣ س + ص = ٠

(٢) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$ فإن $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

(٣) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ & ٦ \end{pmatrix}$ فإن ر (أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٤) رتبة مصفوفة الوحدة $I_{٣}$ من الدرجة :

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٥) رتبة المصفوفة $\boxed{}$ من النظم ٣ × ٣ من الدرجة :

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٦) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢- & ٣ \\ \text{ك} & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١- \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ فإن ك = ...

(أ) − ٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٦

(٧) إذا كان م عدد المعادلات الخطية، ن عدد المجاهيل فإن المصفوفة الموسعة تكون على النظم:

(أ) م × ن (ب) م × (ن + ١) (جـ) (م + ١) × ن (د) (م + ١) × (ن + ١)

(٨) رتبة المصفوفة الموسعة للنظام : ٢ س - ٣ ص = ٥ ، ٦ س - ٩ ص = ١٥ هى :

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) عدد حلول النظام: ٢ س + ٥ ص = صفر، ٣ س - ع = ٠ ، ٢ ص - ٣ ع = ٠ هو ....

(أ) الحل الصفرى فقط. (ب) لا يوجد حل على الإطلاق.

(جـ) عدد لا نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى.

(د) عدد لا نهائى من الحلول منها الحل الصفرى

(١٠) يوجد للنظام $\begin{pmatrix}٣&٢&٢\\-٣&-٢&١\\-٣&-٢&٤\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\\\text{ع}\end{pmatrix} = \boxed{}$

(أ) الحل القافه. (ب) عدد لا نهائى من الحلول.

(جـ) عدد لا نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى. (د) لا يوجد حل على الإطلاق.

(١١) حل المعادلات المصفوفة الآتية :

(أ) $\begin{pmatrix}٣&٥\\٢&٣\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٤\\٠\end{pmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix}-١&٣\\٢&١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{أ}\\\text{ب}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٥\\٤\end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix}١&١\\-١&١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{جـ}\\\text{د}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٧\\٣\end{pmatrix}$

(د) $\begin{pmatrix}٢&٠&١\\-١&١&٠\\٠&١&١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ب}\\\text{جـ}\\\text{د}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٥\\١\\٧\end{pmatrix}$

(هـ) $\begin{pmatrix}١&١&١\\-١&-١&٢\\-١&٢&٣\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\\\text{ع}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٢\\١\\-١\end{pmatrix}$

(و) $\begin{pmatrix}١&١&١\\١&-١&٢\\-١&١&١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\\\text{ع}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٦\\٣\\٠\end{pmatrix}$

(١٢) اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتى - ثم حل هذا النظام باستخدام طريقة معكوس المصفوفة.

(أ) ٢ س + ص + ع = ٠ ، ٣ س + ٢ ص + ٣ ع = ١٢ ، ٤ س + ص + ٢ ع = - ١

(ب) س + ٣ ص + ٢ ع = ٠ ، س + ع = - ١ ، س + ٢ ص = ٣

(جـ) ٢ س + ص + ٣ ع = ٠ ، س + ص = - ١ ، ص + ٢ ع = ٣

(د) ٤ س + ٣ ص - ٥ ع = ٦ ، ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢ ، س- ص + ع = ٢

(١٣) بين أن للأنظمة الآتية حلا صفريا فقط.

(أ) ٢ س + ٧ ص + ٣ ع = ٠ ، ٣ س + ص − ٢ ع = ٠ ، ٤ س − ٣ ص − ع = ٠

(ب) س − ٢ ص + ٢ ع = ٠ ، ٣ س + ٤ ع = ٠ ، ٦ ع − ص = ٠

(جـ) س + ٢ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٠ ، ٣ س − ٤ ص + ٢ ع = ٠

(١٤) بين أن للأنظمة الآتية عدد لا نهائى من الحلول وأكتب صورة الحل :

(أ) س + ٢ ص + ٣ ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ٠ ، ٣ س − ص + ٢ ع = ٠

(ب) ٢ س − ص + ٣ ع = ٠ ، ٤ س − ٢ ص + ٦ ع = ٠ ، س + ٢ ع = ٠

(جـ) ٣ س − ٥ ص − ٢ ع = ٠ ، ٢ س + ص + ٣ ع = ٠ ، − س + ٣ ص + ٢ ع = ٠

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة الثالثة

أكمل ما يأتى :

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\begin{vmatrix} ٢٦ & ٢٥ & ٢٤ \\ ٢٩ & ٢٨ & ٢٧ \\ ٣٢ & ٣١ & ٣٠ \end{vmatrix} = ...$

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٥٦

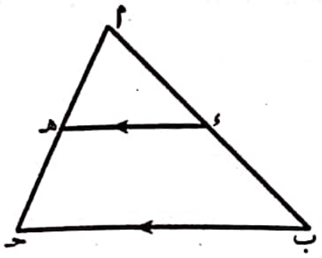
(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٢ \\ ٠ & \text{س} & ٤ \\ ٥ & ٧ & \text{س} \end{vmatrix} =$ صفر هى ......

(أ) {٢} (ب) {٥} (جـ) {٧} (د) {١٠}

(٣) $\begin{vmatrix} \text{ا+جـ} & \text{جـ+ب} & \text{ا+ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ...$

(أ) − ١ (ب) صفر (جـ) ا + ب + جـ (د) ا ب جـ

(٤) في الشكل المقابل : $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$



$$\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ \text{دهـ} & \text{اد} & \text{اهـ} \\ \text{بجـ} & \text{اب} & \text{اجـ} \end{vmatrix} = \ldots$$

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) صفر

(٥) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} - ١ & ٢ \\ ٤ & \text{س} + ١ \end{pmatrix}$ منفردة هى ......

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) ± ٣ (د) ٩

(٦) جميع المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة :

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & -٦ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & -٨ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

(٧) إذا كانت المصفوفة $\text{ا} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & -٦ & -٩ \end{pmatrix}$ فإن ر (أ) = ...

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية : بدون فك أى من المحددات الآتية اثبت أن :

(٨) $\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & ١ + \text{ب}^٢ & \text{بجـ} \\ \text{جـ} & \text{بجـ} & ١ + \text{جـ}^٢ \end{vmatrix} = ١$

(٩) $\begin{vmatrix} ١ & \text{بجـ} & \text{جـا} + \text{اب} \\ ١ & \text{جـا} & \text{اب} + \text{بجـ} \\ ١ & \text{اب} & \text{بجـ} + \text{جـا} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

(١٠) $\begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص} - ٢ & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & ٢\text{س} + \text{ص} - ١ & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س} + ٢\text{ص} + ١ \end{vmatrix} = ٢(\text{س} + \text{ص} + ١)^٣$

(١١) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ -٢\text{س} + ٢\text{س}^٢ & ١ + ٢\text{س}^٢ & ٢\text{س}^٣ \\ -٣ + ٢\text{س}^٢ & ٣\text{س}^٢ & ١ + ٣\text{س}^٣ \end{vmatrix} = ١ + ٢\text{س} + ٣\text{س}^٢$

(١٢) $\begin{vmatrix} \text{س} + \text{ا} & \text{س} + \text{ا} & ٢\text{ا} \\ \text{ا} & \text{س} & \text{ا} \\ ٠ & \text{ا} - \text{س} & \text{س} - \text{ا} \end{vmatrix} = (\text{س} + ٢\text{ا})(\text{س} - \text{ا})^{٢}$

(١٣) $\begin{vmatrix} ١ & \text{ا} & \text{ب جـ} \\ ١ & \text{ب} & \text{جـ ا} \\ ١ & \text{جـ} & \text{ا ب} \end{vmatrix} = (\text{ا} - \text{ب})(\text{ب} - \text{جـ})(\text{جـ} - \text{ا})$

(١٤) إذا كان (س − ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & \text{س} + ١ \\ -١ & ١ & \text{س} + \text{ك} \end{vmatrix}$ أوجد قيمة ك .

(١٥) أوجد قيمة ك بحيث تكون س عاملاً للمحدد $\begin{vmatrix} \text{س} + ١ & ١ & ١ \\ \text{ك} & ١ & ٣ \\ \text{س} & ١ & ١ \end{vmatrix}$

ثالثاً : ابحث إمكانية حل كل من المعادلات الآتية وأوجد الحل الوحيد إن وجد :

(١٦) س + ٢ ص + ع = ٣ ، ٤ س − ص − ع = ٦ ، س + ص + ٣ ع = ١٠

(١٧) س + ص + ع = ١ ، ٢ س − ص + ٣ ع = − ٥ ، ٣ س + ٢ ص + ٣ ع = صفر

(١٨) س + ٢ ص − ٣ ع = ٠ ، ع − س − ٢ ص = ٠ ، ٢ س + ٤ ص − ٦ ع = ٠

(١٩) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix} \text{س} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(٢٠) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٣ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \text{س} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٦ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(٢١) $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ & -٦ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{س}} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ -١ \end{pmatrix}$

اختبارات كتاب المدرسة التراكمية على الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{ه} & \text{ء} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = ٢$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & ٥\text{ا} \\ \text{و} & \text{ه} & ٥\text{ء} \\ ٧\text{ع} & ٧\text{ص} & ٣٥\text{س} \end{vmatrix} = \ldots$

(أ) − ٧٠   (ب) ١٠   (جـ) ٣٥   (د) ٧٠

(٢) إذا كان $\text{ا} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان ا × جـ = ب فإن جـ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٨ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & -١١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & -١٧ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٦ & -٩ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

(٣) تكون المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{ا} & ٢ \\ ٨ & \text{ا} \end{pmatrix}$ منفردة اذا كانت ا =

(أ) − ٤   (ب) ٤   (جـ) ± ٤   (د) ١٦

(٤) اذا كان $\text{ا}^{-١} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ وكان : $\text{ا} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن ص = ...

(أ) ٥   (ب) ٦   (جـ) ٧   (د) ٨

(٥) $\begin{vmatrix} \text{ج} & ٥ & \text{ا}+\text{ب} \\ \text{ا} & ٥ & \text{ب}+\text{ج} \\ \text{ب} & ٥ & \text{ا}+\text{ج} \end{vmatrix} = \ldots$

(أ) ٥   (ب) ٤   (جـ) ٣   (د) صفر

(٦) إذا كان للمعادلات : س + ٢ ص + ٣ ع = ٥ ، ٢ س − ٣ ص + ك ع = ١٣ ،

٣ س + ك ص + ٢ ع = ٣ حل وحيد فإن ك ∋ ....

(أ) ح　　(ب) ح − {} 　　(جـ) ح − {١٣}　　(د) ح − {−١ ، ١٣}

(٧) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & -٣ & ١ \\ ٦ & ٩ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن ر (أ) = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٣

(٨) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$ فإن ر (أ^مد) = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٣

(٩) $|أ| = ٢ أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٠) بدون فك المحدد اثبت أن : $\begin{vmatrix} ٣س & ٣س & ٣س \\ ١ & ب & أ \\ ١+ب & ١+أ & ب+١ \end{vmatrix} =$ صفر

(١١) احسب رتبة المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٥ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$

(١٢) بدون فك المحدد اثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{١}+\text{ص} \\ \text{١} & \text{١}+\text{ص} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{ص}^{\text{٢}}$$

(١٣) باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

٢ س + ٢ ص − ع = ٣ ، ٣ س + ص = ٥ ، س + ص + ٢ ع = ٩

(١٤) باستخدام خواص المحددات اثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{أ}+\text{س} \\ \text{س} & \text{ب}+\text{س} & \text{س} \\ \text{جـ}+\text{س} & \text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{أب جـ} + \text{س}(\text{أب} + \text{ب جـ} + \text{أ جـ})$$

(١٥) ابحث إمكانية حل المعادلات الآتية :

س − ص + ع = ٢ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٥ ، ٣ س − ٥ ص + ٢ ع = − ١

(١٦) إذا كان :
$$\begin{vmatrix} \text{ع}+\text{٢} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{ص}+\text{٢} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س}+\text{٢} \end{vmatrix} = -\text{٤}$$
أوجد قيمة س + ص + ع

(١٧) بين أى من المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة :

(أ) $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{١} & \text{٣} \\ \text{٥} & -\text{٢} \end{pmatrix}$

(ب) $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{١٦} & \text{٨} \\ \text{٤} & \text{٢} \end{pmatrix}$

(جـ) $\text{ع} = \begin{pmatrix} \text{٣} & \text{١} & \text{١} \\ -\text{١} & \text{١} & \text{٠} \\ -\text{٤} & \text{٠} & \text{٢} \end{pmatrix}$

(د) $\text{د} = \begin{pmatrix} \text{٢} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٤} & \text{٢} & \text{٢} \\ \text{٦} & \text{٣} & \text{٣} \end{pmatrix}$

المجموعة الرابعة:

تمارين مختارة من إمتحانات الثانوية العامة لسنوات سابقة

■ (١) مصر (٧٣) : أثبت أن مجموعة المعادلات: س + ٢ ص + ٣ ع = ١٤ ، ٢ س - ص - ع = ٠ ، ٣س + ٢ ص + ع = ١٠ لها حل وحيد وأوجد هذا الحل ثم بين أنه إذا استبدلت المعادلة الأخيرة بالمعادلة ٣ س + ص + ٢ ع = ١٤ فإن المجموعة الجديدة من المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول.

[٢ ، ٠ ، ٤]

■ (٢) السودان (٧٣) :

(أ) أثبت أن مجموعة المعادلات : ٣ س + ص - ٢ ع = -٣ ، ٢ س + ٧ ص + ٣ ع = ٩ ، ٤ س - ٣ ص - ع = ٧ لها حل وحيد وأوجد.

[٢ ، -١ ، ٤]

(ب) أوجد قيم ل ، م بحيث يكون لمجموعة المعادلات الآتية عدد لا نهائى من الحلول س + ص + ع = ٥ ، ٢س - ص + ٣ ع = ل ، م س + ٥ ص + ع = ٠

[٢٠ ، ٢]

■ (٣) مصر (٧٤)

(أ) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ١٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ أثبت أن: (ب$^{-١}$ أ ب) مصفوفة قطرية.

(ب) أوجد قيمة ك عندما لا يكون لمجموعة المعادلات الآتية أى حل على الإطلاق:

(ك + ١) س -٢ ص = ٣ ، (ك - ٢) س + ك ص = ٥

[ك = -٤ ، ١ ، ١]

(جـ) أوجد قيمة ك التى تجعل مجموعة المعادلات: س + ص - ع = ٠ ، ك س - ٣ ص + ع = ٠ ، س - ٤ ص + ك ع = ٠ لها حل غ الحل الصفرى و اكتب صورة الحل

[ك = ٢ أ، -١ ، **صورة الحل عند ك= ٢ هي (٢ل ،٣ل، ٥ ل) وعند ك = - ١ هي(ل ،٠ ، ل)**]

■ (٤) السودان (٧٤) : أوجد قيم الثابت ك بحيث يكون لمجموعة المعادلات الآتية:

ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ك ، س + ص + ك ع = ك^{٢}

أولاً: حل وحيد [ح - {١ ، -٢}]

ثانياً: عدد غير محدود من الحلول [١]

ثالثاً: لا حل على الإطلاق. [-٢]

■ (٥)مصر ١٩٧٥ : إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ أثبت أن : $أ^{٢} - ٤أ - ٥ I_{٣} = \square$

ثم استخدم هذه العلاقة لايجاد $أ^{-١}$.

■ (٦) السودان (٧٥) : أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

واستخدام ذلك لحل المعادلات: س + ص = ١٠ ، ص + ع = ٣ ، س + ع = -١ [٣ ، ٧ ، -٤]

■ (٧) مصر (٧٦) : أوجد رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ١- & ١ & ٢ \\ ٢ & ١- & ٣ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ومن ذلك أثبت أن مجموعة المعادلات :

٢ س + ص − ع = ٦ ، ٣ س − ص + ٢ ع = ٣ ، س + ٢ ص + ٣ ع = ١ حل وحيد وأوجد هذا الحل.

[**الرتبة = ٣ ، الحل** (٢ ، ١ ، -١)]

■ (٨) مصر (٧٧) :

(أ) أثبت أن المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ١ & ٣- & ٢ \\ ٢١ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربي وأوجد هذا المعكوس واستخدمه لحل

مجموعة المعادلات : س − ص + ٢ ع = ٥ ، ٢ س − ٣ ص + ع = -١ ، س + ٥ ص + ٢١ ع = ٧٤

[١ ، ٢ ، ٣]

(ب) عين قيمة الثابت ك بحيث يكون لمجموعة المعادلات الآتية أكثر من حل:

س- ص + ٣ ع = ١ ، ٢ س + ص − ع = ٠ ، ٢ س + ص + ك ع = ٠ واكتب صورة الحل

[**ك = -١ ، صورة الحل** ($\frac{١ - ٢ل}{٣}$ ، $\frac{٧ل - ٢}{٣}$ ، ل)]

■ (٩) مصر (٧٨) عين قيمة الثابت ك بحيث يكون لمجموعة المعادلات الآتية:

س + ص + ع = ١ ، س + ص + ك ع = ك ، ك س + ٢ ص + ٣ ع = -١

أولاً: حل واحد. [ك = ح - {١ ، ٢}]

ثانياً: لا حل على الإطلاق [ك = ٢]

ثالثاً : عدد لا نهائى من الحلول. [ك = ١]

■ (١٠) مصر (٧٩) :

(أ) أوجد رتبة المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

[ر (أ) = ٣]

(ب) أوجد جميع قيم ك التى تجعل لمجموعة المعادلات الآتية حلاً.

س + ص + ع = ١ ، س + ٢ ص + ٤ ع = ك ، س + ٤ ص + ١٠ ع = ك^{٢}

[حل وحيد عندما ك ≠ أى قيمة ، عدد لا نهائى عندما ك = ١ أو ك = ٢]

■ (١١) السودان (٧٩) أوجد رتبتى المصفوفتين $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٣ \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & -٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ وبين

أن مجموعة المعادلات : س + ٣ ص + ع = ١ ، ٢ س - ص - ٣ ع = ٢ ، ٣ س + ٢ ص - ٢ع = ٣ لها أكثر من حل.

■ (١٢) مصر ١٩٨٠

(أ) أوجد رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٦ & ٤ \\ ٢ & ١ & -٢ & ٠ \\ ٤ & -٣ & ١٠ & ٨ \end{pmatrix}$ ثم حل مجموعة المعادلات

$$\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٦ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٣ & ١٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \\ ٨ \end{pmatrix}$$

(ب) ابحث إمكانية حل مجموعة المعادلات: ٢ س - ص = ١ ، ٤ ص - ٥ س = ٢ ، ٩ س - ٥ ص = ٣

■ (١٣) مصر (٨١)

(أ) بإيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ حل المعادلة أ س = ب حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & ١ & ٢ \end{pmatrix} ، س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} ، ب = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٢ \\ ٦ \end{pmatrix}$$

(ب) أوجد قيمة ك ليكون للمعادلات : ٣ س + ك ص + ٢ ع = ٥ ، ك س + ٣ص + ٢ ع = ٥ ، س - ص + ٢ ع = ك

أولاً: حل وحيد.

[ح - {١ ، ٣}]

ثانياً: لا حل على الإطلاق. [١]

ثالثاً: أكثر من حل . [٣]

■ (١٤) مصر (٨٢) : اثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل غير الحل الصفرى.

٢ س – ص + ٣ ع = ٠ ، ٤ س + ٥ ص – ع = ٠ ، س + ٣ ص – ٢ ع = ٠ واكتب صورة الحل

[صورة الحل (- ل ، ل ، ل)]

■ (١٥) مصر (٨٣) :

(أ) ابحث نوع الحل للمعادلات : س – ص + ع = ٠ ، ٢ س – ٢ ص + ٢ ع = ٠ ، ٢ س + ص = ٠

[عدد لا نهائى من الحلول]

(ب) أوجد رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -٢ & ٧ \\ ٢ & -٢ & ٥ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ثم بين ما إذا كان للمجموعة

٢ س+ص= ١ ، ٦ س – ٢ ص = ٧ ، ٢ س – ٢ ص = ٥ ، ٤ س + ص = ٠

أولا: حل وحيد ثانيا: عدد لا نهائى من الحلول ثالثا: لا حل على الإطلاق. [لا حل]

■ (١٦) مصر (٨٤) : أوجد العلاقة بين ك ، ل ، م التى تجعل لمجموعة المعادلات الآتية أكثر من حل: س + ٢ ص – ٣ ع = ك ، ٣ س – ص + ٢ ع = ل ، س -٥ ص + ٨ ع = م (م – ل + ٢ ك = ٠)

■ (١٧) مصر (٨٥)

(أ) أوجد قيمة ك ليكون للمعادلات : ٣ س + ك ص + ٢ ع = ٥ ، ك س + ٣ ص + ٢ ع = ٥ ،

٥ س – ص + ٢ ع = ك

أولاً: حل وحيد. [ح – {١ ، ٣}]

ثانياً: لا حل على الإطلاق [١]

ثالثاً: أكثر من حل . [٣]

(ب) إذا كانت ا= $\begin{pmatrix} ١ & ك & ١ \\ ٢ & -١ & -ك \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة ك بحيث تكون ر (أ) = ٢ ومن ثم ابحث إمكانية حل مجموعة المعادلات.

س + ك ص + ع = ١ ، ٢ س – ص – ك ع = ٢ ، ٣ س + ٢ ص – ٢ ع = ٣ [ك = ٣]

■ (١٨) مصر (٨٧) إذا كانت $ج = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ك \\ ١ & ك & -٣ \end{pmatrix}$ أوجد ك بحيث ر (ج) = ٢

ومن ثم ابحث إمكانية حل مجموعة المعادلات : س + ص + ٥ ع = ٧ ،

٢ س + ٣ ص + ك ع = ٥ ، س + ك ص - ٣ ع = -٢ .

[ك = ٢]

■ (١٩) السودان (٨٧) :

(أ) عين رتبة المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٥ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$

(ب) اوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$

■ (٢٠) مصر (٨٨) : أوجد جميع قيم ك التى تجعل مجموعة المعادلات الآتية حلاً.

س + ص + ع = ١ ، س + ٢ ص + ٤ ع = ك ، س + ٤ ص + ١٠ ع = ك^{٢} .

[لا توجد قيمة لـ ك تجعل للمعادلات حل وحيد، عدد لا نهائى من الحلول عند ك= ١ وعند ك= ٢]

■ (٢١) مصر (٨٩): عين قيمة الثابت ك حتى يكون لمجموعة المعادلات الآتية:

(أ) حل وحيد (ب) عدد لا نهائى (ج) لا حل على الإطلاق

س + ص - ع = ١ ، ٢ س + ٣ ص + ك ع = ٣ ، س + ك ص + ٣ ع = ٢

(أ) ك ∋ ح- {-٣ ، ٢ } (ب) ك = ٢ (ج) ك = -٣ .

■ (٢٢) مصر (٩٠)

(أ) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، I هى مصفوفة الوحدة فأوجد قيم س ∋ ح التى تجعل للمصفوفة

(س+١) I - ٢ أ معكوساً ضربياً ثم أوجد هذا المعكوس عندما س = ٢

[س ∋ ح - {١ ، -٣ ، ١١}]

(ب) أوجد قيم ك التى تجعل لمجموعة المعادلات : ٢ س- ص = ك ، ٣ ص - ٢ ع = ١ ، ٣

ك ع - س = ٢

أولاً: حل وحيد [ك ∋ ح - $\left\{\frac{١}{٩}\right\}$]

ثانياً: لا حل. [ك = $\frac{١}{٩}$]

ثالثاً: عدد لا نهائى من الحلول. [لا توجد قيمة لـ ك]

(ج) عين رتبة المصفوفة م = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ & ١- \\ ٣ & ١- & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٣- \end{pmatrix}$ ومن ثم بين إمكانية حل مجموعة المعادلات

الخطية المتجانسة م س = □ . حيث □ = المصفوفة الصفرية

[ر (م) = ٢ ، يوجد عدد لا نهائى من الحلول]

اختبار كتاب لامي للمراجعة على (المحددات والمصفوفات)

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] (أ) اكمل :

(١) $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix}$ = ... $\begin{vmatrix} ب & أ \\ ء & جـ \end{vmatrix}$

(٢) فى نظام للمعادلات إذا كان ر (أ) = ر (أ*) = عدد المجاهيل فإن المعادلات يكون لها ....

(ب) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) رتب المصفوفة لا تتغير وذلك :

(أ) أضفنا عدد ثابت لعناصر صف.	(ب) إذا أضفنا عمود من أعمدة المصفوفة.

(جـ) إذا أضفنا صف جميع عناصرة أصفار.	(د) إذا أضفنا عمود للمصفوفة.

(٢) مجموعة المعادلات أ س = □ يكون لها عدد لا نهائى من الحلول إذا كان:

(أ) |أ| ≠ ٠	(ب) |أ| = صفر	(جـ) ر (أ) = ر (أ*)	(د) ر (أ) ± ر (أ*)

[٢] (ا) بدون فك المحدد اثبت أن: $\begin{vmatrix} ا+ب & ب+جـ & جـ+ا \\ ب+جـ & جـ+ا & ا+ب \\ جـ+ا & ا+ب & ب+جـ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ا & ب & جـ \\ ب & جـ & ا \\ جـ & ا & ب \end{vmatrix}$

(ب) إوجد رتبة كل من المصفوفات: $ا = \begin{pmatrix} ٣ & -٦ \\ -٢ & ٤ \\ ٥ & -١٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٢ & ١ & -١ \end{pmatrix}$

[٣] (ا) استخدم المعكوس الضربى للمصفوفة لايجاد حل المعادلات:

س + ٢ص − ع = ٣ ، ٣ س + ٥ ص + ٢ ع = -١ ، ٢ س + ٣ ص + ع = ٠

(ب) اثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل خلاف الحل الصفرى واكتب صورة الحل.

س + ص − ع = ٠ ، ٢ س − ٣ ص + ع = ٠ ، س − ٤ ص + ٢ ع = صفر

[صورة الحل : (٢ ل ، ٣ ل ، ٥ ل)]

الاختبار الثاني

اجب عن السئلة الآتية :

[١] (ا) اكمل :

(١) $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} =$ ....

(٢) إذا كانت $ا = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ -١ & ٥ & ٤ \\ ك-١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ر (ا) = ٣ فإن ك ± ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

(ب) اختر اجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) المعكوس الضربى للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ هو ....

(ا) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٣} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٦} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٦} \end{pmatrix}$ (جـ) $\frac{١}{٦}\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت $أ^{-١} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $أب = \begin{pmatrix} ١٧ & ٨ \\ ١١ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٤ & -١ \end{pmatrix}$ (ب) (-١) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٤ & -١ \end{pmatrix}$

(جـ) $\frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٥ & +٤ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$ (د) ٣ $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$

[٢] (أ) إذا كان $\begin{vmatrix} أ^{٢} & اس + بجـ & ١ \\ ب^{٢} & بس + اجـ & ١ \\ جـ^{٢} & جـس + اب & ١ \end{vmatrix}$ = صفر ، أ ± ب ± جـ

بدون فك المحدد أثبت أن : س = أ + ب+ جـ .

(ب) أوجد قيمة ك بحيث يكون لمجموعة المعادلات الآتية حلاً غير الحل الصفرى واكتب صورة الحل

س + ٢ ص + ٣ ع = ٠ ، ٣ س + ٦ ص + ٨ع = ٠ ، ٤ س + ك ص + ١٢ ع = ٠

[صورة الحل (-٢ ، ل ، ٠)]

[٣] (أ) اكتب المعادلات الآتية : $\left(\begin{array}{c|ccc} -٣ & -٢ & ١ & ٣ \\ ٩ & ٣ & ٧ & ٢ \\ ٧ & -١ & -٣ & ٤ \end{array}\right)$ فى صورة

أ س = جـ ثم أوجد حلها باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة أ.

(ب) أوجد قيمة ك التى تجعل المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٢ \\ ك & -٤ & -٤ \\ ١ & ك & ٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة.

ثانيا: الهندسة الفراغية

الوحدة الأولى:

الهندسة والقياس في بعدين وثلاث أبعاد

١ـ النظام الإحداثي المتعامد في ثلاث أبعاد

٢ـ المتجهات في الفراغ

٣ـ ضرب المتجهات

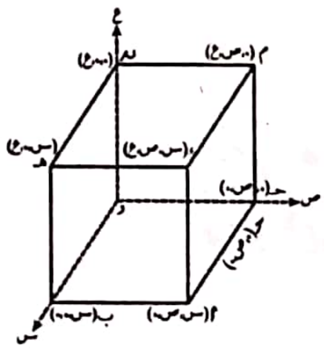
تمارين عامة

تمارين واختبارات الكتاب

اختبارات عامة

النظام الإحداثى المتعامد في ثلاث أبعاد

▪ مفاهيم أساسية:



المحاور $\overleftrightarrow{س وس'}$ ، $\overleftrightarrow{ص وص'}$ ، $\overleftrightarrow{ع وع'}$ ثلاثة محاور متعامدة مثنى مثنى وتتلاقى فى نقطة الأصل و = (٠ ، ٠ ، ٠) وبذلك تتحدد ثلاثة مستويات متعامدة مثنى مثني م (٠ ، ص ، ع) تقسم الفراغ إلى ثمان أجزاء كل جزء يسمى ثمن

▪ قاعدة اليد اليمنى:

عند تكوين النظام الإحداثي المتعامد في ثلاث أبعاد يجب اتباع قاعدة اليد اليمنى حيث تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه دوران الاتجاة الموجب لمحور س إلى الاتجاة الموجب لمحور ص وبذلك يشير الابهام إلى الاتجاه الموجب لمحور ع.

▪ مستويات الإحداثيات:

- جميع النقط في الفراغ التي إحداثيها (س ، ص ، ٠) تقع في المستوى الإحداثي س ص وتكون معادلته ع = ٠ ، وتكون معادلته أي مستوى يوازى هذا المستوى هي ع = ثابت وليكن جـ وتكون النقط الواقعة في هذا المستوى الموازي على الصورة (س ، ص ، جـ).

- جميع النقط في الفراغ التي إحداثيها (س ، ٠ ، ع) تقع في المستوى الإحداثي س ع وتكون معادلته هي ص = ٠، وتكون معادله أي مستوى // هذا المستوى هي ص = ثابت وليكن ب وتكون النقط الواقعة في هذا المستوى الموازي على الصورة (س ، ب ، ع).

- جميع النقط في الفراغ التي إحداثيها (٠ ، ص ، ع) تقع في المستوى الإحداثي ص ع وتكون معادلته س = ٠ وتكون معادلة أي مستوى يوازى هذا المستوى هي س = ثابت وليكن أ وتكون النقط الواقعة في هذا المستوى الموازي على الصورة (أ ، ص ، ع).

- جميع النقط الواقعة على محور السنيات تكون على الصورة (س ، ٠ ، ٠).

- جميع النقط الواقعة على محور الصادات تكون على الصورة (٠ ، ص ، ٠).
- جميع النقط الواقعة على محور العينات تكون على الصورة (٠ ، ٠ ، ع).

البُعد بين نقطتين في الفراغ:

إذا كانت م (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) نقطتان في الفراغ فإن البُعد بينهما هو :

$$\boxed{\text{م ب} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢ + (\text{ع}_٢ - \text{ع}_١)^٢}}$$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة:

إذا كانت م (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) نقطتان فى الفراغ فإن النقطة جـ التى تنصف $\overline{\text{م ب}}$ هي :

$$\boxed{\text{جـ} = \left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢} ، \frac{\text{ع}_١ + \text{ع}_٢}{٢}\right)}$$

معادلة الكرة في الفراغ:

- **الكرة:**

تعرف الكرة على أنها مجموعة نقط الفراغ التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة (تسمى مركز الكرة) بُعداً ثابتاً يسمى نصف قطر الكرة.

- إذا كان مركز الكرة (ل ، ك ، ىه) وطول نصف قطرها نوه فإن معادلة الكرة هي:

$$\boxed{(\text{س} - \text{ل})^٢ + (\text{ص} - \text{ك})^٢ + (\text{ع} - \text{ىه})^٢ = \text{نوه}^٢}$$

- **الدائرة العظمى في الكرة:**

هي دائرة مركزها هو مركز الكرة وطول نصف قطرها يساوى طول نصف قطر الكرة وتنشأ عن قطع الكرة بأى مستوى يمر بمركز الكرة.

الصورة العامة لمعادلة الكرة

هي $س^2 + ص^2 + ع^2 + 2أ س + 2ب ص + 2 جـ ع + د = 0$

حيث المركز هو (- أ ، - ب ، - جـ) ،

ويكون طول نصف قطر الكرة = $\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2 - د}$

- **خواص هامة لمعادلة الكرة:**

هي معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص ، ع تحقق الآ . :

(١) معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = معامل $ع^2$.

(٢) خالية من الحدود التي تحتوى س ص ، ص ع ، ع س ، س ص ع.

(٣) مركز الكرة هو ($-\frac{1}{2}$ معامل س ، $-\frac{1}{2}$ معامل ص ، $-\frac{1}{2}$ معامل ع)

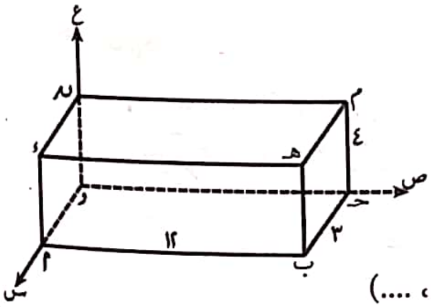
(مع ملاحظة أن إيجاد المركز بالطريقة السـابقة يكون عندما معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = معامل $ع^2$ = ١)

(٤) $نق^2$ = مربع طول نصف القطر = مجموع مربعات إحداثيات مركزها – الحد المطلق.

تمارين (١) على الدرس الأول

المجموعة الأولى:

أكمل ما يلى :



(١) في الشكل المقابل متوازي مستطيلات فيه

أ ب = ١٢ وحدة، ب جـ = ٣ وحدات،

جـ م = ٤ وحدات أكمل ما يلي:

إحداثيات أ هي (.... ، .... ، ....) ، إحداثيات ب هي (.... ، .... ، ....)

إحداثيات هـ هي (.... ، .... ، ....) ، إحداثيات م هي (.... ، .... ، ....)

إحداثيات جـ هي (.... ، .... ، ....) ، إحداثيات د هي (.... ، .... ، ....)

طول $\overline{أجـ}$ = ... ، طول $\overline{بن}$ = ... ، طول $\overline{دم}$ = ... ،

طول $\overline{جـد}$ = ... ، طول $\overline{أم}$ = ... طول $\overline{وهـ}$ = ...

بين أن $\overline{ب ن}$ ، $\overline{و هـ}$ ، $\overline{أ م}$ ، $\overline{جـ د}$ ينصف كل منهما الآخر،

معادلة المستوى م ب جـ وهي .... ، معادلة المستوى م ب هـ د هي ....

، معادلة المستوى م و ن د هي .... ، معادلة المستوى ب جـ م هـ هي ....

(٢) إذا كان م (٥ ، ٢ ، ٦) ، ب (٢ ، - ٢ ، - ٦) فإن م ب = ... وحدة طول.

(٣) إذا كان م (١ ، ٣ ، ٥) ، ب (٣ ، ٧ ، ١١) فإن منتصف $\overline{أب}$ = ...

(٤) إذا كان م (٥ ، - ١ ، ٣) ، ب (١ ، ١ ، ٧) طرفا قطر في كرة فإن مركز الكرة هو ....

وطول نصف قطرها = ... وحدة طول.

(٥) إذا كان م (٢ ، ٣ ، ٥) ، ب (- ٢ ، - ٣ ، - ٥) ، جـ (١ ، ٢ ، - ٢) ، د منتصف $\overline{أب}$ فإن جـ د = ...

وحدة طول.

(٦) الكرة التي مركزها (١ ، ٢ ، - ٣) وطول نصف قطرها ٧ وحدات فإن معادلة الكرة هي: ....

(٧) الكرة س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س – ٦ ص + ٨ ع – ٧ = ٠ فإن:

مركزها هو النقطة (...... ، ...... ، ......) وطول نصف قطرها = ... وحدة طول.

(٨) الكرة س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ ع = ٢١ فإن:

مركزها هو النقطة (...... ، ...... ، ......) وطول نصف قطرها =....... وحدة طول.

(٩) الكرة التي مركزها (٣ ، - ٤ ، ٧) وتمس مستوى الإحداثيات س ص معادلتها هي ....

(١٠) إذا كان م (١ ، - ١ ، ٥) ، ب (١ ، ٥ ، - ٣) طرفا قطر في كرة فإن معادلة هذه الكرة هي ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) الكرة: س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥

(١) مركزها هو .....

(م) (١ ، ١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠ ، ٠) (جـ) (٠ ، ١ ، ٠) (د) (- ١ ، - ١ ، - ١)

(٢) طول نصف قطرها يساوي .....

(م) ٢٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ١٠

(١٢) إذا كان: م (١ ، ٢ ، ٣) ، ب (٣ ، - ٢ ، ٧) ، جـ منتصف $\overline{أب}$ فإن جـ هي:

(م) (٢ ، ١ ، ٥) (ب) (٢ ، ٠ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٠ ، ٥) (د) (١ ، ٠ ، ٥)

(١٣) إذا كان: م (٣ ، ٥ ، - ١) ، جـ منتصف $\overline{مب}$ وكانت جـ (٢ ، ٣ ، ٤) فإن ب هي:

(م) (١ ، ١ ، ٩) (ب) ($\frac{٥}{٢}$ ، ٤ ، $\frac{٣}{٢}$) (جـ) (٧ ، ١ ، ٧) (د) (١ ، ٣ ، ٩).

(١٤) معادلة الكرة التى مركزها (٠ ، ٢ ، - ١) وطول نصف قطرها ٥ وحدات هي:

(م) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٤ ص + ٢ ع = ٢٥ (ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ ص – ٢ ع = ٢٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٤ ص + ٢ ع = ٢٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٤ ص – ٢ ع = ٢٠

(١٥) الكرة التي مركزها (١ ، - ١ ، ٣) والنقطة (٣ ، ١ ، ٢) تقع على سطحها فإن طول قطرها يساوى...

(م) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(١٦) إذا كان $\overline{مب}$ قطر لكرة ما وكان م (٢ ، ٣ ، ١) ، ب (٤ ، ٣ ، ٥) فإن:

(١) مركزها ....

(م) (٣ ، ١ ، ٣) (ب) (٣ ، ٣ ، ٣) (جـ) (٢ ، ٣ ، ٣) (د) (٣ ، ٠ ، ٣)

(٢) معادلتها هي:

(م) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٥

(ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦ س + ٦ ص + ٦ ع = ٢٢

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٦ س - ٦ ص - ٦ ع = ٥

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٦ س - ٦ ص - ٦ ع + ٢٢ = ٠

(١٧) الكرة التي مركزها (٢ ، ٥ ، ٣) وتمس مستوى الإحداثيات س ع طول نصف قطرها = ...

(م) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ١٠

(١٨) الكرة التي مركزها (- ٣ ، ٤ ، ١١) وتمس مستوى الإحداثيات ص ع طول قطرها يساوى ....

(م) ٤ (ب) ٣ (جـ) ١١ (د) ٦

(١٩) إذا كان م ب جـ مثلث، ء منتصف $\overline{بجـ}$ حيث م (٣ ، ١ ، ٥) ، ب (٢ ، ٣ ، ٧)، جـ (٠ ، ٣ ، ١)

فإن طول $\overline{مء}$ = ...

(م) ٣ (ب) ٩ (جـ) $\sqrt{٨}$ (د) $\sqrt{٢٩}$

(٢٠) الكرة التي تمس مستويات الإحداثيات س ص ، ص ع ، ع س في الثمن الأول وطول قطرها ١٠ وحدات فإن مركزها هو ....

(م) (١٠ ، ١٠ ، ١٠) (ب) (٥ ، ٠ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠ ، ٥) (د) (٥ ، ٥ ، ٥)

المجموعة الثانية :

أجب عن الأسئلة الآتية :

○ إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة، جـ منتصف $\overline{أب}$ أوجد جـ إذا كان :

(١) م (٥ ، ١ ، - ٢) ، ب (٣ ، ٧ ، ٠)

(٢) م (- ٣ ، ٥ ، ٢) ، ب (١ ، - ١ ، ٨)

○ إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة وكانت جـ ، ء ، هـ $\in \overline{أب}$ حيث: م جـ = جـ ء = ء هـ = هـ ب

أوجد إحداثيات جـ ، ء ، هـ إذا كان:

(٣) م (٣ ، - ١ ، ٧) ، ب (٥ ، ١ ، ٩)

(٤) م (٠ ، ٣ ، ٤) ، ب (- ٢ ، - ٥ ، ٨)

○ اثبت أن المثلث الذى رؤوسه م ، ب ، جـ هو مثلث قائم الزاوية حيث:

(٥) م (- ٤ ، ٠ ، ٤) ، ب (٠ ، ١٠ ، ٤) ، جـ (٠ ، ٨ ، ٠)

(٦) م (- ٨ ، ٨ ، ٢) ، ب (٤ ، - ٢ ، ٤) ، جـ (- ٤ ، ١٠ ، ٠)

(٧) اثبت أن النقط م (٢ ، ٣ ، ٧) ، ب (٥ ، ١ ، ٢) ، جـ (١ ، - ١ ، ٦) ، ء (٤ ، ٥ ، ٣) تقع على الكرة التي مركزها (١ ، ٢ ، ٣) ثم أوجد معادلة هذه الكرة.

○ أوجد معادلة الكرة إذا كان:

(٨) مركزها (٠ ، ٠ ، ٠) وطول قطرها ١٠ وحدات

(٩) مركزها (٢ ، ٤ ، - ٣) وتمر بالنقطة (- ١ ، ٠ ، ٩)

(١٠) مركزها (٣ ، ٢ ، - ٥) وتمس مستوى الإحداثيات س ص

(١١) (٢ ، ٥ ، ٧) ، (- ٤ ، ١ ، ٣) طرفا قطر فيها

(١٢) م ب جـ مثلث رؤوسه تقع على دائرة عظمى في الكرة وكانت م (٣ ، ١ ، ٥) وملتقى متوسطات المثلث م ب جـ هو (١ ، ٣ ، ٤)

○ أي من المعادلات الآتية تمثل كرة وفى حالة أنها تمثل كرة أوجد مركزها وطول نصف قطرها :

(١٣) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٤ س + ٦ ص – ٢ ع = ١١

(١٤) س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س + ٦ ص + ٨ ع = ٣١

(١٥) ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ ص – ٤ ع + ٢٥ = ٠

(١٦) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦ ص + ٨ ع = ٠

(١٧) ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٢ ع^{٢} + ٨ س − ١٢ ص + ١٦ ع = ٤٠

(١٨) ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٤ ع^{٢} = ١٠٠

(١٩) إذا قطع محور الصادات الكرة : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦ س + ٢ ص − ٢٤ ع = ١٥ في النقطتين ﻫ ، ب. أوجد طول $\overline{\text{ﻫ ب}}$ ، هل $\overline{\text{ﻫ ب}}$ قطر في الكرة؟!

○ **تطبيقات حياتية :**

(٢٠) عربة تليفريك تتحرك على حبل قوى يربط بين قمتي جبلين بحيث يستطيع السائح الانتقال بها من قمة جبل إلى القمة الأخرى ويتناول خلال رحلته مشروباً عند محطة في منتصف المسافة بين قمتي الجبلين فإذا كانت إحداثيات القمتين هما (- ٥٠ ، ٢٠٠ ، ٨٠٠) ، (٥٥٠ ، - ٤٠٠ ، ١١٠٠) أوجد:

(ﻫ) طول الحبل الواصل بين القمتين علماً بأن المسافة بالمتر.

(ب) إحداثيات النقطة التي تقع عندها محطة تناول المشروب.

(٢١) تفرض منظمة السلامة للطيران المدني الدولية مبدأ ألا تقل المسافة بين أى طائرتين أثناء طيرانهما في الجو عن ($١\frac{١}{٢}$) كيلو متر وكانت هناك طائرتان إحداثيات موقعهما في لحظة ما هي (٩٤٣ ، - ١٧٩ ، ١٢٠)، (- ٢٥٧ ، ٢٢١ ، ٤٢٠) حيث الأطوال بالمتر. بين ما إذا كانت الطائرتان تتبعان مبدأ السلامة، م تخالفان هذا المبدأ. وإذا حدث انفجار لصاروخ عابر عند منتصف المسافة بين الطائرتين فعين موقع نقطة الانفجار.

المجموعة الثالثة :

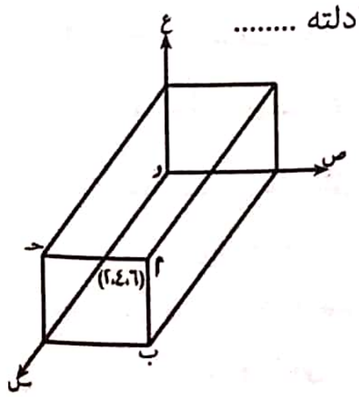
تمارين (١ - ١) من الكتاب المدرسي

أكمل ما يلي:

(١) إذا كانت النقطة (س ، ص ، ع) تقع في المستوى الإحداثي س ص فإن ع = ...

(٢) المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}'}$ يكونان المستوى الإحداثي ..... الذى معادلته ....

(٣) الشكل المقابل يمثل متوازي مستطيلات في نظام إحداثي متعامد أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) فإن إحداثيات النقطة ب هي ...... وإحداثيات النقطة ﺟ هي ....



(٤) إذا كانت ﻫ (١ ، - ١ ، ٤) ، ب (٠ ، - ٣ ، ٢) فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$ هي ....

(٥) معادلة الكرة التي مركزها النقطة (٢ ، - ١ ، ٤) وطول نصف قطرها ٥ وحدات هي ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٦) بُعد النقطة (٣ ، - ١ ، ٢) عن المستوى الإحداثي س ع يساوي ..... وحدة طول

(أ) ٣ (ب) - ١ (جـ) ٢ (د) ١

(٧) طول العمود المرسوم من النقطة (- ٢ ، ٣ ، ٤) على محور س يساوى ...... وحدة طول

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٤

(٨) إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفيها (- ٣ ، ٢ ، ٤) ، (٥ ، ١ ، ٨) هي:

(أ) (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٦) (ب) (٢ ، - ١ ، ٤) (جـ) (٨ ، - ١ ، ٤) (د) (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢)

(٩) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات هي:

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٥ (ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٠

(جـ) (س – ٥)^{٢} + (ص – ٥)^{٢} + (ع + ٥)^{٢} = ٢٥ (د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥

(١٠) معادلة الكرة التي مركزها (٢ ، - ٣ ، ٤) وتمس المستوى الإحداثي س ص هي:

(أ) (س – ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع – ٤)^{٢} = ٤

(ب) (س – ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع – ٤)^{٢} = ٩

(جـ) (س – ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع – ٤)^{٢} = ١٦

(د) (س + ٢)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ١٦

أجب عن الأسئلة الآتية :-

(١١) أوجد البُعد بين النقطتين أ ، ب في كل مما يأتي:

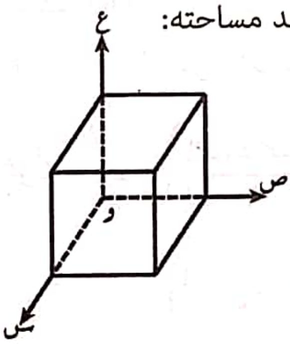
(أ) أ (٧ ، ٠ ، ٤) ، ب(١ ، ٠ ، ٠) (ب) أ (٤ ، ١ ، ٩) ، ب (٢ ، ١ ، ٦)

(جـ) أ (١ ، ١ ، - ٧) ، ب (- ٢ ، - ٣ ، - ٧)

(١٢) اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط الآتية هو مثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته:

(أ) (- ٢ ، ٥ ، ٢) ، (٠ ، ٠ ، ٢) ، (٠ ، ٤ ، ٠)

(ب) (- ٤ ، ٤ ، ١) ، (٢ ، - ١ ، ٢) ، (- ٢ ، ٥ ، ٠)



(١٣) الشكل المقابل يمثل مكعب حجمه ٢٧ وحدة مكعبة أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل أوجد إحداثيات باقي الرؤوس.

(١٤) اثبت أن النقط (٧ ، ١ ، ٣) ، (٥ ، ٣ ، ك) ، (٣ ، ٥ ، ٣) تكون مثلثاً متساوي الساقين لجميع قيم ك الحقيقة ثم أوجد قيم ك التي تجعل المثلث متساوي الأضلاع.

(١٥) أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ في كل مما يأتي:

(أ) أ (٣ ، - ١ ، ٤) ، ب (٢ ، ٠ ، - ١) (ب) أ (- ٣ ، ٥ ، ٥) ، ب (- ٦ ، ٤ ، ٨)

(١٦) إذا كانت جـ (- ١ ، ٤ ، ٠) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ حيث ب = (٤ ، - ٢ ، ١) أوجد إحداثيات النقطة م.

(١٧) أوجد معادلة الكرة إذا كان :

(م) مركزها (٣ ، - ١ ، ٢) وطول نصف قطرها $\sqrt{٧}$

(ب) (٣ ، ٤ ، - ٣) ، (٠ ، ٢ ، ١) نهايتا قطر فيها

(جـ) مركزها النقطة (١ ، - ٦ ، ١) وتمر بالنقطة (٢ ، - ١ ، ٥)

(١٨) أوجد مركز وطول نصف قطر الكرة

(م) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٩ (ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س + ٤ ص = ٠

(جـ) ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٢ ع^{٢} − ٢ س − ٦ ص − ٤ ع + ٥ = ٠

(١٩) أوجد معادلة الكرة التي طول نصف قطرها ٣ وحدات وتمس مستويات الإحداثيات الموجبة.

(٢٠) تفكير إبداعي : إذا كانت م $\in$ محور س ، ب $\in$ محور ص ، جـ $\in$ محور ع وكانت النقطة (١، -١ ، ٠) منتصف $\overline{\text{أب}}$ والنقطة (٠ ، - ١ ، ٢) منتصف $\overline{\text{بجـ}}$. أوجد إحداثيات منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

(٢١) تفكير إبداعي: إذا قطع محور السينات الكرة : (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ١)^{٢} = ١٤ في النقطتين م ، ب أوجد طول $\overline{\text{أب}}$.

(٢٢) الكتابة في الرياضيات: إذا كانت جميع النقط في الفراغ على الصورة (سَ ، ص ، ٠) تقع في المستوى الديكارتي س ص ومعادلته ع = ٠ أوجد معادلة المستوى الذى تقع فيه جميع النقط في الفراغ التي على الصورة (س ، ص ، ٢).

(٢٣) اكتشف الخطأ إذا كانت النقط ب (- ١ ، ٤ ، ٢) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أجـ}}$ حيث م (١ ، ٠ ، ٢) أوجد إحداثيات النقطة جـ.

حل أشرف :
$$\text{جـ} = \left(\left(\frac{\text{س}_١+\text{س}_٢}{٢}\right) ، \left(\frac{\text{ص}_١+\text{ص}_٢}{٢}\right) ، \left(\frac{\text{ع}_١+\text{ع}_٢}{٢}\right)\right)$$
$$= \left(\left(\frac{-١+١}{٢}\right) ، \left(\frac{٤+٠}{٢}\right) ، \left(\frac{٢+٢}{٢}\right)\right) = (٠ ، ٢ ، ٢)$$

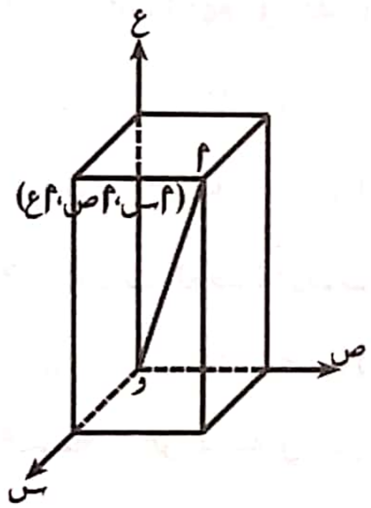
حل زياد : نفرض أن جـ (س ، ص ، ع)
$$\therefore \frac{١+\text{س}}{٢} = -١ \quad \therefore \text{س} = -٣ ، \quad \frac{٠+\text{ص}}{٢} = ٤ \quad \therefore \text{ص} = ٨$$
$$، \frac{٢+\text{ع}}{٢} = ٢ \quad \therefore \text{ع} = ٢ \quad \therefore \text{جـ} (-٣ ، ٨ ، ٢)$$

أي الحلين هو الصواب؟ ولماذا؟

المتجهات فى الفراغ

سبق أن درست الكميات القياسية والكميات المتجهة وعلمت أن المتجه يمثل بقطعة مستقيمة متجهة طولها يمثل معيار المتجه واتجاهها هو اتجاه المتجه وسوف نقوم هنا بدراسة المتجهات في الفراغ (في نظام إحداثي ذو ثلاث أبعاد).

■ متجه الموضع في الفراغ :



يعرف متجة الموضع للنقطة أ ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) بالنسبة لنقطة الأصل و (٠ ، ٠ ، ٠) على أنه القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل و ونهايتها النقطة أ.

أي أن $\overrightarrow{\text{وأ}}$ هو متجه الموضع للنقطة أ ويرمز له بالرمز

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) حيث: $\text{أ}_{\text{س}}$ هي مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overleftrightarrow{\text{وس}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ هي مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overleftrightarrow{\text{وص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$ هي مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overleftrightarrow{\text{وع}}$

■ معيار المتجه:

إذا كان المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) فإن

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{\text{أ}}\right\| = \sqrt{(\text{أس})^{2} + (\text{أص})^{2} + (\text{أع})^{2}}}$$

■ جميع المتجهات:

إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ($\text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{ب}_{\text{ع}}$) فإن:

$$\boxed{\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{س}} + \text{ب}_{\text{س}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ص}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ع}} + \text{ب}_{\text{ع}})}$$

لاحظ

- **ضرب المتجه في عدد حقيقي:**

إذا كان: $\overline{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) \in \text{ح}^{3}$ ، ك $\in$ ح

فإن: ك $\overline{\text{أ}}$ = ك $(\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) = (\text{ك أ}_{\text{س}} ، \text{ك أ}_{\text{ص}} ، \text{ك أ}_{\text{ع}})$

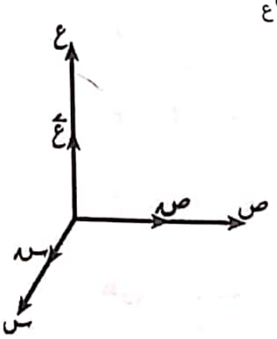
- **خاصية هامة**

إذا كان : $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}} \in \text{ح}^{3}$ ، ك $\in$ ح فإن : $\boxed{\text{ك}(\overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}}) = \text{ك}\overline{\text{أ}} + \text{ك}\overline{\text{ب}}}$

- **تساوى متجهين في الفراغ :**

إذا كان $\overline{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overline{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$

فإن : $\overline{\text{أ}} = \overline{\text{ب}}$ إذا و فقط إذا كان : $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$



- **متجهات الوحدة الأساسية :** $\overline{\text{س}}$ ، $\overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ع}}$

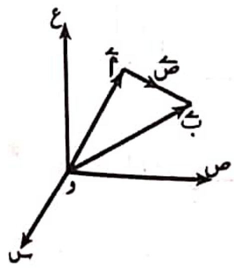
$\overline{\text{س}} = (1 ، 0 ، 0)$ ، $\overline{\text{ص}} = (0 ، 1 ، 0)$ ، $\overline{\text{ع}} = (0 ، 0 ، 1)$.

- **التعبير عن متجه في الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية :**

إذا كان $\overline{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) \in \text{ح}^{3}$ فإن المتجه $\overline{\text{أ}}$ يمكن كتابته على الصورة:

$$\boxed{\overline{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}}\overline{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overline{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overline{\text{ع}}}$$

- **التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة في الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها :**



في الشكل : $\overrightarrow{\text{و أ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{و ب}}$ ومنها

$\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{و ب}} - \overrightarrow{\text{و أ}}$ أي أن $\boxed{\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}}}$

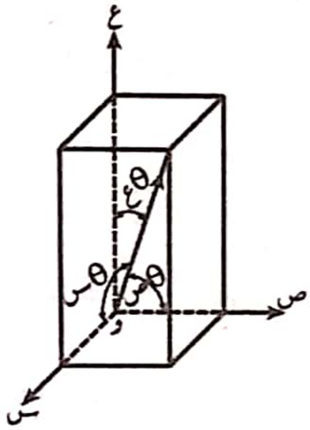
- **متجه الوحدة في اتجاه متجه معلوم :**

هو متجه معياره يساوى الوحدة و له اتجاه المتجه المعلوم ويرمز له بالرمز $\overline{\text{ي}}$.

إذا كان : $\overline{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$

فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overline{\text{أ}}$ هو $\overline{\text{ي}}_{\text{أ}}$ حيث $\overline{\text{ي}}_{\text{أ}} = \dfrac{\overline{\text{أ}}}{\|\overline{\text{أ}}\|}$

■ **زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه في الفراغ :**



إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ متجه في الفراغ وكانت $(\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}})$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن:

$$\text{أ}_{\text{س}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} ،$$

$$\text{أ}_{\text{ع}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}}$$ ومنها

$$\overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \left(\text{جتا}\,\theta_{\text{س}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}}\,\overrightarrow{\text{ع}}\right)$$

حيث $(\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}})$ تسمى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ،

$\text{جتا}\,\theta_{\text{س}} ، \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} ، \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}}$ تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$.

■ **لاحظ:**

$$(\text{جتا}\,\theta_{\text{س}} ، \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} ، \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}}) = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \text{متجه الوحدة في اتجاه } \overrightarrow{\text{أ}}$$

ومنها $\boxed{\text{جتا}^2\theta_{\text{س}} + \text{جتا}^2\theta_{\text{ص}} + \text{جتا}^2\theta_{\text{ع}} = 1}$

تمارين (٢) على الدرس الثاني

المجموعة الأولى :

أكمل ما يأ . :

(١) إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، ٤ ، ١٢)$ فإن: $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \text{........}$

(٢) إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}} = (٤ ، ٢ ، ١٦)$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٦ ، ٦ ، ١٢)$ فإن: $\left\|\frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{أ}} + \frac{١}{٣}\overrightarrow{\text{ب}}\right\|$

(٣) إذا كان: $\overrightarrow{\text{ب}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}} - ٥\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} = ٦\overrightarrow{\text{س}} + ٤\overrightarrow{\text{ص}} + ٨\overrightarrow{\text{ع}}$ = فإن $\overrightarrow{\text{أ}} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{ب}} = \text{......}$

(٤) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{جـ}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ فإن $\overrightarrow{\text{جـ}} = \text{....}$

(٥) إذا كان $\overline{أ} = ٤\overline{س} + ٩\overline{ص} - ٣\overline{ع}$ ، $\overline{ب} = ٥\overline{س} + ٧\overline{ص} - \overline{ع}$ فإن متجه الوحدة فى اتجاه

$\overline{أ ب} = ...$

(٦) إذا كان $\overline{أ}$ يصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا قياسها $٦٠°$ ، $٩٠°$ ، $\theta°$

فإن: $\theta = ...$

(٧) إذا كان $\overline{جـ} = (ل ، ٢ ، ٤)$ وكان : $\|\overline{جـ}\| = ٦$ وحدات فإن: ل = ...

(٨) المتجه $\overline{ب} = (-٢ ، ١ ، ٢)$ فإن $\left(\text{جتا}\theta_{س} ، \text{جتا}\theta_{ص} ، \text{جتا}\theta_{ع}\right) = (.... ، .... ، ....)$

(٩) إذا كانت $\overline{ق}$ قوة معيارها ٢٤ وحدة قوة وتعمل فى اتجاه $\overline{أ ب}$ حيث م(٥ ، -٣ ، ٤) ، ب (٣ ، -٢ ، ٢)

فإن: $\overline{ق} = ...\overline{س} + ...\overline{ص} + ...\overline{ع}$

(١٠) إذا كان: $\overline{أ} = \overline{ب}$ وكان: $\overline{أ} = ٢\overline{س} + ل\overline{ص} + م\overline{ع}$ ، $\overline{ب} = ن\overline{س} + ٣\overline{ص} - ٥\overline{ع}$

فإن: ل = ... ، م = ... ، ن = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) إذا كان $\overline{أ} = (-٤ ، ٣ ، ١٢)$ فإن جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overline{أ}$ هي:

(م) (٤ ، -٣ ، -١٢) (ب) $\left(\frac{-٤}{١٣} ، \frac{٣}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$

(جـ) $\left(\frac{٤}{١٣} ، \frac{-٣}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$ (د) $\left(\frac{٤}{١٣} ، \frac{٣}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$

(١٢) إذا كان $\overline{أ} = (٢ ، ٣ ، -١)$ ، $\overline{ب} = ٢\overline{أ}$ فإن: $\overline{ب} = ...$

(م) (٢ ، ٦ ، -١) (ب) (-٤ ، -٦ ، ٢)

(جـ) $٤\overline{س} + ٦\overline{ص} - ٢\overline{ع}$ (د) $\left(\frac{٢}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٤}} ، \frac{-١}{\sqrt{١٤}}\right)$

(١٣) إذا كان: $\overline{أ} = ٢\overline{س} + ٣\overline{ص} + ٥\overline{ع}$ ، $\overline{جـ} = \overline{أ} + \overline{ب}$ ، $\overline{جـ} = \overline{س} - ٢\overline{ص} - \overline{ع}$ فإن $\overline{ب} = ...$

(م) (-١ ، -٥ ، -٦) (ب) $(-\overline{س} + ٥\overline{ص} + ٦\overline{ع})$

(جـ) $(٣\overline{س} + \overline{ص} + ٤\overline{ع})$ (د) (١ ، ٥ ، ٦)

(١٤) إذا كان : $\overline{أ} + \overline{ب} = \overline{و}$ فإن :

(م) $\|\overline{أ}\| = -\|\overline{ب}\|$ (ب) $\|\overline{أ}\| + \|\overline{ب}\| = ٠$

(جـ) $\|\overline{أ}\| = \|\overline{ب}\| = ٠$ (د) $\|\overline{أ}\| = \|\overline{ب}\|$

(١٥) إذا كان: $\|\overline{ق}\| = ٢٦$ وحدة قوة وكانت $\overline{ق}$ تعمل في $\overleftrightarrow{أب}$ حيث م (٢ ، ٥، ٧)، ب (- ٢ ، ٢ ، - ٥)

فإن $\overline{ق} = ...$

(م) $-٨\overline{س} - ٦\overline{ص} - ٢٤\overline{ع}$ (ب) (٨ ، ٦ ، ٢٤)

(جـ) $٢\overline{س} + ٥\overline{ص} + ٧\overline{ع}$ (د) (- ٢ ، ٢ ، - ٥)

(١٦) إذا كان المتجه $\overline{أ}$ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة زوايا متساوية القياس كل منها قياسها = θ فإن جتا$\theta = ...$

(م) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(١٧) إذا كان $\|\overline{أ}\| = ٥$ وحدات، $\|\overline{ب}\| = ٧$ وحدات فإن: $\|\overline{أ} + \overline{ب}\| ...$

(م) أقل من ١٢ (ب) أكبر من ١٢ (جـ) = ١٢ (د) غير ذلك.

(١٨) إذا كان المتجه $\overline{أ}$ يقع في المستوى س ع وكان $\overline{أ} = ٣\overline{س} + (ك - ٢)\overline{ص} + \overline{ع}$ فإن ك = ...

(م) – ٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ١٠

(١٩) إذا كان: $\overline{أ}$ = (- ٣ ، ١٥ ، - ٧) ، $\overline{ب}$ = (٤ ، - ٩ ، ١٨) فإن $\overline{ي}_{\overline{أب}} = ...$

(م) $\left(\frac{-٧}{٢٥\sqrt{٢}} ، \frac{٢٤}{٢٥\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ (ب) (٧ ، - ٢٤ ، ٢٥)

(جـ) $\frac{٧\overline{س}}{٢٥\sqrt{٢}} - \frac{٢٤\overline{ص}}{٢٥\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\overline{ع}$ (د) (- ٧ ، ٢٤ ، - ٢٥)

(٢٠) إذا كان $\|\overline{أ}\| = ١٠$ وحدات ويصنع مع محاور الموجبة زوايا قياساتها ٩٠° ، θ° ، ٣٠° على الترتيب فإن $\overline{أ} = ...$

(م) ١٠ (٩٠ ، θ ، ٣٠) (ب) ١٠ (جتا ٩٠ ، جتا θ ، $\frac{١}{٢}$)

(جـ) (٠ ، ٥ ، $٥\sqrt{٣}$) (د) (٠ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١٥}{٢}$)

المجموعة الثانية :

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان: $\overline{أ} = ٢\overline{ب} + ٣\overline{جـ}$ ، $\overline{أ} = ٥\overline{س} + ١٠\overline{ص} + ٥\overline{ع}$ ، $\overline{جـ} = (١ ، ٢ ، ٣)$ أوجد $\overline{ب}$

وأوجد أيضاً متجه الوحدة في اتجاه $\overline{ب}$.

إذا كان: $\overline{أ} = ٣\overline{س} - \overline{ص} + ٤\overline{ع}$ ، $\overline{ب} = ٢\overline{س} + ٦\overline{ص} - ٨\overline{ع}$ ، $\overline{جـ} = -٣\overline{س} - ٩\overline{ص} + ١٢\overline{ع}$ أوجد

كل من المتجهات الآتية:

(٢) $\overline{أ} + \overline{ب} + \overline{جـ}$

(٣) $٢\overline{أ} - ٣\overline{ب} + \overline{جـ}$

(٤) $\overline{أ} - \frac{١}{٢}\overline{ب} - \frac{١}{٣}\overline{جـ}$

(٥) إذا كان: $\overline{أ} + \overline{ب} - \overline{جـ} + \overline{د} = \overline{و}$ أوجد $\overline{د}$

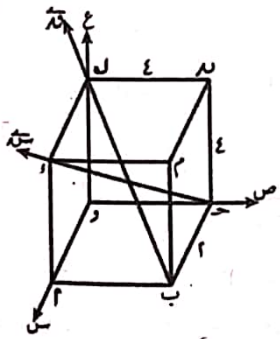
(٦) إذا كان : $\overline{أ} = (٣ ، ٢ ، -٢)$ ، $\overline{ب} = ك\overline{أ}$ وكان: $\overline{ب} = ٩\overline{س} + م\overline{ص} + ن\overline{ع}$ حيث ك ، م ، ن $\in$ ح

(أ) أوجد قيمة كل من ك ، م ، ن

(ب) أوجد $\|\overline{أ}\|$ ، $\|\overline{ب}\|$ واثبت أن: $\|\overline{ب}\| = ك\|\overline{أ}\|$

(٧) إذا كانت القوة $\overline{ق} = \|\overline{ق}\|(\overline{ي}_{أ})$ وكان $\overline{أ} = (-٣ ، ١٢ ، ٤)$ ، $\|\overline{ق}\| = ٥٢$ وحدة قوة أوجد $\overline{ق}$.

(٨) في الشكل و أ ب جـ د م ن ك متوازي مستطيلات فيه



و أ = ٢ وحدة، و جـ = جـ ن = ٤ وحدات وكانت $\overline{ق}$

تعمل في $\overrightarrow{بك}$ حيث $\|\overline{ق}\| = ١٨$ نيوتن ، $\overline{س}$ تعمل

في $\overrightarrow{جـد}$ حيث $\|\overline{س}\| = ٢٤$ نيوتن أوجد:

$\overline{ق}$ ، $\overline{س}$ وأوجد $\|\overline{ق} + \overline{س}\|$

(٩) أ ب جـ مثلث فيه أ (٢ ، ١ ، ٤) ، ب (٥ ، -٢ ، ٣) ، جـ (-٣ ، ٠ ، ١) وكانت د منتصف $\overline{بجـ}$

فإذا كانت $\overline{ق}$ تعمل في $\overrightarrow{أد}$ وكان $\|\overline{ق}\| = ٣٠$ نيوتن أوجد $\overline{ق}$ باستخدام متجهات الوحدة الأساسية.

(١٠) إذا كانت: $\overline{ق} = (-٣ك ، ١٢ك ، ٤ك)$ وكان $\|\overline{ق}\| = ٥٢$ نيوتن أوجد قيمة ك وإذا كان

$\overline{أ} = \overline{س} + ٢\overline{ص} - ٢\overline{ع}$ وكان $\overline{ب} = ك\overline{أ}$ أوجد $\overline{ب}$ وأوجد $\|\overline{ب}\|$.

المجموعة الثالثة :

تمارين (٢-١) من الكتاب المدرسي

أكمل ما يأتى:

(١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٣ ، ٤ ، ٢) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ =.....

(٢) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٣\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ =....

(٣) متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ (-١ ، ٢ ، ٠) ، ب (٣ ، -١ ، ٢) هو ....

(٤) المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} - ٢\overrightarrow{\text{ع}}$ يصنع زاوية قياسها ..... مع الاتجاه الموجب لمحور س.

(٥) المتجه $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور ع.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢ ، ل ، ١) وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٣$ وحدات فإن ل = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) ±٢ (د) $\sqrt{١٤}$

(٧) إذا كان ٣٠° ، ٧٠° ، θ° هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٢٦٠° (د) ٦٨,٦°

(٨) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-١ ، ٥ ، -٢)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ١ ، ١) وكان: $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{س}}$ فإن $\overrightarrow{\text{جـ}}$ =....

(أ) $\overrightarrow{\text{س}} + ٦\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}$ (ب) $-\overrightarrow{\text{س}} - ٦\overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{س}} + ٤\overrightarrow{\text{ص}} - ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ (د) $\overrightarrow{\text{س}} + ٤\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}$

(٩) جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢ ، ١ ، ٢) هى .....

(أ) (-٢ ، ١ ، ٢) (ب) $\left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

(جـ) $\left(\frac{٥}{-٢} ، ٥ ، \frac{٥}{٢}\right)$ (د) (-١ ، ١ ، ١)

أجب عما يأ . :

(١٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، - ٣ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، - ٢ ، ٠) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (- ٦ ، ٠ ، ٣) أوجد كل من المتجهات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ (ب) $٣\overrightarrow{أ} + \frac{١}{٣}\overrightarrow{جـ}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}\overrightarrow{ب} + \frac{٢}{٣}\overrightarrow{جـ}$

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ ؛ $\overrightarrow{ب} = ٤\overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{جـ} = ٤\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} - ٦\overrightarrow{ع}$

أوجد كل من المتجهات الآتية:

(أ) $٢\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ (ب) $\frac{١}{٢}\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}$ (جـ) $٣\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{جـ}$

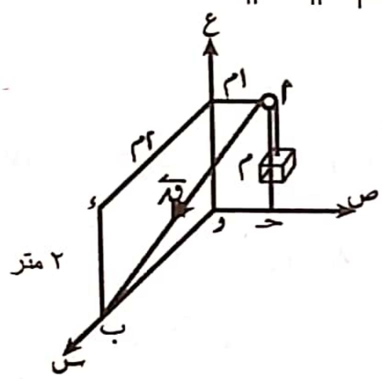
(١٢) أوجد معيار كل من المتجهات الآتية :

(أ) $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، - ١ ، ٠) (ب) $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٢ ، -٢)

(جـ) $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ع}$ (د) $\overrightarrow{د} = \overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$

(١٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ٠ ، ٠) ، $\overrightarrow{س}$ = (١ ، ٠ ، ٠) اثبت أن: $\|\overrightarrow{أ}\| = |ك| \, . \, \|\overrightarrow{س}\|$

(١٤) إذا كانت قوة الشد فى الخيط تساوى ٢١ نيوتن أوجد المركبات الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$



(١٥) سؤال مفتوح :

إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يوازى المستوى الإحداثى ص ع ماذا يمكن أن تقول عن إحداثيات المتجه $\overrightarrow{أ}$.

(١٦) سؤال مفتوح :إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى ح^{٣} هل $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$ إذا كان الطرفان غير متساويان أى الطرفين هو الأكبر.

(١٧) تفكير إبداعى : أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى معياره ٥ وحدات ويصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية فى القياس.

ضرب المتجهات

▪ الضرب القياسي لمتجهين في الفراغ:

- إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين قياس الزاوية فيها θ فإن :

$$\boxed{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\| \text{جتا} \theta}$$

- حيث $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}$ تقرأ المتجه $\overrightarrow{أ}$ ضرب قياسي المتجه $\overrightarrow{ب}$ وفى بعض الكتب تكتب $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}$

➢ **لاحظ:**

١) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}$ = مساحة المستطيل الذي بُعداه هما معيار أحد المتجهين ومركبة المتجه الآخر عليه.

٢) الزواية بين منجهين هي الزاوية الصــغرى بين المتجهين عندما يكونان خارجين معا من نقطة واحدة أو داخالين فيها أي ان قياسها $\in$ [٠ ، π]

▪ خواص هامة للضرب القياسي: إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب} \in ع^٣$ ، ك $\in$ ع

(١) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} . \overrightarrow{أ}$ أي أن الضرب القياسي هو عملية إبداليه.

(٢) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^٢$ ومنها $\boxed{\overrightarrow{س} . \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} . \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} . \overrightarrow{ع} = ١}$

(٣) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = ٠$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان و يسمى هذا بشرط تعامد متجهين غير صفريين. وهذا يعنى أن: $\boxed{\overrightarrow{س} . \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ص} . \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع} . \overrightarrow{س} = ٠}$

(٤) $\overrightarrow{أ} . (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} . \overrightarrow{جـ}$ تسمى خاصية التوزيع وهذا يعنى أن فك الأقواس ممكن فى وجود الضرب القياسي.

(٥) $(ك \overrightarrow{أ}) . \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} . (ك \overrightarrow{ب}) = ك (\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب})$

➢ **لاحظ:** المتجهان المتوازيان و في نفس الاتجاه تكون قياس الزاوية بينهما = صــفر أ، المتجهان المتوازيان ومتضادان في الاتجاه تكون قياس الزاوية بينهما = ١٨٠°

■ **الضرب القياسي لمتجهين في النظام الإحداثي المتعامد :**

- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$ فإن :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}}$$

حالة خاصة: إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}})$ فإن :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}}}$$

■ **الزاوية بين متجهين:** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين قياس الزاوية بينهما θ فإن :

$$\boxed{\text{جتا}\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \|\overrightarrow{\text{ب}}\|}}$$

حالات خاصة :

(١) إذا كان جتا θ = ١ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه.

(٢) إذا كان جتا θ = - ١ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان وفى عكس الاتجاه.

(٣) إذا كان جتا θ = صفر فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدان.

■ **مركبة (مسقط) متجه فى اتجاه متجه آخر:**

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين فإن مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ يرمز لها بالرمز $\text{أ}_{\text{ب}}$ حيث

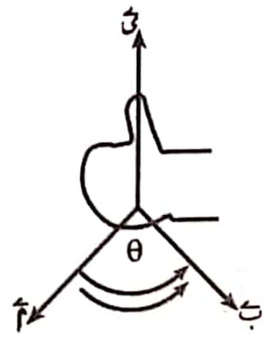
$$\boxed{\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}} = \text{كمية قياسية}$$

■ **استخدام الضرب القياسى لإيجاد الشغل المبذول من قوة :**

- إذا أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على جسم فأحدثت له إزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$ فإن القوة تكون قد بذلت شغلاً وهذا الشغل هو ش حيث: $\boxed{\text{ش} = \overrightarrow{\text{ق}} . \overrightarrow{\text{ف}}} = \|\overrightarrow{\text{ق}}\| \|\overrightarrow{\text{ف}}\| \text{جتا}\theta$ أو حسب المسألة

- وحدات قياس الشغل = وحدات قياس القوة × وحدات قياس الإزاحة.

الضرب الاتجاهى لمتجهين :



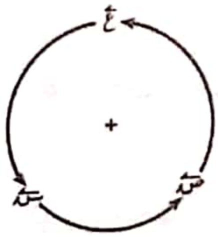
- إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى مستوى يحصران بينهما زاوية قياسها θ وكان $\overrightarrow{ي}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ فإن حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يعطى بالعلاقة.

$$\boxed{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \left(\|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\| \text{جا}\,\theta\right)\overrightarrow{ي}}$$

- ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{ي}$ حسب قاعدة اليد اليمنى حيث تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه الدوران من المتجه $\overrightarrow{أ}$ إلى المتجه $\overrightarrow{ب}$ فيشير الإبهام إلى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ي}$.
- من قاعدة اليد اليمنى

(١) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ "غير إبدالى"

(٢) $\{\overrightarrow{س}, \overrightarrow{ص}, \overrightarrow{ع}\}$ تسمى مجموعة يمينية من متجهات الوحدة الأساسية أي أن :



$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، بينما : $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$ ،

$\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ ،

$\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$

(٣) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ حيث $\overrightarrow{و}$ المتجه الصفرى

ومنها شرط توازى متجهين غير صفريين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ هو أن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

ومنها أيضاً: $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{و}$

- **خواص هامة للضرب الاتجاهى :**

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ} \in ح^3$ ، $ك \in ح$

$$\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{جـ} \text{ ، } (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \times \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{جـ} + \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$$

- **خاصية التوزيع:**

وتعنى أن فك الأقواس ممكن فى وجود الضرب الاتجاهى.

$$(ك\overrightarrow{أ}) \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \times (ك\overrightarrow{ب}) = ك(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$$

■ حاصل الضرب الاتجاهى فى الإحداثيات الكارتيزية :

إذا كان : $\overline{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overline{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

فإن : $\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$

حالة خاصة : إذا كان : $\overline{أ} = (أ_س ، أ_ص)$ ، $\overline{ب} = (ب_س ، ب_ص)$

فإن : $\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ أ_س & أ_ص & ٠ \\ ب_س & ب_ص & ٠ \end{vmatrix}$

- متجه الوحدة العمودى على مستوى $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ هو $\dfrac{\overline{أ} \times \overline{ب}}{\|\overline{أ} \times \overline{ب}\|}$

■ توازى متجهين :

- إذا كان : $\overline{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overline{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ متجين غير صفرين

فمن شرط التوازي يمكن إستنتاج أن $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ يكونا متوازيان

إذا وفقط إذا كان $\overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{و}$

ومنها $\dfrac{أ_س}{ب_س} = \dfrac{أ_ص}{ب_ص} = \dfrac{أ_ع}{ب_ع}$

- وإذا فرضنا أن كل من النسب السابقة = ك

فإن $\overline{أ} = ك \overline{ب}$ وعندما ك > ٠ يكون المتجهان متوازيان وفى اتجاه واحد.

وعندما ك < ٠ يكون المتجهان متوازيان وفى عكس الاتجاه.

المعنى الهندسي للضرب الاتجاهي لمتجهين:

$\left\| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \right\|$ = مساحة سطح متوازي الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة سطح المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران.

الضرب الثلاثي القياسي :

- إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات فى الفراغ

فإن حاصل الضرب الثلاث القياسى يعرف كالتالى: $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$

- فإن كان

$\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (جـ_س ، جـ_ص ، جـ_ع)$

فإن حاصل الضرب الثلاثى القياسى

$$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \left(أ_س \hat{س} + أ_ص \hat{ص} + أ_ع \hat{ع} \right) \cdot \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

خواص الضرب الثلاثى القياسي:

(١) قيمتة لا تتغير إذا كان ترتيب المتجهات فى ترتيب دورى واحد أى أن:

$\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{ب} \cdot (\overrightarrow{جـ} \times \overrightarrow{أ}) = \overrightarrow{جـ} \cdot (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$ حيث الترتيب $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$.

(٢) إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ فى مستوى واحد فإن حاصل الضرب القياسى الثلاث لها = ٠

أى أن $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ})$ = صفر

المعنى الهندسي لحاصل الضرب الثلاثى القياسى:

- $\left| \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} \right|$ = حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$

تكون ثلاثة أضلاع غير متوازية فى متوازى السطوح (أي ثلاث اضلاع تتلاقى عند أحد الرووس)

تمارين (٣) على الدرس الثالث

المجموعة الأولى :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات :

سوف نعتبر أن $\{\overrightarrow{س}، \overrightarrow{ص}، \overrightarrow{ع}\}$ مجموعة عينية من متجهات الوحدة الأساسية

أكمل ما يلى :

(١) (م) $\overrightarrow{ص}.\overrightarrow{ع}=$ ... (ب) $\overrightarrow{ص}\times\overrightarrow{ع}=$ ...

(٢) (م) $\overrightarrow{س}.\overrightarrow{س}=$ ... (ب) $\overrightarrow{س}\times\overrightarrow{س}=$ ...

(٣) إذا كان: $\overrightarrow{أ}=(١، ٢، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب}=(-١، ٣، -٢)$ فإن:

(م) $\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}=$ ... (ب) $\overrightarrow{أ}\times\overrightarrow{ب}=$ ...

(٤) إذا كان: $\overrightarrow{أ}=(٢، ١، ١)$ ، $\overrightarrow{ب}=(٣، ٢، -١)$ ، $\overrightarrow{جـ}=(٢، ٣، ١)$ فإن : $\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}\times\overrightarrow{جـ}=$....

(٥) (م) إذا كان $\overrightarrow{أ}\times\overrightarrow{ب}=\overrightarrow{و}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير صفريان فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يكونان .....

(ب) إذا كان $\overrightarrow{أ}.\overrightarrow{ب}=٠$ حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير صفريان فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يكونان ....

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}=(١، ٢، -١)$ ، $\overrightarrow{ب}=(٣، ١، -٢)$

(م) وكان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يحصران زاوية قياسها θ° فإن $\theta=$ ....

(ب) وكان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران فى مثلث فإن مساحة سطح المثلث = ...

(٧) إذا أثرت القوة $\overrightarrow{ق}=٢\overrightarrow{س}-٥\overrightarrow{ص}+٣\overrightarrow{ع}$ على جسم فحركته من النقطة م $(-٢، ٥، ٨)$ إلى النقطة ب $(٥، -١، ١٢)$ كان الشغل المبذول بواسطة القوة $\overrightarrow{ق}$ من م إلى ب= ...

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ}=(٢، ٣، -١)$ ، $\overrightarrow{ب}=(٥، -٢، ك)$ وكان :

(م) $\overrightarrow{أ}$ عمودى على $\overrightarrow{ب}$ فإن ك = ...

(ب) $\overrightarrow{أ}$ يوازى $\overrightarrow{ب}$ فإن ك = ...

الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٩) $\overrightarrow{س} . \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} =$ ....

(م) صفر (ب) ١ (جـ) $\overrightarrow{س}$ (د) $\overrightarrow{ص}$

(١٠) $\overrightarrow{س} \times \left(\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}\right) =$ .....

(م) $\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ (ب) $\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ (جـ) $-\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ (د) $-\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$

(١١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان متعامدان فى الفراغ فإن :

(م) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ (ب) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = ١$ (جـ) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} =$ صفر (د) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = ١$

(١٢) إذا كان $\overrightarrow{أ} = ك\overrightarrow{ب}$ حيث ك = ثابت فإن : ....

(م) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \left\|\overrightarrow{أ}\right\|^{٢}$ (ب) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

(جـ) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = ك$ (د) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = ٠$

(١٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران من متوازى أضلاع فإن: $\left\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\right\| =$...

(م) ضعف مساحة سطح متوازى الأضلاع.

(ب) $\frac{١}{٢}$ مساحة سطح متوازى الأضلاع.

(جـ) مساحة سطح متوازى الأضلاع.

(د) محيط متوازى الأضلاع.

(١٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ١ ، ٥) فإن : $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} =$....

(م) ٢٩ (ب) $٢٩\overrightarrow{ع}$ (جـ) - ٢٩ (د) $٦\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ٢٠\overrightarrow{ع}$

(١٥) إذا أثرت القوة $\overrightarrow{ق}$ = (٥ ، ٤ ، - ٢) على جسم فأحدثت له إزاحة

$\overrightarrow{ف} = ٢\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} - ١٠\overrightarrow{ع}$ فإن الشغل المبذول خلال الإزاحة $\overrightarrow{ف}$ هو .. وحدة شغل

(م) $١٠\overrightarrow{س} + ٢٠\overrightarrow{ص} + ٢٠\overrightarrow{ع}$ (ب) $٥٠\overrightarrow{ع}$

(جـ) ٥٠ (د) $٥٠(\overrightarrow{س}.\overrightarrow{ص})$

(١٦) إذا كان المتجهان $\overline{أ}$ = (٥ ، - ١ ، ١٠) ، $\overline{ب}$ = (٢ ، ك ، ٤) متعامدان فإن ك = ...

(م) ٥٠ (ب) - ٥٠ (جـ) ١٠ (د) ١٥

(١٧) إذا كان المتجهان $\overline{أ}$ = (٣ ، ٥ ، - ٤) ، $\overline{ب}$ = ٩$\overline{س}$ + ك$\overline{ص}$ + م$\overline{ع}$ متوازيان فإن: (ك ، م) = ...

(م) (١٥ ، - ١٢) (ب) (- ١٥ ، ١٢) (جـ) (١٢ ، ١٥) ، (د) (- ١٥ ، - ١٢)

(١٨) قياس الزاوية بين المتجهين $\overline{أ}$ = (١ ، ٢ ، - ٢) ، $\overline{ب}$ = (٤ ، - ٢ ، ٤) هو ....

(م) $63^\circ\ 37'$ (ب) 60° (جـ) 120° (د) $116^\circ\ 23'$

(١٩) إذا كان $\overline{أ}$ = (٢ ، ٣ ، ١) ، $\overline{ب}$ = (١ ، ٥ ، ٣) ، $\overline{جـ}$ = (٣ ، ٤ ، - ٢) فإن حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{جـ}$ ثلاث أضلاع غير متوازية = ... وحدة مكعبة

(م) - ٢٢ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٨ (د) - ٨٨

المجموعة الثانية :

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أوجد $\overline{أ}$. $\overline{ب}$ فى كل مما يأتى:

(م) $\|\overline{أ}\|$ = ٥ ، $\|\overline{ب}\|$ = ٨ وقياس الزاوية بينهما = 120°

(ب) $\overline{أ}$ = (٢ ، ٣ ، ٤) ، $\overline{ب}$ = (١ ، - ٢ ، ٥)

(جـ) $\overline{أ}$ = $\overline{س}$ - $\overline{ص}$ + ٣$\overline{ع}$ ، $\overline{ب}$ = ٣$\overline{س}$ + ٢$\overline{ص}$ - $\overline{ع}$

(٢) أوجد $\overline{أ}$ × $\overline{ب}$ فى كل مما يأ . :

(م) $\overline{أ}$ = (٣ ، - ٢ ، ٥) ، $\overline{ب}$ = (١ ، ٢ ، - ١)

(ب) $\overline{أ}$ = ٢$\overline{س}$ + $\overline{ص}$ - ٣$\overline{ع}$ ، $\overline{ب}$ = -$\overline{س}$ + ٣$\overline{ص}$ + ٢$\overline{ع}$

(جـ) $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ فى مستوى الإحداثيات س ص حيث $\|\overline{أ}\|$ = ٨ ، $\|\overline{ب}\|$ = ٤ $\sqrt{٣}$ وقياس الزاوية بينهما 120° حيث $\overline{أ}$ بين $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$ و $\overline{ب}$ بين $\overleftarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$

(٣) أوجد قياس الزاوية بين $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ فى كل مما يأتى :

(م) $\overline{أ}$ = (٣ ، ٢ ، ٢) ، $\overline{ب}$ = (- ١ ، ٣ ، ٤) وأوجد مركبة $\overline{أ}$ فى اتجاه $\overline{ب}$

(ب) $\overline{\text{أ}}$ = (٢ ، ١ ، - ٢) ، $\overline{\text{ب}}$ = (٣ ، ٥ ، ٢) وأوجد مسقط $\overline{\text{ب}}$ فى اتجاه $\overline{\text{أ}}$

(جـ) $\overline{\text{أ}} = ٣\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}} - \overline{\text{ع}}$ ، $\overline{\text{ب}} = ٢\overline{\text{س}} - \overline{\text{ص}} + ٣\overline{\text{ع}}$

(٤) إذا كان: $\overline{\text{أ}}$ = (٢ ، ٣ ، - ٤) ، $\overline{\text{ب}}$ = (- ٢ ، ١ ، - ٣) أوجد $\overline{\text{جـ}}$ إذا كان:

$\overline{\text{جـ}} \times \overline{\text{أ}} = \overline{\text{و}}$ ، $\overline{\text{جـ}} . \overline{\text{ب}} = ٢٢$

(٥) إذا كان: $\overline{\text{أ}}$ = (٣ ، ١ ، ٥) ، $\overline{\text{ب}}$ = (٤ ، ٣ ، - ٣) اثبت أن: $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متعامدان وإذا كان

$\overline{\text{ق}} = ٧\overline{\text{س}} + ٣\overline{\text{ص}} + ٨\overline{\text{ع}}$ أوجد:

(م) مركبة $\overline{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overline{\text{أ}}$ (ب) مركبة $\overline{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overline{\text{ب}}$

(٦) أوجد مساحة سطح المثلث ب جـ ء فى كل من الحالات الآتية:

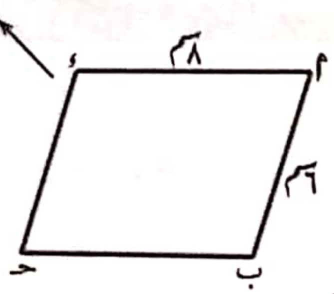
(م) ب (١ ، ٢ ، ٥) ، جـ (٣ ، ١ ، - ١) ، ء (٤ ، ٢ ، - ٣)

(ب) ب (- ٢ ، ١ ، ٣) ، جـ (٢ ، - ٢ ، ٣) ، ء (٥ ، ٢ ، - ١)

(جـ) $\overline{\text{ب جـ}} = ٣\overline{\text{س}} + ٢\overline{\text{ص}} + \overline{\text{ع}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}} = ٤\overline{\text{س}} - ٣\overline{\text{ص}} + ٢\overline{\text{ع}}$

(٧) م ب ج ء مستطيل فيه م ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم،

$\overline{\text{ي}}$ متجه وحدة عمودي على مستوى المستطيل كما بالشكل أوجد :



(م) $\overline{\text{م ب}} . \overline{\text{م جـ}}$ (ب) $\overline{\text{م ب}} \times \overline{\text{م جـ}}$

(جـ) $\overline{\text{م ب}} . \overline{\text{جـ ء}}$ (د) $\overline{\text{م ب}} . \overline{\text{جـ ء}}$

(هـ) $\overline{\text{م جـ}} . \overline{\text{ب ء}}$ (و) $\overline{\text{م جـ}} \times \overline{\text{ب ء}}$

(ز) مركبة $\overline{\text{ب ء}}$ فى اتجاه $\overline{\text{ب جـ}}$ (ح) مركبة $\overline{\text{م ب}}$ فى اتجاه $\overline{\text{ب ء}}$

(٨) أوجد متجه وحدة عمودى على مستوى $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ فى كل من :

(م) $\overline{\text{أ}}$ = (٢ ، ٢ ، ١) ، $\overline{\text{ب}} = \overline{\text{س}} + ٢\overline{\text{ص}} + ٣\overline{\text{ع}}$

(ب) $\overline{\text{أ}}$ = (٢ ، - ٣ ، - ٢) ، $\overline{\text{ب}} = -٣\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}} + ٤\overline{\text{ع}}$

(٩) احسب مساحة سطح متوازى الأضلاع م ب جـ ء فى كل مما يأتى:

(م) م (١ ، ١ ، ٢) ، ب (٠ ، ٠ ، ١) ، جـ (٣ ، ٢ ، - ١)

(ب) م (٢ ، ٣ ، - ١) ، جـ (٥ ، ٢ ، ٤) ، ء (٣ ، - ١ ، ٢)

(جـ) ب (-٣ ، ١ ، ٤) ، جـ (٢ ، ١ ، -١) ، ء (٤ ، ٢ ، ١)

(١٠) فى كل مما يأ . بين ما إذا كان المتجهان متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك

(م) $\overline{أ} = ٢\overline{س} + ٣\overline{ص} - \overline{ع}$ ، $\overline{ب} = (-٤ ، -٦ ، ٢)$

(ب) $\overline{أ} = (٣ ، ٤ ، -٥)$ ، $\overline{ب} = (٤ ، ٢ ، ٤)$

(جـ) $\overline{أ} = \overline{س} + ٢\overline{ص} + ٣\overline{ع}$ ، $\overline{ب} = ٢\overline{س} + \overline{ص} - \overline{ع}$

(١١) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{جـ}$ تمثل ثلاثة أحرف تتلاقى عند أحد رؤوسه فى الحالات الآتية:

(م) $\overline{أ} = (٥ ، ٣ ، ١)$، $\overline{ب} = (٢ ، -١ ، ٤)$، $\overline{جـ} = (٣ ، ٢ ، ٣)$

(ب) $\overline{أ} = (٤ ، ٢ ، ٣)$ ، $\overline{ب} = (٢ ، ٠ ، ٠)$ ، $\overline{جـ} = (٣ ، -١ ، -٢)$

(جـ) $\overline{أ} = (٠ ، ٥ ، ٠)$ ، $\overline{ب} = (١ ، ٢ ، -٢)$ ، $\overline{جـ} = (٢ ، -٣ ، ٥)$

المجموعة الثالثة :

تمارين (١ - ٣) من الكتاب المدرسي

أكمل ما يأ . :

إذا كانت $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ ، $\overline{ع}$ مجموعة عينية من متجهات الوحدة:

(١) $\overline{س} . \overline{ص} =$ ......

(٢) $\overline{ص} \times \overline{ع} =$ .....

(٣) إذا كان $\overline{أ} = (٢ ، -١)$ ، $\overline{ب} = (٣ ، -٤)$ فإن مركبة $\overline{أ}$ فى اتجاه $\overline{ب}$ تساوى ......

(٤) إذا كان : $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ غير صفريان وكان $\overline{أ} . \overline{ب} = ٠$ فإن $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ يكونان ....

(٥) إذا كان : $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ غير صفريان وكان $\overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{و}$ فإن $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ يكونان ....

(٦) قياس الزاوية بين المتجهين $٣\overline{س} - \overline{ص}$ ، $-٤\overline{س} + ٦\overline{ص}$ يساوى ....

(٧) الشغل المبذول من القوة $\overline{ق} = ٣\overline{س} + ٧\overline{ع}$ لتحريك جسم من نقطة م (١ ، ١ ، ٢) إلى نقطة ب (٧ ، ٣ ، ٥) يساوى ......

ر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

) $\overline{س} \times \overline{ص} = ...$

(أ) $\overline{و}$ (ب) ٠ (ج) ١ (د) $\overline{ع}$

(٩) إذا كان $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ متجهى وحدة متعامدين فإن: $(\overline{أ} - ٢\overline{ب}).(٣\overline{أ} + ٥\overline{ب}) = ...$

(أ) -٨ (ب) -٧ (ج) ٢٤ (د) ٠

(١٠) إذا كان $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ متجهى وحدة فإن $\overline{أ} . \overline{ب} \in ....$

(أ) [٠ ، ١] (ب)]-١ ، ١[(ج) [-١ ، ١] (د) ح$^+$

(١١) قياس الزاوية بين المتجهين (٢ ، -٢ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤) يساوى ....

(أ) ٥٧,٠٢ (ب) ٣٥,٢٦ (ج) ١٣٤,٣٧ (د) ٠°

(١٢) إذا كان المتجهان (٢ ، ك ، -٣) ، (٤ ، ٦ ، -٦) متوازيان فإن ك = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (ج) -٣ (د) ١

أجب عما يأتى :

(١٣) أوجد $\overline{أ} . \overline{ب}$ فى كل من الحالات الآتية :

(أ) $\overline{أ}$ = (٥ ، ١ ، -٢) ، $\overline{ب}$ = (٤ ، -٤ ، ٣)

(ب) $\overline{أ} = -٣\overline{س} - ٢\overline{ص} - \overline{ع}$ ، $\overline{ب} = ٦\overline{س} + ٤\overline{ص} + ٢\overline{ع}$

(ج) $\overline{أ} = \overline{س}$ ، $\overline{ب} = ٢\overline{ص} - \overline{ع}$

(١٤) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين فى كل من الحالات الآتية :

(أ) (٥ ، ١ ، -٢) ، (١ ، ١ ، -١)

(ب) (٧ ، ٢ ، -١٠) ، (٢ ، ٦ ، ٤)

(ج) (٢ ، ١ ، ٤) ، (١ ، -٢ ، ٠)

(١٥) أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ فى كل من الحالات الآتية :

(م) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢ ، ٣ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٣ ، -٤)

(ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $-\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ − ٥$\overrightarrow{\text{ع}}$

(جـ) $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٦ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٨ وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

(١٦) م ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم $\overrightarrow{\text{ي}}$ متجه وحدة عمودى على مستواه أوجد :

(م) $\overrightarrow{\text{أب}} . \overrightarrow{\text{أجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{جـأ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{بجـ}} . \overrightarrow{\text{أء}}$

(د) $\overrightarrow{\text{بء}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}$ (هـ) $\overrightarrow{\text{أب}} . \overrightarrow{\text{بجـ}}$ (و) $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{بجـ}}$

(١٧) أوجد متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى المتجهين

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $-\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ع}}$

(١٨) احسب مساحة المثلث ء هـ و فى كل مما يأ . :

(م) ء (٥ ، ١ ، -٢) ، هـ (٤ ، -٤ ، ٣) ، و (٢ ، ٤ ، ٠)

(ب) ء (٤ ، ٠ ، ٢) ، هـ (٢ ، ١ ، ٥) ، و (-١ ، ٠ ، -١)

(١٩) احسب مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ فى كل مما يأتى :

(م) ل (١ ، ١) ، م (٢ ، ٣) ، ن (٥ ، ٤)

(ب) ل (٢ ، ١ ، ٣) ، م (١ ، ٤ ، ٥) ، ن (٢ ، ٥ ، ٣)

(٢٠) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ تمثل ثلاث أحرف متجاورة فى كل مما يأتى:

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ١ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٥ ، ١ ، -٢)

(٢١) فى كل مما يأتى بين ما إذا كان المتجهان متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك :

(م) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ٢ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٠ ، -٤)

(ب) $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = ١٠$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{و}}$ = −٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٨$\overrightarrow{\text{ع}}$

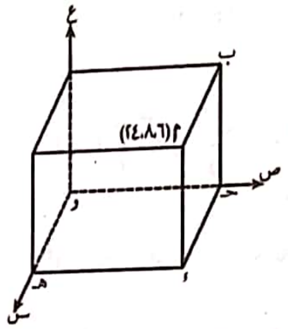
(جـ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = −٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٨$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٨$\overrightarrow{\text{ع}}$

تمارين كتاب المدرسة العامة على الوحدة الأولى

أكمل ما يأتي :

١) النقطة (٢ ، ٠ ، - ٣) تقع في مستوى الإحداثيات.... الذى معادلته.....

٢) الشكل المقابل يمثل متوازي مستطيلات : م (٦ ، ٨ ، ٢٤) فإن :



(م) إحداثيات النقطة ء هي ......

(ب) إحداثيات النقطة جـ هي ......

(جـ) زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{وء}$ هي ......

٣) إذا كان م (- ١ ، ٢ ، ٣) ، ب (٤ ، - ١ ، ٥) فإن $\overrightarrow{مب}$ = ...

٤) إذا كانت (- ٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٢٥ فإن م = ...

٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (ل ، ٣ ، -٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (- ٢ ، ٩ ، م) وكان $\overrightarrow{أ} \,/\!/\, \overrightarrow{ب}$ فإن: ل = ... ، م = ...

٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = \left\| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \right\|$ فإن قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}$ يساوى ......

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

٧) المستقيمان $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{عع'}$ يكونان مستوى الإحداثيات الذى معادلته ......

(م) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) ص = ٢

٨) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، - ١ ، ٢) هي ......

(م) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٤ (ب) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ١٤

(جـ) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = $\sqrt{١٤}$

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ١٤

٩) إحداثيات نقطة منتصف القطعة $\overline{ءهـ}$ حيث ء (٢ ، ٣ ، ٣) ، هـ (٦ ، - ١ ، - ٤)

(م) $\left(٤ ، ٢ ، ٣\frac{١}{٢}\right)$ (ب) $\left(٢ ، ١ ، \frac{١}{٢}\right)$ (جـ) $\left(٤ ، ١ ، -\frac{١}{٢}\right)$ (د) $\left(٤ ، ١ ، \frac{١}{٢}\right)$

(١٠) إذا كان $\overline{أ} \parallel \overline{ب}$ فإن : $\|\overline{أ} \times \overline{ب}\| = ...$

(م) صفر (ب) ١ (جـ) $\|\overline{أ}\|$ (د) $\|\overline{ب}\|$

(١١) المتجه الذى يمثل متجه وحدة فى المتجهات الآتية :

(م) (-٣ ، ٢ ، ٢) (ب) $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}\right)$

(جـ) $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥} ، ٠\right)$ (د) $\left(\frac{-١}{١٢} ، \frac{-٣}{١٢} ، \frac{٢}{١٢}\right)$

(١٢) إذا كان : ل ، هـ ، و هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overline{أ}$ فإن:

(م) ل + هـ + و = ١ (ب) ل = هـ = و

(جـ) $ك^٢ + هـ^٢ + و^٢ = ١$ (د) ل + هـ + و = $\|\overline{أ}\|$

(١٣) إذا كان $\overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{و}$ ، $\overline{أ} . \overline{جـ} = ٠$ فإن $\overline{ب} . \overline{جـ} = ...$

(م) ٠ (ب) ١ (جـ) $\overline{أ}$ (د) $\|\overline{ب}\|$

(١٤) مستويا الإحداثيات س ص ، ص ع يتقاطعان فى ......

(م) نقطة الأصل (ب) محور س (جـ) محور ص (د) محور ع

أجب عن ما يأتى :

(١٥) اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط (٧ ، ١ ، ٣) ، (٥ ، ٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوى الساقين.

(١٦) أوجد مركز وطول نصف قطر الكرة $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٦ ع$.

(١٧) إذا كان: م (-٢ ، ٣ ، ٥) ، ب (١ ، ٤ ، -٢) أوجد $\overrightarrow{أب}$

(١٨) إذا كان $\overline{جـ} = (١ ، -٢ ، ٢)$ فأوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\overline{جـ}$

(١٩) إذا كان المتجه $\overline{أ}$ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة س ، ص ، ع زوايا قياساتها ٦٠° ، ٨٠° ، θ° حيث θ زاوية حادة.

(م) أوجد قيمة θ (ب) اكتب الصورة الجبرية للمتجه $\overline{أ}$ إذا علمت أن $\|\overline{أ}\| = ١٣$

(٢٠) إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٦ ، ١٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (ك ، ٣ ، م) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (ك ، م ، ك + م) وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \,/\!/\, \overrightarrow{\text{ب}}$ أوجد $\|\overrightarrow{\text{جـ}}\|$

(٢١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجها وحدة فى ح^{٣} ، تحت أى شرط يكون حاصل الضرب الاتجاهى $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ يمثل متجه وحدة فى ح^{٣} فسر إجابتك.

(٢٢) ٲ ب جـ ء مستطيل فيه ٲ ب = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم أوجد :

(ٲ) $\overrightarrow{\text{ٲب}} . \overrightarrow{\text{جـ ء}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ٲب}} . \overrightarrow{\text{جـ ء}}$ (جـ) مركبة $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

(٢٣) أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٢ ، - ٣ ، ٥) لتحريك جسم من نقطة (١ ، - ١ ، ٠) إلى نقطة (٢ ، ٤ ، - ٢).

(٢٤) أوجد الشغل المبذول من وزن جسم مقداره ٤٠ نيوتن يتحرك رأسياً لأعلى مسافة ١٠ متر فوق سطح الأرض.

(٢٥) برهن كل من ما يأتى حيث $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \in$ ح^{٣}

(ٲ) $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|^{٢} + |\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}}|^{٢} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{٢} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{٢}$

(ب) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}}$ = ٠ ، $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإن : إما $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

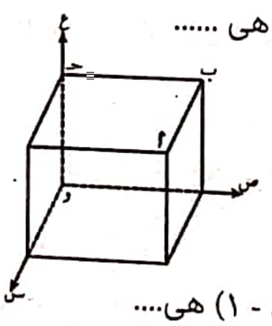
اختبارات كتاب المدرسة التراكمية على الوحدة الأولى

أكمل ما يأتى :

(١) بعد النقطة (- ٤ ، - ٣ ، ٢) عن مستوى الإحداثيات ص ع يساوى ...... وحدة طول.

(٢) إذا كانت النقطة (ٲ – ٢ ، ب + ٣ ، جـ - ٤) تقع فى المستوى الإحداثى س ع فإن ب = ...

(٣) إذا كانت ٲ (- ١ ، ٠ ، - ٢) ، ب (٥ ، - ١ ، ٤) فإن إحداثيات منتصف $\overline{\text{ٲب}}$ هى ......



(٤) الشكل المقابل متوازى مستطيلات : ٲ (٥ ، ٨ ، ٤) فإن:

(ٲ) إحداثيات النقطة ب هى ....

(ب) إحداثيات النقطة جـ هى ....

(٥) معادلة الكرة التى مركزها النقطة (١ ، - ٣ ، - ١) وتمر بالنقطة (- ٢ ، - ١ ، - ١) هى.....

(٦) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (- ٢ ، ٣ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٢ ، - ٢) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (١ ، - ٣ ، ٥) فإن: ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ – ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$+$\overrightarrow{\text{جـ}}$=......

(٧) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، - ٢ ، ٣) فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يساوى ......

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات :

(٨) إذا كان أ = (٣ ، - ٢ ، م) وكان ‖أ‖ = $\sqrt{٢٢}$ فإن م = ...

(م) ٢١ (ب) ± ٩ (جـ) ± ٣ (د) ١٧

(٩) إذا كان أ = ٢س + ٣ص − ع ، ب = ٤س − ص فإن أ . ب = ...

(م) ٥ (ب) ٤ (جـ) ± ٣ (د) ٢

(١٠) إذا كان أ = ٤س − ٣ص + ٥ع فإن مركبة أ فى اتجاه محور ص تساوى ..

(م) ٤ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) ٥

(١١) إذا كان أ = (٢ ، ٣ ، - ١) ، ب = ٣س + ٤ص فإن مركبة أ فى اتجاه ب تساوى:

(م) ١٨ (ب) $\frac{١٨}{٥}$ (جـ) $-\frac{١٨}{٥}$ (د) $\frac{١٨}{٢٥}$

(١٢) متجه زوايا لاتجاه له ٤٥° ، ٤٥° ، θ فإن θ = ...

(م) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ٠° (د) ٦٠°

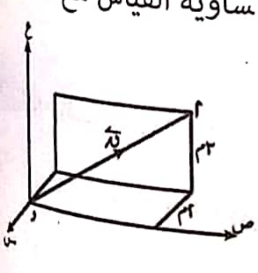
أجب عما يأتى :

(١٣) اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط (٢ ، ٢ ، ١) ، (٠ ، ٠ ، ٠) ، (٢ ، - ٤ ، ٤) هو مثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته.

(١٤) أوجد معادلة الكرة التى مركزها (٠ ، ٤ ، ٠) وتمس المستوى الإحداثى س ع.

(١٥) إذا كان : أ = (١ ، - ٣ ، ٢) ، ب = (٠ ، ٢ ، ٣) أوجد : ‖أ‖ ، ‖أ + ب‖

(١٦) أوجد الصورة الجبرية للمتجه أ الذى معياره ٢١ $\sqrt{٣}$ ويصنع زوايا متساوية القياس مع محاور الإحداثيات الموجبة.



(١٧) أوجد مركبات القوة ق التى مقدارها ١٢ $\sqrt{٢٩}$ نيوتن.

(١٨) إذا كان أ = س + ص − ٢ع ، ب = ٣س − ٢ص + ٥ع أوجد :

(م) أ × ب (ب) (٢أ) × (٣ب) (جـ) أ × (أ − ٢ب)

(١٩) تفكير إبداعى : إذا كان م (٠ ، ٠ ، ١) ، ب (١ ، ٠ ، ٠) ، جـ (٠ ، ١ ، ٠) أوجد متجه وحدة عمودى على المستوى م ب جـ

(٢٠) أوجد قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه جـ = ٣س − ٤ص + ٥ع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

اختبارات كتاب لامي للمراجعة على الوحدة الأولى

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

[1] (أ) أكمل :

(1) إذا كان $\overline{أ}$ = (- ٤ ، ٢ ، ٤) ، $\overline{ب}$ = (ك ، ٢ ، ٦) متعامدان فإن: ك = ...

(٢) إذا كان أ (٣ ، ١ ، ٥) ، ب (٥ ، ٣ ، ٣) فإن منتصف $\overline{أب}$ هو ....

(ب) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

الكرة التي معادلتها : (س + ٢)^2 + (ص - ٤)^2 + (ع + ٦)^2 = ٢٥

(1) مركزها هو .....

(أ) (٢ ، - ٤ ، ٦) (ب) (- ٢ ، ٤ ، - ٦) (جـ) (- ١ ، ٢ ، - ٣) (د) (١ ، - ٢ ، ٣)

(٢) طول قطرها هو ....

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (جـ) ٥٠ (د) ١٠

[٢] أ ب جـ مثلث فيه أ (١ ، ٣ ، ٥) ، ب (- ٢ ، ٧ ، ٤) ، جـ (٣ ، ١ ، - ١) وكانت ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ أوجد إحداثيات النقطة هـ بحيث $\overline{هجـ} \times \overline{بء} = \overline{و}$ ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ هـ جـ ومنه أوجد مساحة سطح Δأ ب ء.

[٣] إذا كان $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{جـ}$ تمثل ثلاثة أحرف غير متوازية من متوازي سطوح حيث $\overline{أ}$ = (٢ ، ٣ ، ٥) ، $\overline{ب}$ = (- ١ ، ٢ ، ٣) ، $\overline{جـ}$ = (٤ ، - ٣ ، ٣).

(أ) أوجد مساحة سطح المثلث الذى فيه $\overline{ب}$ ، $\overline{جـ}$ ضلعان متجاوران.

(ب) أوجد حجم متوازي السطوح.

(جـ) أوجد ارتفاع متوازي السطوح العمودي على القاعدة التي فيها $\overline{ب}$ ، $\overline{جـ}$ ضلعان متجاوران.

[٤] (أ) أوجد معادلة الكرة التي طرفا قطر فيها (٣ ، ٥ ، ٧) ، (- ١ ، ٣ ، - ٥).

(ب) أوجد معادلة الكرة التي مركزها (٢ ، - ٥ ، ١) وتمس مستوى الإحداثيات س ع.

[٥] اثبت أن النقطة م (٢ ، ٣ ، - ٤) تقع على الكرة: $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤ س - ٢ ص + ٦ ع = ٧$ وإذا كان $\overline{م جـ}$ قطر لهذه الكرة وكانت ب (٣ ، ٥ ، - ٢) فإذا أثرت قوة $\vec{ق}$ تعمل في $\overrightarrow{م ب}$ ومعيارها ١٢ وحدة قوة على جسم عند م فأزاحته إلى جـ أوجد الشغل المبذول بواسطة القوة $\vec{ق}$ خلال الإزاحة من م إلى جـ

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] (م) أكمل الآتي : إذا كان : $\vec{أ}$ = (٢ ، ٣ ، ١) ، $\vec{ب} = \vec{س} + ٥\vec{ص} - ٣\vec{ع}$ فإن :

(١) $\vec{أ} . \vec{ب}$ (٢) $\vec{أ} \times \vec{ب}$ =....

(ب) اختر الإجابة الصحيحة بين الإجابات المعطاة :

إذا كان: $\vec{أ} = ٣\vec{س} + ٥\vec{ص} - ٢\vec{ع}$ ، $\vec{ب} = (٢ ، -٢ ، ١)$ فإن:

(١) مركبة $\vec{أ}$ فى اتجاه $\vec{ب}$ = ...

(م) ٢ (ب) - ٢ (جـ) ٦ (د) - ٦

(٢) مساحة سطح المثلث الذى فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران: .... وحدة مربعة :

(م) $\sqrt{٣٦٨}$ (ب) $\sqrt{٣٠٦}$ (جـ) $\frac{١}{٢}\sqrt{٣٠٦}$ (د) $\sqrt{٩٢}$

[٢] إذا كان م مركز الكرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢ س - ٦ ص + ٢ ع = ١٤$

فإذا كانت م (٤ ، - ٢ ، ٣)

(م) بين موقع النقطة م بالنسبة للكرة المعطاة.

(ب) أوجد معادلة الكرة التى مركزها النقطة م وتمر بالنقطة م.

[٣] إذا كانت : $\vec{أ}$ = (- ٣ ، ٢ ، ٥) ، $\vec{ب}$ = (٤ ، - ٢ ، ٣) ، $\vec{جـ}$ = (- ١ ، ٥ ، ٤) تمثل ثلاثة أحرف تتلاقى فى أحد الرؤوس أوجد:

(م) حجم متوازى السطوح.

(ب) المساحة السطحية لمتوازى السطوح.

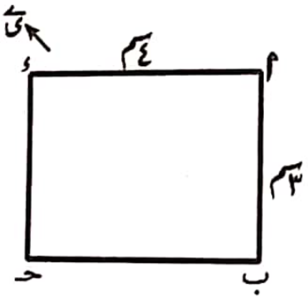
[٤] (أ) أثرت قوة $\overline{ق} = (٥ ، ٨ ، ١٢)$ في جسم فحركته في اتجاه عمودي على مستوى الإحداثيات س ع مساحة ١٠ وحدات أوجد الشغل المبذول من القوة $\overline{ق}$ خلال هذه الإزاحة.

(ب) إذا كان $\overline{أ} = (٢ ، -٥ ، -٢)$ ، $\overline{ب} = (\overline{س} - ٣\overline{ص} + ٢\overline{ع})$ أوجد $\overline{ج}$ حيث:

$\overline{ج} \times \overline{ب} = \overline{و}$ ، $\overline{ج} . \overline{أ} = ٣٩$

ج // ب ج = م ب

[٥] في الشكل أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، $\overline{ي}$ متجه وحدة عمودي على مستوى المستطيل أوجد:



(أ) $\overline{أب} . \overline{بج}$ (ب) $\overline{أب} \times \overline{بج}$

(جـ) $\overline{بج} \times \overline{جا}$ (د) مركبة $\overline{أب}$ في اتجاه $\overline{بد}$

(هـ) مركبة $\overline{أج}$ في اتجاه $\overline{دب}$

ج = (م ، -٣م ، ٢م)

ج . أ = ٢م + ١٥م + ٤م = ٣٩

١٣م = ٣٩ $\boxed{م = ٣}$

الوحدة الثانية:

الخطوط المستقيمة والمستويات في الفراغ

1- معادلة المستقيم في الفراغ

2- معادلة المستقيم في الفراغ

تمارين عامة

تمارين واختبارات الكتاب

اختبارات عامة

معادلة المستقيم فى الفراغ

متجة إتجاه المستقيم فى الفراغ:

- إذا كانت زوايا اتجاه مستقيم فى الفراغ هى $\theta_{\text{س}}$ ، $\theta_{\text{ص}}$ ، $\theta_{\text{ع}}$
- وتكون $\left(\text{جتا}\,\theta_{\text{س}} \text{ ، جتا}\,\theta_{\text{ص}} \text{ ، جتا}\,\theta_{\text{ع}}\right)$ هى جيوب عام الاتجاه للمستقيم
- ويرمز لها بالرموز ل ، م ، ن حيث $\text{ل} = \text{جتا}\,\theta_{\text{س}}$ ، $\text{م} = \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}}$ ، $\text{ن} = \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}}$
- ومنها قيمة الوحدة فى اتجاه المستقيم $\overline{\text{ى}} = \text{ل}\,\overline{\text{س}} + \text{م}\,\overline{\text{ص}} + \text{ن}\,\overline{\text{ع}}$
- وأى متجه يوازى متجه الوحدة $\overline{\text{ى}}$ يسمى متجه اتجاه المستقيم ويرمز له بالرمز $\overline{\text{هـ}}$
- أى أن: $\overline{\text{هـ}} = \text{ك}\left(\text{ل}\,\overline{\text{س}} + \text{م}\,\overline{\text{ص}} + \text{ن}\,\overline{\text{ع}}\right) = \left(\text{أ ، ب ، جـ}\right)$
- حيث أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن ، $\text{ك} \in \text{ع}$
- حيث: أ ، ب ، جـ تسمى نسب اتجاه المستقيم.

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم فى الفراغ :

هى: $\boxed{\overline{\text{ر}} = \overline{\text{أ}} + \text{ك}\,\overline{\text{هـ}}}$

حيث $\overline{\text{أ}}$ = نقطة على المستقيم $= \left(\text{س}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، ع}_1\right)$ ،

$\overline{\text{هـ}}$ = متجه اتجاه المستقيم ك = بارامتر

الصورة البارامترية للمستقيم فى الفراغ :

$$\left(\text{س ، ص ، ع}\right) = \left(\text{س}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، ع}_1\right) + \text{ك}\left(\text{أ ، ب ، جـ}\right)$$

المعادلات البارامترية هى :

$$\boxed{\text{س} = \text{س}_1 + \text{ك أ} \quad \text{، ص} = \text{ص}_1 + \text{ك ب} \quad \text{، ع} = \text{ع}_1 + \text{ك جـ}}$$

- **المعادلة الإحداثية للخط المستقيم :**

هو $\boxed{\dfrac{س - س_1}{أ} = \dfrac{ص - ص_1}{ب} = \dfrac{ع - ع_1}{جـ}}$ ،

∵ أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن

فإن $\boxed{\dfrac{س - س_1}{ل} = \dfrac{ص - ص_1}{م} = \dfrac{ع - ع_1}{ن}}$

- **الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ :**

إذا كان $هـ_1$ متجه اتجاه $ل_1$ ، $هـ_2$ هو متجه اتجاه $ل_2$

فإن قياس الزاوية الصغرى بين $ل_1$ ، $ل_2$ تعطى بالعلاقة :

$$جتا\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ}_1 . \overrightarrow{هـ}_2|}{\|\overrightarrow{هـ}_1\|\|\overrightarrow{هـ}_2\|}$$

وإذا كان جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين هما: $(ل_1 ، م_1 ، ن_1)$ ، $(ل_2 ، م_2 ، ن_2)$

فإن : $جتا\theta = |ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2|$

- **المستقيمان المتوازيان فى الفراغ :**

إذا كان: $\overrightarrow{هـ}_1 = (أ_1 ، ب_1 ، جـ_1) ، \overrightarrow{هـ}_2 = (أ_2 ، ب_2 ، جـ_2)$

هما متجها اتجاه $ل_1$ ، $ل_2$ فإن $ل_1$ // $ل_2$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{هـ}_1 // \overrightarrow{هـ}_2$

ويمكن تحقق ذلك بأى من الصور الآتية:

(١) $\boxed{\overrightarrow{هـ}_1 = ك\overrightarrow{هـ}_2}$ أ.

(٢) $\boxed{\dfrac{أ_1}{أ_2} = \dfrac{ب_1}{ب_2} = \dfrac{جـ_1}{جـ_2}}$

(٣) $\boxed{\overrightarrow{هـ}_1 \times \overrightarrow{هـ}_2 = \overrightarrow{و}}$

○ ملاحظة : (١) إذا كان $ل_1$ // $ل_2$ ونقطة أ ∈ $ل_1$ ، ونقطة أ ∈ $ل_2$ فهذا يعنى أنهما منطبقان.

(٢) إذا كان $\overrightarrow{هـ}_1$ لا يوازى $\overrightarrow{هـ}_2$ فإن $ل_1$ ، $ل_2$ إما متقاطعان أو متخالفان.

■ **المستقيمان المتعامدان فى الفراغ :**

إذا كان $\overrightarrow{هـ}_{١} = (أ_{١}، ب_{١}، جـ_{١})$ ، $\overrightarrow{هـ}_{٢} = (أ_{٢}، ب_{٢}، جـ_{٢})$

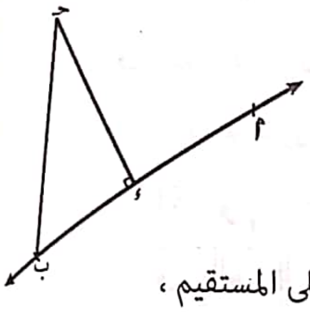
فإن $ل_{١} \perp ل_{٢}$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{هـ}_{١} . \overrightarrow{هـ}_{٢} = ٠$

○ **ملاحظة هامة :**

لإثبات أن مستقيمان متخالفان يجب إثبات أنه لا توجد أى قيم لـ $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ تجعل $\overrightarrow{ر}_{١} = \overrightarrow{ر}_{٢}$.

■ **البُعد بين نقطة و مستقيم فى الفراغ :**

طول العمود المرسوم من النقطة جـ الى المستقيم الذي معادلته $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب} + ك\overrightarrow{هـ}$



$ب ء = \left| \text{مسقط } \overrightarrow{ب جـ} \text{ على } \overrightarrow{أ ب} \right|$

$جـ ء = \text{طول العمود} = \sqrt{(ب جـ)^{٢} - (ب ء)^{٢}}$

أيضا طول العمود = $جـ ء = \frac{\| \overrightarrow{ب جـ} \times \overrightarrow{هـ} \|}{\| \overrightarrow{هـ} \|}$ حيث أ ، ب نقطتان على المستقيم ،

جـ نقطة خارج المستقيم

تمارين (٤) على الدرس الأول

المجموعة الأولى:

أكمل ما يلى :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين فى الحالات الآتية :

(أ) متجهى اتجاهها: $\overrightarrow{هـ}_{١} = (١، -٢، ٢)$، $\overrightarrow{هـ}_{٢} = (٤، -٢، ٥)$ هى ....

(ب) معادلتيهما $\overrightarrow{ر}_{١} = \overrightarrow{أ} + ك(٢، ٣، ٢)$، $\overrightarrow{ر}_{٢} = \overrightarrow{ب} + ك'(-١، ٣، ٢)$ هى ....

(جـ) معادلتيهما: $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع + ١}{٢}$ ، $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع + ١}{٤}$ هى..........

(٢) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤ ، ٢) والمتجه (٣ ، ١ ، -١) متجه اتجاة له هى.......

(٣) متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين :

(أ) (١ ، ٢ ، ٣) ، (-١ ، ١ ، -١) هو ....

(ب) (٣ ، ٢ ، -٣) ، (٢ ، ٤ ، -١) هو............

(٤) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه:

(أ) (١ ، - ٢ ، ٣) هو ....

(ب) (١ ، ٠ ، ٢) هو ....

(٥) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى يمر بالنقطتين:

(أ) (٢ ، - ٢ ، ١) ونقطة الأصل هى ....

(ب) (٣ ، ١ ، ٤) ، (٢ ، - ١ ، ٥) هى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٦) الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم الذى متجه اتجاهه (٢ ، ٣ ، ١) و .ر بالنقطة (- ١ ، ٥ ، ٤) هى:

(أ) $\vec{\text{ر}}$ = (٢ ، ٣ ، ١) + ك (- ١ ، ٥ ، ٤)

(ب) $\frac{\text{س} - ٢}{-١} = \frac{\text{ص} - ٣}{٥} = \frac{\text{ع} - ١}{٤}$

(جـ) $\vec{\text{ر}}$ = (- ١ ، ٥ ، ٤) + ك (٢ ، ٣ ، ١)

(د) $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ٥}{٣} = \frac{\text{ع} + ٤}{١}$

(٧) إذا كان $\vec{\text{هـ}}_{١}$ = (٢ ، ٣ ، ٤) ، $\vec{\text{هـ}}_{٢}$ = (- ٣ ، - ٢ ، ٣) متجهاً الاتجاه المستقيمان فإنهما:

(أ) متوازيان. (ب) متعامدان. (جـ) منطبقان. (د) غير ذلك.

(٨) إذا كان $\vec{\text{هـ}}_{١}$ = (٣ ، ٤ ، ٥)، $\vec{\text{هـ}}_{٢}$ = (٢ ، - ١ ، ٣) هما متجها اتجاه مستقيمان فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) ٥٩′ ١٢٩° (ب) ١′ ٥٠° (جـ) ٥٩′ ٣٩° (د) ١′ ١٤٠°

(٩) المعادلة المتماثلة للمستقيم $\vec{\text{ر}}$ = (٢ ، - ٣ ، - ١) + ل (٣ ، ٢ ، ٥) هى:

(أ) $\frac{\text{س} - ٣}{٢} = \frac{\text{ص} + ٣}{٢} = \frac{\text{ع} + ١}{٥}$

(ب) $\frac{\text{س} + ٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٣}{٢} = \frac{\text{ع} - ١}{٥}$ ،

(جـ) $\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{\text{ص} + ٣}{٢} = \frac{\text{ع} + ١}{٥}$

(د) س - ٢ = ص + ٣ = ع + ١

(١٠) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣ ، ٤) ، (- ١ ، ٢ ، - ٣) هى:

(أ) $\vec{\text{ر}}$ = (٢ ، ٣ ، ٤) + ك (٣ ، ١ ، ٧)

(ب) $\vec{\text{ر}}$ = (٣ ، ١ ، ٧) + ك (٢ ، ٣ ، ٤)

(جـ) $\vec{\text{ر}}$ = (٣ ، ١ ، ٧) + ك (- ١ ، ٢ ، - ٣)

(د) $\vec{\text{ر}}$ = (- ١ ، ٢ ، - ٣) + ك (٢ ، ٣ ، ٤)

(١١) البُعد بين النقطة م (٤ ، - ١ ، ٣) والمستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٤ ، ٢ ، ٦) + ك (٢ ، ٢ ، ١) هو :

(م) ٥ وحدات. (ب) $٣\sqrt{٢}$ وحدة. (جـ) ٤ وحدات. (د) ٣ وحدات.

المجموعة الثانية :

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم فى الحالات الآتية:

(م) يمر بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ١) ، (٥ ، ٣ ، - ١)

(ب) يمر بالنقطة (٢ ، ٣ ، ٤) ومتجه اتجاهه هو (١ ، ٢ ، - ١)

(جـ) يمر بالنقطة (٥ ، - ١ ، ٢) ويوازى المستقيم الذى متجه اتجاهه هو (١ ، - ١ ، ٣)

(د) يمر بالنقطة (١ ، ٤ ، - ١) ويوازى المستقيم الواصل بين النقطتين (٣ ، ٤ ، ٥)، (- ١، ١، - ١)

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم فى الحالات الآتية :

(م) يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٣) ويوازى المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ك (٣ ، - ١ ، ١)

(ب) يمر بالنقطة (١ ، ٣ ، - ١) وبالنقطة (٣ ، ٢ ، ١)

(جـ) متجه اتجاهه (٢ ، ٢ ، ١) ويمر بالنقطة (- ١ ، - ٢ ، ٥)

(٣) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين فى الحالات الآتية :

(م) $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١ ، ٤) + $ك_١$ (٥ ، - ١ ، ٢) ،

$ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٤ ، ٥) + $ك_٢$ (- ١ ، ٣ ، ٣)

(ب) $ل_١$: $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص - ٣}{٢} = ع$ ، $ل_٢$: $س = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع}{٢}$

(جـ) متجهى الاتجاه لهما: $\overrightarrow{هـ}_١$ = (٢ ، ١ ، ٢) ، $هـ_٢$ (- ١ ، - ٢ ، ٢)

(٤) أوجد الشرط اللازم لكى يكون المستقيمان:

$ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣ ، ٥) + $ك_١$ ($م_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$)

$ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (- ١ ، ٢ ، ١) + $ك_٢$ ($م_٢$ ، $ب_٢$ ، $جـ_٢$)

(م) متعامدان. (ب) متوازيان. (جـ) متقاطعان فى نقطة.

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة م (١ ، ١ ، ٠) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤ ، ٥)، (- ٢ ، ٥ ، ٦) ثم بين أن النقطة (- ١٤ ، ٤ ، ٣) تقع على هذا المستقيم.

(٦) اثبت أن المستقيمان :

ل$_{١}$: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك$_{١}$ (١ ، ٢ ، - ٣)

، ل$_{٢}$: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (- ١ ، ٤ ، ٦) + ك$_{٢}$ (- ٢ ، - ٤ ، ٦) متوازيان ، ثم أوجد البُعد العمودى بينهما.

(٧) أوجد نقطة تقاطع المستقيمان فى كل من الحالات الآتية:

(أ) ل$_{١}$: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، ٤ ، ١) + ك$_{١}$ (٢ ، - ١ ، ٣)

ل$_{٢}$: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٤ ، - ٤ ، ١٠) + ك$_{٢}$ (١ ، ٢ ، - ١)

(ب) ل$_{١}$: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك$_{١}$ (٣ ، ٢ ، ٢)

ل$_{٢}$: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (- ١ ، ١ ، - ٣) + ك$_{٢}$ (- ٤ ، - ٣ ، ٢)

(جـ) ل$_{١}$: $\frac{\text{س} - ٢}{٢} = \frac{\text{ص} + ٢}{٢} = \frac{\text{ع} - ٤}{-١}$

ل$_{٢}$: $\frac{\text{س} - ١٠}{٣} = \frac{\text{ص} - ٤}{٢} = \frac{\text{ع} - ٧}{٢}$

(٨) اثبت أن المستقيمان: $\overrightarrow{\text{ر}}_{١}$ = (٣ ، - ٣ ، ٥) + ل$_{١}$ (٠ ، - ٥ ، ٥) ،

$\overrightarrow{\text{ر}}_{٢}$ = (- ٢ ، ٣ ، ١) + ل$_{٢}$ (٥ ، - ١ ، - ١)

متعامدان ومتقاطعان فى نقطة وأوجد إحداثيات نقطة التقاطع.

(٩) اثبت أن المستقيمان : ل$_{١}$: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ل$_{١}$ (٢ ، - ١ ، ١) ،

ل$_{٢}$: $\frac{\text{س} - ١}{-٢} = \frac{\text{ص} - ١}{٧} = \frac{\text{ع} - ١}{١١}$ متعامدان ومتخالفان.

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، - ١ ، ٣) ويقطع المستقيم

$\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ١}{٢} = \frac{\text{ع} - ٢}{-١}$ على التعامد.

(١١) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، - ٤) إلى المستقيم

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١ ، - ١ ، ٢) + ك (٤ ، ٦ ، - ٤)

(١٢) أوجد المعادلات البارامترية للخط المستقيم.

(أ) المار بنقطة الأصل وبالنقطة (- ٢ ، ٣ ، ١)

(ب) بالنقطة (٢ ، - ١ ، ٣) والمتجه (٤ ، - ٢ ، ٥) متجه اتجاه له.

(١٣) اثبت أن المستقيمان: $\vec{ر}_١$ = (٣ ، - ١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣) ،

$\vec{ر}_٢$ = (٠ ، ٤ ، - ١) + ك٢ (١ ، - ١ ، ٢) متخالفان

(١٤) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٤ ، ٣ ، + ٢) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية القياس.

(١٥) أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه هى:

(م) ١ ، - ٢ ، ٢ وإذا كان يمر بالنقطة (٤ ، ١ ، ٣) أوجد معادلته.

(ب) ٤ ، ٢ ، ١ (جـ) ٣ ، - ٤ ، ١٢

المجموعة الثالثة :

تمارين (٢-١) من الكتاب المدرسي

أكمل :

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٢ ، - ١ ، ٣) والمتجه (- ١ ، ٤ ، ٢) متجه اتجاه له........

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين : ٢ س = ٣ ص = - ع ، ٦ س = - ص = - ٤ ع يساوى ....

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما هى (١، ١، ٣)، ($\sqrt{٣}$ - ١ ، - $\sqrt{٣}$ - ١، ٤)

يساوى..............

(٤) إذا كانت θ ع هى الزاوية التى يصنعها المستقيم المار بالنقطة (٣ ، - ١ ، ١) ونقطة الأصل ومحور ع

فإن جتا θ ع = ...

(٥) متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين (٧ ، - ٥ ، ٤) ، (٥ ، - ٣ ، ٣) هو..................

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٦) أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه:

(م) - ١ ، ٢ ، ٣ (ب) ١ ، ١ ، ١

(٧) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم.

(م) المار بالنقطة (٤ ، - ٢ ، ٥) والمتجه $\vec{هـ}$ = (٢ ، ١ ، - ١) متجه اتجاه له.

(ب) المار بالنقطة (٣ ، - ١ ، ٥) ويوازى المتجه $\overline{أب}$ حيث $\overline{أب}$ = (٤ ، - ٢ ، ٢)

(جـ) المار بالنقطتين (٣ ، - ٢ ، ٠) ، (٠ ، ٤ ، ١)

(د) المار بالنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية.

(٨) أوجد الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم $\acute{س} - ٣ = \frac{ص + ٢}{٤} = \frac{٢ - ع}{٣}$

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{و١} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وب} = -\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ع}$ ،

$\overrightarrow{وجـ} = ٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وء} = ٨\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$

أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات.

(أ) المار بالنقطتين أ ، ب (ب) المار بالنقطة ء موازياً $\overleftrightarrow{بجـ}$

(جـ) المار بالنقطة جـ ويقطع $\overleftrightarrow{أب}$ على التعامد.

(١٠) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين.

(أ) $ل_١$: يمر بالنقطتين (- ٣ ، ٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥ ، - ٢) ، $ل_٢$: يمر بالنقطتين (١ ، - ٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢ ، ٣)

(ب) $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، - ١ ، ٣) + $ك_١$ (- ١ ، ٤ ، ٢) ، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢ ، - ١) + $ك_٢$ (١ ، ١ ، ٣)

(جـ) $ل_١$: ٢س = ٣ص = ٤ع ، $ل_٢$: $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع}{-٥}$

(١١) اذكر الشرط (أو الشروط) اللازم لكى يكون المستقيمان :

$ل_١ : س = س_١ + أ_١ ك_١$ ، $ص = ص_١ + ب_١ ك_١$ ، $ع = ع_١ + جـ_١ ك_١$

$ل_٢ : س = س_٢ + أ_٢ ك_٢$ ، $ص = ص_٢ + ب_٢ ك_٢$ ، $ع = ع_٢ + جـ_٢ ك_٢$

(أ) متوازيان. (ب) متعامدان. (جـ) متقاطعان فى نقطة.

(١٢) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة أ (١ ، - ١ ، ٠) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (-٣ ، ٢ ، ١) ، جـ (٢ ، ١ ، ٠) ثم بين أن النقطة ء (- ١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم.

(١٣) أوجد قيمة ىر التى تجعل المستقيمان $ل_١$: $\overrightarrow{ر}_١$ = (٣ ، - ١ ، ىر) + $ك_١$ (٤ ، ١ ، ٣) ،

$ل_٢$: $س = \frac{ص - ٤}{-١} = \frac{ع + ١}{٢}$ متقاطعان فى نقطة وأوجد نقطة تقاطعهما

(١٤) اكتشف الخطأ :

(أ) مجموع مربعات نسب الاتجاه لأى مستقيم يساوى ١

(ب) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$، $ع_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) هى : ($س_٢ - س_١$ ، $ص_٢ - ص_١$ ، $ع_٢ - ع_١$).

(جـ) إذا كان ($أ_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$) ، ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $جـ_٢$) هى نسب الاتجاه للمستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن قياس الزاوية بينهما تعطى بالعلاقة $جتا\theta = |أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢|$

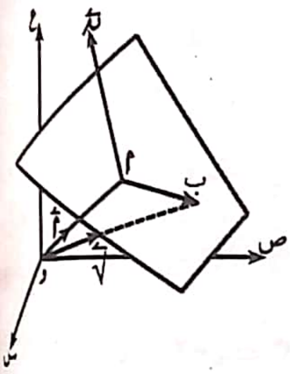
معادلة المستوى فى الفراغ

■ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى فى الفراغ :

إذا كانت النقطة م (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$) متجهة موضعها $\overline{\text{م}}$ تقع على المستوى

وكان المتجه $\overline{\text{ن}}$ = (م ، ب ، جـ) متجه اتجاه عمودىعلى المستوى

وكانت ب (س ، ص ، ع) أى نقطة على المستوى متجه موضعها $\overline{\text{ر}}$



فإن:

$\overline{\text{ن}} \cdot \overline{\text{أب}}$ = صفر $\quad \therefore \overline{\text{ن}} \cdot (\overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}}) = ٠ \text{ ، } \overline{\text{ب}} = \overline{\text{ر}}$

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى هي:

$$\boxed{\overline{\text{ن}} \cdot \overline{\text{ر}} = \overline{\text{ن}} \cdot \overline{\text{أ}}}$$

ومنها لإيجاد معادلة المستوى لابد من معرفة متجه الاتجاه العمودى على المستوى ونقطة على المستوى

■ الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى فى الفراغ:

الصورة القياسية هي: م (س − س$_{١}$) + ب (ص − ص$_{١}$) + جـ (ع − ع$_{١}$) = ٠
الصورة العامة هي: م س + ب ص + جـ ع + ى = ٠

حيث (م ، ب ، جـ) = $\overline{\text{ن}}$ = متجه اتجاه العمودى على المستوى ،

(س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$) نقطة على المستوى ،

ى = − م س$_{١}$ − ب ص$_{١}$ − جـ ع$_{١}$.

■ الزاوية بين مستويين :

إذا كان $\overline{\text{ن}}_{١}$ ، $\overline{\text{ن}}_{٢}$ هما المتجهان العموديان على المســتويين فإن قياس الزاوية بين المســتويين θ تعطى بالعلاقة.

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overline{\text{ن}}_{١} \cdot \overline{\text{ن}}_{٢}|}{\|\overline{\text{ن}}_{١}\|\,\|\overline{\text{ن}}_{٢}\|} \quad \text{حيث } ٠ \leq \theta \leq ٩٠^{\circ}$$

المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان :

إذا كان : $\overline{ن}_١$ ، $\overline{ن}_٢$ هما متجها الاتجاه العموديين على المستويين فإن:

(١) المستويان متوازيان إذا كان $\overline{ن}_١ \parallel \overline{ن}_٢$

أى إذا كان $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

حيث $\overline{ن}_١ = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\overline{ن}_٢ = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$

(٢) المستويان متعامدان إذا كان: $\overline{ن}_١ \cdot \overline{ن}_٢ = ٠$

أى أن : $أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢ = ٠$

معادلة خط تقاطع المستويين :

نوجد ع بدلالة ص وذلك بحذف س من المعادلتين ولتكن ع = ل ص + هـ

نوجد ع بدلالة س وذلك بحذف ص من المعادلتين ولتكن ع = م س + ز

ثم المعادلة هى م س + ز = ل ص + هـ = ع

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى :

إذا كان أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ نقطة خارج المستوى سـ وكانت ب نقطة على المستوى ، $\overline{ن}$ متجه الاتجاه العمودي على المستوى فإن بُعد النقطة أ عن المستوى = ل حيث

$$ل = \frac{|\overline{بأ} \cdot \overline{ن}|}{\|\overline{ن}\|} = |\text{مسقط } \overline{بأ} \text{ على } \overline{ن}|$$

الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة إلى المستوى :

هو $ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$

معادلة المستوى باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات :

هي: $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$ حيث $س_١ ، ص_١ ، ع_١$ أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور

○ **ملاحظة هامة :**

معادلة المستوى المار بالنقط $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ،$(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ ، $(س_3 ، ص_3 ، ع_3)$

هي:

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع & 1 \\ س_1 & ص_1 & ع_1 & 1 \\ س_2 & ص_2 & ع_2 & 1 \\ س_3 & ص_3 & ع_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

ومنه

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix}$$

تمارين (٥) على معادلة المستوى في الفراغ

المجموعة الأولى :

أكمل ما يأ . . :

(١) معادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، ٤) ، $\overset{\sim}{ن}$ = (١ ، - ١ ، ٣) متجه عمودى على المستوى هى.........

(٢) طول العمود النازل من النقطة (٤ ، - ٣ ، ٥) على المستوى ٣ س - ١٢ ص + ٤ ع = ٣ هو.........

(٣) قياس الزاوية بين المستويين: ٢ س + ص - ٢ ع = ٥ ، س + ٢ ص + ٢ ع = ١١ هو..........

(٤) معادلة المستوى المار بالنقطة: (٥ ، ٦ ، - ١) ويوازى المستوى س + ٤ ص - ٥ ع = ٧ هى..........

(٥) إذا كان المستويان ٢ س + ٣ ص - ٤ ع + ٥ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص + ك ع = ٧

متعامدان فإن ك = ...

(٦) إذا كان المستويان ٦ س + ٨ ص + ن ع = ١١ ،

٣ س + ك ص + ٢ ع = ٣ متوازيان فإن ن = ... ، ك = ...

(٧) إذا كان مستوى يقطع من محاور الإحداثيات الموجبة أجزاء طولها على الترتيب ٢ ، ٣ ، ٥ وحدة فإن معادلته هى............

(٨) إذا كان المســـتوى ٣ س + ٥ ص - ٤ ع = ١٢ يقطع من محاور الإحداثيات أجزاء طولها أ ، ب ، جـ على الترتيب فإن: أ = ... ، ب = ... ، جـ = ...

(٩) الصورة العامة لمعادلة المستوى: (٢ ، ٣ ، - ٢). $\bar{ر}$ = ٥ هى ....

(١٠) إذا كان: $\overset{\frown}{ن}_{١}$ = (٢ ، - ١ ، ٢) ، $\overset{\frown}{ن}_{٢}$ = (٤ ، - ١٢ ، ٣) هما متجها العمودان على المستويين ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$

فإن قياس الزاوية بين ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ هو ....

(١١) إذا كانت النقطة (٢ ، ٣ ، ك) تقع على المستوى :

٣ س + ٢ ص - ٤ ع = ٤ فإن ك = ...

(١٢) إذا كانت النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$) تقع على المستوى س + ٢ ص + ٣ ع = ١٥ فإن

س$_{١}$ + ٢ ص$_{١}$ + ٣ ع$_{١}$ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١٣) أى من النقط تقع على المستوى ٢ س + ٣ ص + ع = ٥

(أ) (١ ، ٢ ، - ٣)　　(ب) (١ ، - ٣ ، ٣)　　(جـ) (٢ ، ٥ ، ١)　　(د) (- ٣ ، ٣ ، ٥)

(١٤) المستوى ٣ س + ٥ ص - ٢ ع = ١٥ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله.....

(أ) - ٣　　(ب) ٣　　(جـ) ٥　　(د) ٤

(١٥) إذا كانت أطول الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بالمستوى: ٢ س + ٣ ص - ع = ٦ هى أ ،

ب ، جـ فإن: أ + ب + جـ = ...

(أ) ١　　(ب) ٦　　(جـ) - ١　　(د) - ٣

(١٦) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٢ ، - ١) إلى المستوى

٣ س + ٤ ص - ١٢ ع + ١٠ = ٠ هو.......... وحدة طول

(أ) ٤　　(ب) ٣٩　　(جـ) ١٣　　(د) ٣

(١٧) معادلة المستوى المار بالنقطة (- ١ ، ٢ ، - ٣) ويوازى مستوى الإحداثيات س ع هى......

(أ) ص = ٢　　(ب) س = - ١　　(جـ) س + ص + ٣ = ٠　　(د) س + ص + ع = ٠

(١٨) معادلة المستوى المار بالنقطة (٣ ، - ٥ ، ٧) ويوازى المستوى ٢ س - ص + ٣ ع = ٩ هى.......

(أ) (٢ ، - ١ ، ٣) . $\bar{ر}$ = ٣٢ ،　　(ب) (٢ ، - ١ ، ٣) . $\bar{ر}$ = ١٥ ،

(جـ) (١ ، ٢ ، ٣) . $\bar{ر}$ = ١١　　(د) (٢ ، - ١ ، ٣) . $\bar{ر}$ = ٢٥

(١٩) معادلة المستوى المار بالنقطة (٥ ، - ٢ ، ٣) وعمودى على المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، ٢ ، ٣) ، (٣ ، ٠ ، ١) هى........

(أ) (- ٣ ، ٢ ، ٢) . $\overrightarrow{ر}$ = ٢٥ (ب) - ٣ س + ٢ ص + ٢ ع + ١٣ = ٠

(جـ) ٣ س - ٢ ص - ٢ ع + ١٣ = ٠ (د) (٣ ، - ٢ ، - ٢) . $\overrightarrow{ر}$ = ١٠

(٢٠) قياس الزاوية بين المستويين : ٢ س + ٥ ص + ٣ ع = ١٠ ،

(١ ، ٢ ، -٢) . $\overrightarrow{ر}$ = ٢٢ هو ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٥٦′ ١٠٨° (د) ٤′ ٧١°

المجموعة الثانية :

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة أ (١ ، ٥ ، ٣) ويحتوى المتجهين

$\overrightarrow{ب جـ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ + ٥ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{جـ د}$ = (٣ ، −٢ ، ٤) .

(٢) أوجد معادلة المستوى المار بالنقط أ ، ب ، جـ فى الحالات الآتية :

(أ) أ (٢ ، ٣ ، ١) ، ب (٣ ، ٢ ، - ٢)، جـ (١ ، ٥ ، ٣)

(ب) أ (١ ، ٥ ، ٣)، ب (٢ ، - ١ ، ٤) ، جـ (- ١ ، ٢ ، ١).

(٣) اثبت أن المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ متقاطعان وأوجد معادلة المستوى الذى يحويهما فى الحالات الآتية:

(أ) $ل_1$: $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١ ، - ١) + $ك_1$ (١ ، ٢ ، ٣) ،

$ل_2$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$) + $ك_2$ ($\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$)

(ب) $ل_1$: ٢ س = ٣ ص = ٤ ع ، $ل_2$: ٣ س = ٢ ص = ٥ ع

(جـ) $ل_1$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣ ، ١) + $ك_1$ (٢ ، ٣ ، - ١)

$ل_2$: $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٧ ، - ٥) + $ك_2$ (٣ ، ٢ ، ٤)

(٤) أوجد الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى :

(أ) المار بالنقطة (٣ ، - ٥ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (٢ ، ١ ، ١) عمودى على المستوى.

(ب) المار بالنقطة (-٣ ، ٤ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (١ ، - ١ ، ٣) عمودى على المستوى.

(٥) أوجد قياس الزاوية بين كل من المستويين : $ل_١$ ، $ل_٢$ فى الحالات الآتية :

(أ) $ل_١$: (٢ ، ١ ، ٤) . $\overrightarrow{ر}$ = ٥ ، $ل_٢$: ٣ س − ص + ٢ ع = ١١

(ب) $ل_١$: س − ٣ ص + ٢ ع = ٠ ، $ل_٢$: (٢ ، ١ ، − ١) . $\overrightarrow{ر}$ = ٣

(جـ) $ل_١$: ٣ س + ٢ ص − ٥ ع = ٤ ، $ل_٢$: ٣ س + ٣ ص + ٣ ع = ١٥

(٦) إذا كان المستوى: س − ٣ ص + ع = ٤ عمودى على المستوى م س + ٢ ص + ٣ ع = ٢ فما قيمة م.

(٧) إذا كان المستوى: ٢ س − ص + ك ع = ٥ يوازى المستوى س + م ص + ٤ ع = ١ أوجد قيمة ك ، م

(٨) اثبت أن المستويين فى الحالات الآتية متوازيين وأوجد البُعد بينهما:

(أ) ٢ س + ٦ ص − ٨ ع = ٤ ، س + ٣ ص − ٤ ع = ١٥

(ب) ٣ س + ٦ ص + ٦ ع = ٩ ، (١ ، ٢ ، ٢) . $\overrightarrow{ر}$ = ١٢

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة م إلى المستوى ل إذا كان :

(أ) م (١ ، − ١ ، ٧) ، ل : $\overrightarrow{ر}$. (٢ ، ٢ ، − ١) = ٥

(ب) م (− ٢ ، ١ ، − ٤) ، ل : $\overrightarrow{ر}$. (١ ، − ٣ ، ٢) = ١٥

(جـ) م (٣ ، − ٥ ، ٢) ، ل: ٤ س − ٣ ص + ١٢ ع = ١٢

(١٠) أوجد معادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات الأجزاء م ، ب ، جـ على الترتيب حيث:

(أ) م = ٣ ، ب = ٤ ، جـ = ٥ (ب) م = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = ٤ ،

(جـ) م = ٢ ، ب = − ٣ ، جـ = ٣ (د) م ب = ٢ ، م جـ = ٣ ، ب جـ = ٦.

حيث م ، ب ، جـ قيم موجبة.

(١١) إذا قطع المستوى ل محاور الإحداثيات فى النقط م ، ب ، جـ على الترتيب

أوجد مساحة سطح Δ م ب جـ إذا كان:

(أ) ل : ٢ س + ٣ ص + ٤ ع = ١٢

(ب) ل : (٣ ، − ٢ ، − ٣) . $\overrightarrow{ر}$ = ١٢

(جـ) ل : ٥ س + ٢ ص + ٢ ع = ٢٠

(١٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى إذا كان:

(أ) يمر بالنقطة (٥ ، ٢ ، ٣) ويوازى المستوى ٣ س − ص + ٤ ع = ٦

(ب) يمر بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) وعمودى على المستقيم الواصل بين النقطتين (٢ ، ٥ ، − ١)، (٧، ٣، ٤).

(١٣) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى إذا كان: يمر بالنقطة أ (٢ ، − ٣ ، ٤) وعمودى على كل من المستويين

(أ) ل$_1$: ٢ س + ٣ ص − ع = ٥ ، ل$_2$: ٣ س − ص + ٢ ع = ٧

(ب) ل$_1$: (٢ ، − ٢ ، − ١) . $\bar{ر}$ = ٦ ، ل$_2$: (٥ ، ١ ، − ٢) . $\bar{ر}$ = ١١

(١٤) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى إذا كان:

(أ) يحتوى المستقيم . $\bar{ر}$ = (١ ، ٢ ، − ١) + ك (١ ، ٢ ، ٣)

ويوازى المستقيم $\bar{ر}$ = (٢ ، − ٢ ، ٥) + ك (٣ ، ٢ ، − ٢).

(ب) يحتوى المستقيم . $\bar{ر}$ = (٢ ، ٥ ، ٤) + ك (− ٢ ، ٢ ، ١)

ويوازى المستقيم $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ٣}{-٣} = \frac{\text{ع} - ٥}{٤}$

(١٥) اثبت أن النقطة (٢ ، ١ ، − ١) والمستقيم . $\bar{ر}$ = (١ ، ٣ ، − ٢) + ك (١ ، − ٢ ، ١) يقعان فى المستوى: (٢ ، ٣ ، ٤) . $\bar{ر}$ = ٣ .

(١٦) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين :

(أ) س + ٢ ص − ٢ ع = ١ ، ٢ س + ص − ٣ ع = ٥ ،

(ب) ٣ س − ص + ٢ ع = ٣ ، س − ٢ ص + ٥ ع = ٢

(جـ) (٢ ، ١ ، − ٢) . $\bar{ر}$ = ٩ ، (٣ ، ٤ ، ٥) . $\bar{ر}$ = ٢ .

(١٧) أوجد نقطة تقاطع المستقيم ل$_1$ والمستوى ل$_2$ فى الحالات الآتية :

(أ) ل$_1$. $\bar{ر}$ = (٢ ، ٣ ، − ١) + ك (١ ، ٢ ، ٥) ، ل$_2$: س + ص + ٢ ع = ٣

(ب) ل$_1$: ٢ س = ٣ ص − ١ = ع − ٤ ، ل$_2$: ٣ س + ص − ٢ ع = ٥

(جـ) ل$_1$: $\bar{ر}$ = (١ ، ٤ ، ٣) + ك (٣ ، ٢ ، ٢) ، ل$_2$: (٣ ، ٢ ، ٢) . $\bar{ر}$ = ٣٤

(١٨) أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (٣ ، - ١ ، ٦)

ويحتوى المستقيم $\vec{ر}$ = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك (١ ، ٢ ، - ٢)

(١٩) إذا كان المستقيم $\vec{ر}$ = (٣ ، - ٦ ، - ٣) + ك (٢ ، ٣ ، - ١) عمودى على المستوى:

٤ س + ل ص + م ع = ١٠ أوجد ل ، م وأوجد نقطة تقاطع المستقيم والمستوى

المجموعة الثالثة :

تمارين (٢-٢) من الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من النقط تقع فى المستوى ٢ س + ٣ ص − ع = ٥

(أ) (١ ، ١ ، ١) ، (ب) (١ ، ٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٢ ، ١) (د) (٣ ، ٢ ، - ١)

(٢) المستوى: ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ١٢ يقطع من محور س جزءاً طوله... وحدات

(أ) ٣ (ب) − ٤ (جـ) ٤ (د) ٦

(٣) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محوري الإحداثيات بواسطة المستوى س + ٥ ص − ٦ ع = ٣٠ هى أ ، ب ، جـ فإن أ + ب + جـ = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠ (جـ) ٣١ (د) ٤١

(٤) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) ويوازى محور الإحداثيات س ، ص هى:

(أ) س + ص = ٣ (ب) ع = ٣ (جـ) س = ١ (د) ص = ٢

(٥) معادلة المستوى المار بالنقط (٢ ، ٣ ، ٥) ، (- ١ ، ٣ ، ١)، (٤ ، ٣ ، - ٢) هى:

(أ) س + ص + ع = ٠ (ب) س = - ١ (جـ) ص = ٣ (د) ع = - ٢

(٦) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، - ٢ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودى عليه هى:

(أ) ٢ س + ص + ٣ ع = ١ (ب) ٢ س + ص + ٣ ع = ١٥

(جـ) س − ٢ ص + ٥ ع = ١٥ (د) س + ص + ع = ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٧) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ١ - ، ٤) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (٢ ، -٣ ، ٤) عمودى عليه ثم بين:

(أ) هل النقطة (٢ ، ٢ ، ١) تقع فى المستوى.

(ب) هل المتجه $\overrightarrow{ى}$ = (٣ ، -٥ ، -٢) يوازى المستوى

(٨) أوجد ثلاث نقط فى الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية:

(أ) س = ٣ (ب) ص = -٢ (جـ) س + ٣ ص = ٥ (د) ٢ س − ص + ٣ ع = ٤

(٩) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل والمتجه $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$ عمودى عليه.

(١٠) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٠) والمتجه $\overrightarrow{ن} = ٤\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص} - ٧\overrightarrow{ع}$ عمودى عليه.

(١١) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط:

أ (٢ ، -١ ، ٠) ، ب (-١ ، ٣ ، ٤) ، جـ(٣ ، ٠ ، ٢).

(١٢) اثبت أن المستقيم $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ع} + ك\left(٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}\right)$ عمودى على المستوى $س + \frac{٣}{٢}ص + ٢ع = ٥$.

(١٣) اثبت أن النقطة أ = ٢ ، ٣ ، -١ والمستقيم $\overrightarrow{ر} = \left(٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}\right) + ك\left(\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع}\right)$ يقعان فى المستوى الذى معادلته: $\overrightarrow{ر} \cdot \left(٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ع}\right) = ٥$.

(١٤) أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) ويحقق كل من الشروط الآتية:

(أ) يوازى المستوى $٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ٥ع = ١$

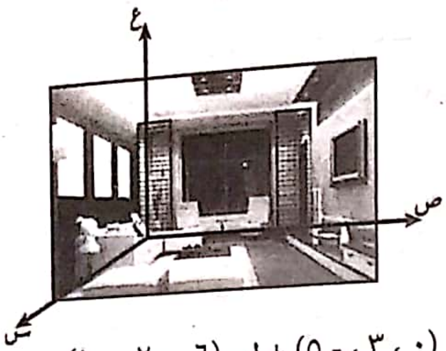
(ب) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)

(جـ) عمودى على كل من المستويين ٧ س + ص + ٢ ع = ٦ ، ٣ س + ٥ ص - ٦ ع = ٨

(١٥) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ع} + ك\left(٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}\right)$ مع المستوى $\overrightarrow{ر} \cdot \overrightarrow{س} = ٤$

(١٦) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، ٤ ، ٥ على الترتيب.

(١٧) الربط بالبيئة : فى الشكل المقابل: أوجد معادلة كل من :



(أ) مستوى أرضية الحجرة.

(ب) مستوى سقف الحجرة.

(جـ) مستويات الحوائط الجانبية.

(١٨) أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم $ل_١$: $\overline{ر}$ = (٠ ، ٣ ، - ٥) + $ك_١$ (٦ ، - ٢ ، - ١)

ويوازى المستقيم $ل_٢$: $\overline{ر}$ = (١ ، ٧ ، - ٤) + $ك_٢$ (١ ، - ٣ ، ٣).

(١٩) أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية:

(أ) $ل_١$: ٢ س - ص + ع = ٥ ، $ل_٢$: ٣ س + ٢ ص - ٢ ع = ١

(ب) $ل_١$: $\overline{ر}$. (٢ ، ١ ، - ١) = ٤ ، $ل_٢$: $\overline{ر}$. (٣ ، - ٢ ، ٠) = ٧

(جـ) $ل_١$: ص = ٤ ، $ل_٢$: س - ٣ ص + ٥ ع = ١

أسئلة متعددة المطالب :

(٢٠) إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، ء فى الفراغ متجهات موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هى

$-\overline{ص} + \overline{ع}$ ، $٢\overline{س} - \overline{ص} + ٣\overline{ع}$ ، $-\overline{س} - ٢\overline{ص} + ٢\overline{ع}$ ، $٧\overline{س} - ٤\overline{ص} + ٢\overline{ع}$ على الترتيب

(أ) أوجد متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب جـ

(ب) بين طول العمود المرسوم من ء على مستوى أ ب جـ يساوى $٢\sqrt{٦}$

(جـ) بين أن المستويين أ ب جـ ، ء ب جـ متعامدان

(هـ) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، و ء ب

(٢١) إذا كان المستوى س يحوى النقط أ (١ ، ٤ ، ٢) ب (١ ، ٠ ، ٥)، جـ (٠ ، ٨ ، - ١) وكان المستوى ص يحوى النقطة ء (٢ ، ٢ ، ٣) والمتجه $\overline{ن} = \overline{س} + ٢\overline{ص} + ٢\overline{ع}$ عمودى عليه أوجد:

(أ) المعادلة الإحداثية للمستوى س

(ب) المعادلة الإحداثية للمستوى ص

(جـ) إذا كانت النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين س ، ص فما قيمة كل من ط ، ف

(د) أوجد الصورة المتجهة لخط تقاطع المستويين س ، ص

(هـ) إذا كانت النقطة (١ ، ١ ، م) على أبعاد متساوية من المستويين س ، ص أوجد قيم م الممكنة.

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات :

(١) معادلة المستقيم المار بالنقطة ﺃ (-١ ، ٠ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{هـ}$ = (١ ، -١ ، ٣) متجه اتجاه له هى :

(ﺃ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع - ١}{-١}$　　(ب) $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع - ٢}{٣}$

(جـ) $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع}{١}$　　(د) $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص - ١}{-١} = \frac{ع}{٢}$

(٢) معادلة المستقيم المار بالنقطتين ﺃ (١ ، -١ ، ٢) ، ب (-١ ، ٠ ، ١) هى

(ﺃ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ١}{-١} = \frac{ع - ٢}{١}$　　(ب) $\frac{س + ١}{-٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع - ١}{-١}$

(جـ) $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$　　(د) $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص + ١}{٢} = \frac{ع - ٢}{١}$

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ ، ص = ١ ، $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص - ٢}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ تساوى :

(ﺃ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٤) إذا كان المستقيمان $ل_١$: $\frac{س}{٢} = \frac{ص - ١}{-١} = \frac{ع - ٢}{م}$ ، $ل_٢$: $\frac{س - ١}{م} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{-١}$

متعامدان. فما قيمة م

(ﺃ) -١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -٣

(٥) إذا كان المستقيمان $ل_١$: س = ٢ك - ١ ، ص = ك + ١ ، ع = ك - ١ ، $ل_٢$: س = ﺃ ك - ١ ، ص = ٢ك + ١ ، ع = ب ك - ٢ متوازيان فإن ﺃ + ب =

(ﺃ) ٤ (ب) - ٢ (جـ) ٦ (د) -٢

(٦) النقطة (٢ ، -١ ، ٣) تقع على المستوى

(ﺃ) س + ص - ع = ٦　　(ب) ٢ س - ٣ ص + ع = - ١٠

(جـ) ٣ س - ٢ ص + ٤ ع = ٢٠　　(د) س - ٢ ص + ٥ ع = ٤

(٧) إذا قطع المستوى $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٢} + \frac{ع}{٢} = ١$ محاور الإحداثيات فى النقط ﺃ ، ب ، جـ فإن مساحة $\triangle$ ﺃ ب جـ =

(ﺃ) ١٢ (ب) ١٠ (جـ) ٦ (د) ٤

(٨) طول العمود من النقطة (٢ ، ٣ ، ١) إلى المستوى ٢ س − ٢ ص + ع = ٥ هو

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٩) معادلة خط تقاطع المستويين $ل_١$: ٢ س − ص + ع − ١ = ٠ ، $ل_٢$: س − ٣ ص − ع + ٢ = ٠ هى

(أ) $\frac{س+١}{-١} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ (ب) $\frac{س-١}{١} = -\frac{ص}{٣} = \frac{ع-٥}{١}$

(جـ) $\frac{س-٢}{١} = \frac{ص-٣}{-٢} = \frac{ع}{-١}$ (د) $\frac{س-١}{٤} = \frac{ص-١}{٣} = \frac{ع}{٥}$

(١٠) المستقيمان $ل_١$: $\frac{س+١}{-١} = \frac{ص-٢}{-١} = \frac{ع-١}{٣}$ ، $ل_٢$: $\frac{س+١}{١} = \frac{ص-٢}{-٢} = \frac{ع-١}{-١}$ يقعان فى المستوى

(أ) ٣ س − ٥ ص + ع − ١ = ٠ (ب) ٥ س − ٤ ص + ٢ ع − ٧ = ٠

(جـ) ٧ س − ٥ ص − ع − ٤ = ٠ (د) ٧ س + ٢ ص + ٣ ع = ٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) أوجد بُعد النقطة (- ٢ ، ٤ ، - ٥) عن المستقيم $\frac{س+٣}{٣} = \frac{ص-٤}{٥} = \frac{ع+٨}{٦}$

(١٢) أوجد بُعد النقطة (٢ ، ١ ، -١) عن المستوى $\vec{ر} . (\vec{س} - ٢\vec{ص} + ٤\vec{ع}) = ٩$

(١٣) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، - ٤ ، - ٥) (٢ ، - ٣ ، ١) مع المستوى المار بالنقط (٢ ، ٢ ، ١) ، (٣ ، ٠ ، ١) ، (٤ ، - ١ ، ٠)

(١٤) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\vec{ر}$ = (٢ ، - ١ ، ٢) + ل (٣ ، ٤ ، ٢) مع المستوى $\vec{ر}$. (١ ، - ١ ، ١) = ٥

(١٥) أوجد مسقط النقطة م (٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب (١ ، ٢ ، ٣) جـ (٧ ، - ٢ ، ٥)

(١٦) اثبت أن المستويين ٢ س + ص + ٢ ع = ٨ ، ٤ س + ٤ ع + ٥ = ٠ متوازيين وأوجد البُعد بينهما

تفكير إبداعى :

(١٧) إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط م ، ب ، جـ وكانت النقطة (م ، ن، ١) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث م ب جـ

اثبت أن معادلة المستوى هي $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{و} = ٣$

أكمل ما يأتى :

(١) قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم $\frac{س - ١}{\sqrt{٢}} = \frac{ص - \sqrt{٢}}{١} = \frac{ع + ١}{١}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ع تساوى..................

(٢) طول العمود المرســوم من النقطة (- ١ ، ٠ ، ١) على المســتقيم $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{ع + ١}{-١}$ يساوى ....

(٣) المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين ٩ (- ١ ، ٠ ، ٣) ، ب (١ ، - ١ ، ٠) هى.............

(٤) قيـاس الزاويـة بين المســتقيمين ل١ : - س - ص + $\sqrt{٢}$ ع + ١ = ٠ ، ل٢ : س - ص + $\sqrt{٢}$ ع - ٣ = ٠ تساوى.................

(٥) معادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، - ١) والمتجه $\overline{ن}$ = (٥ ، ٢ ، - ٣) عمودى عليه هى.........

(٦) المستوى ٣ س - ٤ ص + ع + ١٠ = صفر يقطع من محور ص جزء طوله.........

(٧) نقطة تقاطع المستقيم $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{٣}$ والمستوى س - ٢ ص + ٣ ع + ٥ = ٠ هى.....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات :

(٨) البُعد بين النقطة (٩ ، ب ، جـ) ومحور س يساوى

(٩) $\sqrt{٩^٢ + جـ^٢}$ (ب) $\sqrt{٩^٢ + ب^٢}$ (جـ) $\sqrt{ب^٢ + جـ^٢}$ (د) $\sqrt{ب^٢ + جـ^٢}$

(٩) معادلة محور س فى الفراغ هى :

(٩) س = ٠ ، ص = ٠ (ب) س = ٠ ، ع = ٠ (جـ) ص = ٠ ، ع = ٠ (د) س = ٠

(١٠) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، - ١ ، ٣) ، (٠ ، ٣ ، ١)

(٩) $\overline{ر}$ = (٢ ، - ١ ، ٣) ك (٢ ، - ٤ ، ٢) (ب) $\overline{ر}$ = (٢ ، - ١ ، ٣) ك (٢ ، ٢ ، ٤)

(جـ) $\overline{ر}$ = (٢ ، - ٤ ، ٢) ك (٢ ، - ١ ، ٣) (د) $\overline{ر}$. (٢ ، - ٤ ، ٢) = صفر

(١١) النقطة التى تقع على المستقيم $\vec{ر}$ = (٢ ، - ١ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، - ١)

(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (٠ ، ٢ ، - ٢) (جـ) (٣ ، ١ ، ٢) (د) (٤ ، - ٣ ، ٠)

(١٢) المسافة بين المستويين ص = ٤ ، ص = - ٢ هى

(أ) ٣ وحدات (ب) وحدتين (جـ) ٦ وحدات (د) ٨ وحدات

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٣) اكتب المعادلة المتماثلة لكل من المستقيمات الآتية :

(أ) $\vec{ر}$ = (١ ، ٣ ، ٩) + ك (٥ ، ٤ ، ٢)

(ب) المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٢ ، ٠) والمتجه $\vec{هـ}$ = (٣ ، - ١ ، ٤) متجه اتجاه له

(١٤) أوجد قياس الزاوية بين

(أ) المستقيمين ل$_١$: ٢ س = ٣ ص - ١ = ع - ٣ ، ل$_٢$: $\vec{ر}$ = (٢ ، - ١ ، ٥) + ك (- ١ ، ١ ، ٢)

(ب) المستويين ل$_١$: ٣ س - ص = ٥ ، ل$_٢$ = س - ٢ ص = ٤

(١٥) أوجد المعادلة الإحداثية للمســتوى الذى معادلته (س ، ص ، ع) = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك١ (- ١ ، ٣ ، ٤)

+ك٢ (٦ ، ١ ، - ٢) حيث ك١ ، ك٢ بارامترات

(١٦) أوجد قياس الزاوية بين المستويين ٢ س + ٢ ص + ٧ ع = ٨ و ٣ س - ٤ ص + ٤ ع = ٥

اختبارات كتاب لامي للمراجعة على الوحدة الثانية

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] (أ) أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان المستقيم : $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص - ٢}{٤} = \frac{ع + ١}{-٢}$ عمودى على المستوى س + ك ص + م ع = هـ وكانت النقطة (٢ ، ٣ ، - ١) تقع على المستوى فإن ك = ... ، م = ... ، هـ = ...

(٢) المستقيم الذى يوازى المستقيم $\vec{ر}$ = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك (١ ، ٢ ، - ٣) ويمر بالنقطة (٤ ، - ٣ ، ٣) معادلته هى ....

(ب) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان المستويان ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ١١ ، (٢ ، - ٣ ، ك) . $\overrightarrow{ر}$ = ٨ متعامدان

فإن ك = ...

(أ) ٢   (ب) - ٢   (جـ) ١   (د) - ١

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمان: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ١ ، ٤) + ك (- ٣ ، ٤ ، ١٢)

، $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{١} = \frac{ع - ٥}{-٢}$ هو ....

(أ) ٤٨′ ١١°   (ب) ١١′ ٤٨°   (جـ) ٤٩′ ١٣١°   (د) ٩٠°

[٢] (أ) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم: س + ٢ + ٣ ك ، ص = - ١ + ٢ ك، ع = ٣ + ك والمستقيم الذى يمر بالنقطتين (٥ ، ٧ ، ١) ، (- ١ ، ١ ، ٨)

(ب) أوجد قياس الزاوية بين المستويين: $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{-١} = ١$

، (٢ ، ١ ، ٤) . $\overrightarrow{ر}$ = ٨

[٣] (أ) اثبت أن النقطة أ (١ ، ٢ ، ٣) تقع على الكرة:

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢$ - ٢ س + ٤ ص - ٦ ع = ٢ ثم أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يمس الكرة عند نقطة أ.

(ب) اثبت أن المستقيمان: ل١ : $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٤ ، - ٢) + $ك_١$ (٢ ، ٣ ، ١)

، ل٢ : $\overrightarrow{ر}$ = (١١ ، ٥ ، ٢) + $ك_٢$ (- ٣ ، ١ ، ٣) متعامدان ومتخالفان

[٤] (أ) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (٤ ، ٣ ، - ٢) إلى المستوى: (٣ ، ٢ ، - ٢) . $\overrightarrow{ر}$ = ٥.

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (٢ ، - ٣ ، ٢)

إلى المستقيم: $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، ١ ، - ١) + ك(٢ ، ٣ ، - ٢)

[٥] (أ) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (٥ ، ٢ ، ١) وعمودى على المستقيم الواصل بين النقطتين (٣ ، ٤ ، - ١) ، (- ١ ، ٥ ، ٢)

(ب) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم العمودى على المستوى ٢ س - ص + ع = ٥ ويمر بالنقطة (٣ ، ١ ، ٧)

الاختبار الثانى

[١] (أ) أكمل ما يلى :

(١) طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ٣ ، - ١) إلى المستوى ٣ س + ٤ ص - ١٢ ع + ٩ = ٠ يساوى............

(٢) جيوب تمام اتجاه المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، ٣ ، - ١) ، (٣ ، ١ ، - ٢) هو ....

(ب) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان المستقيمان: $\vec{ر}$ = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك (- ٢ ، ٣ ، ١) ،

$\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{ك} = \frac{ع + ٢}{-٢}$ متعامدان فإن ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) - ٢ (د) - ٥

(٢) النقطة التى تقع على المستوى ٣ س + ٤ ص - ٢ ع = ١١ هى:

(أ) (١ ، ٢ ، ٣) (ب) (١ ، - ٢ ، ٣) (جـ) (- ١ ، ٢ ، - ٣) (د) (١ ، - ٢ ، - ٣)

[٢] (أ) اثبت أن المستويان: ٢ س + ٣ ص - ع = ١١ ،

(- ٤ ، ٣ ، ١) . $\vec{ر}$ = ٥ متعامدان وأوجد معادلة خط تقاطعهما.

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٤ ، ٥) وعمودى على المستوى ٣ س - ٢ ص + ع=٣ وأوجد نقطة تقاطع المستقيم والمستوى.

[٣] (أ) اثبت أن المستويان:

٣ س - ٤ ص + ١٢ ع = ٢٤ ، (- ٦ ، ٨ ، - ٢٤) . $\vec{ر}$ = ١٧ متوازيين وأوجد البُعد بينهما.

(ب) اثبت أن النقطة أ (٣ ، ١ ، - ٢) تقع على الكرة.

س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤ س - ٨ ص - ٢ ع = ١٨ وأوجد معادلة قطر الكرة المار بالنقطة أ.

[٤] (أ) اثبت أن المستقيم $\vec{ر}$ = (٢ ، ٣ ، ٤) + ك (- ٢ ، ١ ، ٣) يوازى المستوى ٤ س + ٥ ص + ع = ٦ وأوجد البُعد بينهما.

(ب) اثبت أن المستقيمان ل$_١$: $\vec{ر}$ = (٢ ، ٧ ، ٣) + ك$_١$ (١ ، - ٢ ، ٣) ، ل$_٢$: $\vec{ر}$ = (- ١ ، - ٣ ، ٢) + ك$_٢$ (٢ ، ٤ ، ٢) يتقاطعان وأوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما.

[٥] (م) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين:

ل$_{١}$: $\vec{ر}$ = (٣ ، ٤ ، - ٢) + ك$_{١}$ (٢ ، ٣ ، - ٤) ،

ل$_{٢}$: $\vec{ر}$ = (١ ، ٣ ، ٢) + ك$_{٢}$ (٣ ، ٢ ، - ١).

(ب) اثبت أن النقطة (٢ ، ٣ ، ٥) والمستقيم:

$\vec{ر}$ = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك (٣ ، - ٢ ، ١) يقعان فى المستوى ٣ س + ٤ ص - ع = ١٣.

أولا: الجبـــر

إجابـات الوحدة الأولى

التباديل والتوافيق ونظرية ذي الحدين

طرق العد

تمارين (١) مبدأ العد - التباديل والتوافيق

المجموعة الأولى :

[١] أكمل ما يأ . :

(١) عدد الاختيارات $= 3 \times 4 = 12$

(٢) عدد الإعداد

= عدد طرق اختيار رقم المئات × عدد طرق اختيار رقم الآحاد
× عدد طرق اختيار رقم العشرات $= 3 \times 4 \times 3 = 36$ عدداً

(٣) العدد المراد تكوينه أما من رقم واحد أو من رقمين مختلفين أو من ثلاثة أرقام مختلفة وأقل من ٤٠

$= 5 + 5 \times 4 + 3 \times 4 \times 3$

$= 5 + 20 + 36 = 61$ عدداً

(٤) ${}^{7}\text{ل}_{0} + {}^{7}\text{ل}_{2} + {}^{7}\text{ل}_{3} = 1 + 7 \times 6 + 7 \times 6 \times 5 = 253$

(٥) $\underline{|\text{ن}-2} = 24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = \underline{|4}$

$\therefore \text{ن} - 2 = 4 \qquad \therefore \text{ن} = 6$

(٦) ${}^{8}\text{ل}_{\text{ر}} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 = {}^{8}\text{ل}_{4}$

$\therefore \text{ر} = 4 \quad \therefore \underline{|\text{ر}-4} = \underline{|\text{صفر}} = 1$

(٧) $\dfrac{\underline{|15}}{\underline{|12}} = \dfrac{15 \times 14 \times 13 \underline{|12}}{\underline{|12}} = 2730$

(٨) $\dfrac{\underline{|\text{ن}+1}}{\underline{|\text{ن}-2}} = \dfrac{(\text{ن}+1) \times \text{ن} \times (\text{ن}-1)\underline{|\text{ن}-2}}{\underline{|\text{ن}-2}}$

$= \text{ن}(\text{ن}^2 - 1) = \text{ن}^3 - \text{ن}$

(٩) ${}^{15}\text{ق}_{8} = \text{ك} \times {}^{15}\text{ق}_{7} \quad \therefore {}^{15}\text{ق}_{7} = \text{ك} \times {}^{15}\text{ق}_{7} \quad \therefore \text{ك} = 1$

(١٠) $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{3}}{3 \times 2 \times 1} = 35 \quad \therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{3} = 7 \times 6 \times 5 = {}^{7}\text{ل}_{3}$

$\therefore \text{ن} = 7$

(١١) ${}^{15}\text{ق}_{12} = {}^{15}\text{ق}_{3} = \dfrac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 455$

(١٢) $\because {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} > 1 \quad \therefore \text{ر} < 10$ (١)

$\because {}^{\text{ر}}\text{ق}_{8} > 1 \quad \therefore \text{ر} > 8$ (٢) من (١) ، (٢)

$\therefore 8 < \text{ر} < 10$ ، $\because \text{ر} \in \text{ط} \quad \therefore \text{ر} = 9$

(١٣) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{3} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-2} \quad \therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{3} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2} \quad \therefore \text{ن} = 3 + 2 = 5$

(١٤) $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{25} > {}^{\text{ن}}\text{ق}_{24}$ بالقسمة على ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{24}$

$\therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{25}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{24}} > 1 \qquad \therefore \dfrac{\text{ن} - 25 + 1}{25} > 1$

$\text{ن} - 24 > 25 \qquad \therefore \text{ن} > 49$

(١٥) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{7} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{8} = {}^{\text{ن}+1}\text{ق}_{8}$.

[٢] أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ${}^{\text{ن}+1}\text{ل}_{3} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$

$\therefore {}^{\text{ن}+1}\text{ل}_{3} = 4 \times 3 \times 2 = {}^{4}\text{ل}_{3}$

$\therefore \text{ن} + 1 = 4 \quad \therefore \text{ن} = 3$ الجواب (جـ)

(٢) ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{3} = 210\text{ن} \quad \therefore \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2) = 210\text{ن}$

$(\text{ن}-1)(\text{ن}-2) = 210 = 15 \times 14$ ، ${}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{2} = {}^{15}\text{ل}_{2}$

$\therefore \text{ن} - 1 = 15 \quad \therefore \text{ن} = 16$ الجواب (ب)

(٣) ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{4} = 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = {}^{5}\text{ل}_{4} \quad \therefore \text{ن} = 5$

الجواب (جـ)

(٤) ${}^{10}\text{ل}_{\text{ر}} = 5040 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = {}^{10}\text{ل}_{4} \quad \therefore \text{ر} = 4$

الجواب (د)

(٥) $\underline{|\text{ن}+1} = 720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = \underline{|6}$

$\therefore \text{ن} + 1 = 6 \quad \therefore \text{ن} = 5$

$\therefore \underline{|\text{ن}-3} = \underline{|5-3} = \underline{|2} = 2 \times 1$ ∴ الجواب (ب)

(٦) $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{5} = 6 \quad \therefore {}^{6}\text{ق}_{5} = {}^{6}\text{ق}_{1} = 6 \quad \therefore \text{ن} = 6$

الجواب (جـ)

الجواب (ب)

(٧) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{5} = 1 \quad \therefore \text{ن} = 5$

الجواب (د)

(٨) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{5} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2} \quad \therefore \text{ن} = 5 + 2 = 7$

(٩) $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-2} = 6 \quad \therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2} = 6 \quad \therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{2}}{2 \times 1} = 6$

الجواب (د)

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{2} = 12 = 4 \times 3 = {}^{4}\text{ل}_{2} \quad \therefore \text{ن} = 4$

(١٠) $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{3} = 7\text{ن} \quad \therefore \dfrac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3 \times 2 \times 1} = 7\text{ن}$

$\therefore (\text{ن}-1)(\text{ن}-2) = 42 = 7 \times 6$

${}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{2} = {}^{7}\text{ل}_{2} \quad \therefore \text{ن} - 1 = 7 \quad \therefore \text{ن} = 8$ الجواب (د)

(١١) عناصر ع من عنصرين ∈ س، الترتيب غير هام والعناصر مختلفة

∴ عدد عناصر ع = ${}^{٧}\text{ق}_{٢} = \frac{٧\times٦}{٢\times١} = ٢١$ الجواب (جـ)

المجموعة الثانية :

(١) ${}^{٢\text{م}-\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٧\times٦\times٥ = {}^{٧}\text{ل}_{٣}$ ∴ $٢\text{م} - \text{ن} = ٧$ (١)

${}^{٢\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ١٠\times٩ = {}^{١٠}\text{ل}_{٢}$ ∴ $٢\text{ن} = ١٠$

$\text{ن} = ٥$ من (١) $٢\text{م} - ٥ = ٧$ ، $٢\text{م} = ١٢$ ∴ $\text{م} = ٦$

${}^{٢\text{م}}\text{ل}_{\text{ن}} = {}^{١٢}\text{ل}_{٥} = ١٢\times١١\times١٠\times٩\times٨ = ٩٥٠٤٠$

---

(٢) $\frac{\underline{|\text{ن}+١}}{\underline{|\text{ن}-١}} = ٧٢$ ∴ ${}^{\text{ن}+١}\text{ل}_{٢} = ٩\times٨ = {}^{٩}\text{ل}_{٢}$

∴ $\text{ن}+١ = ٩$ ∴ $\text{ن} = ٨$

∴ ${}^{٨}\text{ل}_{٠} + {}^{٨}\text{ل}_{١} + {}^{٨}\text{ل}_{٢} = ١ + ٨ + ٨\times٧ = ٦٥$

---

(٣) $\frac{\underline{|٩}}{\underline{|١٠-\text{ر}}} \times \frac{\underline{|٨-\text{ر}}}{\underline{|٩}} = \frac{١}{٤٢}$ ، $\frac{\underline{|١٠-\text{ر}}}{\underline{|٨-\text{ر}}} = ٤٢$

${}^{١٠-\text{ر}}\text{ل}_{٢} = ٧\times٦ = {}^{٧}\text{ل}_{٢}$ ∴ $١٠ - \text{ر} = ٧$ ∴ $\text{ر} = ٣$

---

(٤) $\frac{\underline{|٢\text{ن}+١}}{\underline{|\text{ن}+٢}} \times \frac{\underline{|\text{ن}-١}}{\underline{|٢\text{ن}-١}} = \frac{٧}{١٠}$

$$\frac{(٢\text{ن}+١)\times٢\text{ن}\times\underline{|٢\text{ن}-١}\;\underline{|\text{ن}-١}}{(\text{ن}+٢)\times(\text{ن}+١)\times\text{ن}\,\underline{|\text{ن}-١}\;\underline{|٢\text{ن}-١}} = \frac{٧}{١٠}$$

∴ $\frac{٤\text{ن}+٢}{\text{ن}^{٢}+٣\text{ن}+٢} = \frac{٧}{١٠}$

$٧\text{ن}^{٢} + ٢١\text{ن} + ١٤ = ٤٠\text{ن} + ٢٠$

$٧\text{ن}^{٢} - ١٩\text{ن} - ٦ = ٠$ ، $(\text{ن} - ٣)(٧\text{ن} + ٢) = ٠$

∴ $\text{ن} = ٣$ أ، $\text{ن} = \frac{-٢}{٧}$

---

(٥) $\frac{(٢\text{ن}+١)\times٢\text{ن}\times(٢\text{ن}-١)\times(٢\text{ن}-٢)}{(٢\text{ن}-١)\times(٢\text{ن}-٢)(٢\text{ن}-٣)} = \frac{٧٢}{٥}$

$\text{ن}(٢\text{ن}+١) = ١٤٤\text{ن} - ٢١٦$

$٢٠\text{ن}^{٢} + ١٠\text{ن} - ١٤٤\text{ن} + ٢١٦ = ٠$

∴ $٢٠\text{ن}^{٢} - ١٣٤\text{ن} + ٢١٦ = ٠$ ÷ ٢

$١٠\text{ن}^{٢} - ٦٧\text{ن} + ١٠٨ = ٠$

$(\text{ن} - ٤)(١٠\text{ن} - ٢٧) = ٠$ ∴ $\text{ن} = ٤$

أو $\text{ن} = ٢٫٧ \in \text{ص}^{+}$ مرفوضه

---

(٦) الأيمن = $\frac{(\text{ن}+١)\times\text{ن}\times(\text{ن}-١)\,\underline{|\text{ن}-٢}}{\underline{|\text{ن}-٢}}$

$= \text{ن}(\text{ن}^{٢} - ١) = \text{ن}^{٣} - \text{ن} =$ الأيسر

---

(٧) ${}^{\text{ن}+٣}\text{ل}_{٥} = ٥٥٤٤٠ = ١١\times١٠\times٩\times٨\times٧$

${}^{\text{ن}+٣}\text{ل}_{٥} = {}^{١١}\text{ل}_{٥}$ ∴ $\text{ن} + ٣ = ١١$ ∴ $\text{ن} = ٨$

∴ ${}^{٨-١}\text{ل}_{٣} = {}^{٧}\text{ل}_{٣} = ٧\times٦\times٥ = ٢١٠$

---

(٨) ${}^{\text{م}+\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ١١\times١٠\times٩ = {}^{١١}\text{ل}_{٣}$ ∴ $\text{م} + \text{ن} = ١١$ (١)

$\underline{|\text{م}-\text{ن}} = ٥\times٤\times٣\times٢\times١ = \underline{|٥}$

∴ $\text{م} - \text{ن} = ٥$ (٢) بجمع (١)، (٢)

∴ $٢\text{م} = ١٦$ ∴ $\text{م} = ٨$

من (١) $٨ + \text{ن} = ١١$ ∴ $\text{ن} = ٣$

∴ ${}^{\text{م}-١}\text{ل}_{\text{ن}+١} = {}^{٧}\text{ل}_{٤} = ٧\times٦\times٥\times٤ = ٨٤٠$

---

(٩) ${}^{٨}\text{ق}_{٣} = \frac{٨\times٧\times٦}{٣\times٢\times١}$ ، ${}^{١٥}\text{ق}_{٤} = \frac{١٥\times١٤\times١٣\times١٢}{٤\times٣\times٢\times١}$

${}^{٢٠}\text{ق}_{١٨} = {}^{٢٠}\text{ق}_{٢} = \frac{٢٠\times١٩}{٢\times١}$ ،

${}^{٥٠}\text{ق}_{٤٩} = {}^{٥٠}\text{ق}_{١} = ٥٠$ ، ${}^{\text{ك}+١}\text{ق}_{\text{ك}} = {}^{\text{ك}+١}\text{ق}_{١} = \text{ك} + ١$

---

(١٠) $\text{ك} = ٩ + ٦ = ١٥$ ∴ ${}^{١٥}\text{ق}_{١٤} = {}^{١٥}\text{ق}_{١} = ١٥$

، ${}^{١٧}\text{ق}_{١٥} = {}^{١٧}\text{ق}_{٢} = \frac{١٧\times١٦}{٢\times١} = ١٣٦$

---

(١١) $\text{ك} - ٣ = ١٣ + ٥$ ∴ $\text{ك} = ٢١$

∴ ${}^{٢١}\text{ق}_{١٩} = \frac{٢١\times٢٠}{٢\times١} = ٢١٠$ ، ${}^{٢١}\text{ق}_{٢١} = ١$

---

(١٢) ${}^{\text{ك}}\text{ق}_{٢} = ٣٦$ ∴ $\frac{\text{ك}(\text{ك}-١)}{٢\times١} = ٣٦$

∴ $\text{ك}^{٢} - \text{ك} - ٧٢ = ٠$ ∴ $(\text{ك} - ٩)(\text{ك} + ٨) = ٠$

∴ $\text{ك} = ٩$ ، $\text{ك} = -٨$ مرفوضة ∴ ${}^{\text{ك}-١}\text{ق}_{٦} = {}^{٨}\text{ق}_{٦} = \frac{٨\times٧}{٢\times١} = ٢٨$

(١٣) $^{ن+١}ق_{ن-١} = {^{ن+١}ق_{٢}} = \frac{(ن+١)\times ن}{٢\times ١} = ٢١$

∴ $ن^٢ + ن - ٤٢ = ٠$ ∴ $(ن-٦)(ن+٧) = ٠$

∴ $ن = ٦$ ∴ $^{ن+٣}ق_{٣} = {^{٩}ق_{٣}} = \frac{٩\times ٨\times ٧}{٣\times ٢\times ١} = ٨٤$

---

(١٤) $\frac{م(م-١)(م-٢)(م-٣)}{٤\times ٣\times ٢\times ١} \times \frac{٣\times ٢\times ١}{(م-٢)(م-٣)(م-٤)} = \frac{٧}{٢}$

$\frac{م^٢-م}{٤م-١٦} = \frac{٧}{٢}$ ∴ $م^٢ - م = ١٤م - ٥٦$

∴ $م^٢ - ١٥م + ٥٦ = ٠$ ∴ $(م-٧)(م-٨) = ٠$ ∴ $ن = ٧$ أ، ٨

---

(١٥) $\frac{ن!}{(ن-٤)!\,٤!} + \frac{(ن-١)!}{(ن-٤)!\,٣!} = \frac{١١\times (ن-١)!}{٣\,(ن-٣)!\,٢!}$

وبقسمة الطرفين على $(ن-١)!$ والضرب × $٢! \times (ن-٤)!$

∴ $\frac{ن}{١٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١١}{٣(ن-٣)}$ ، بالضرب × ١٢ (ن - ٣)

∴ $ن(ن-٣) + ٤(ن-٣) = ٤٤$

$ن^٢ + ن - ٥٦ = ٠$ ∴ $(ن-٧)(ن+٨) = ٠$ ∴ $ن = ٧$ فقط.

---

(١٦) (i) $\frac{^{١٩}ق_{٨}}{^{١٩}ق_{٧}} = \frac{١٩-٨+١}{٨} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

(ii) $\frac{^{٢٣}ق_{٨}}{^{٢٣}ق_{٩}} = \frac{٩}{٢٣-٩+١} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

(iii) $\frac{^{٢٩}ق_{١٢}}{^{٢٩}ق_{١٨}} = \frac{^{٢٩}ق_{١٢}}{^{٢٩}ق_{١١}} = \frac{٢٩-١٢+١}{١٢} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

(iv) $= \frac{^{١٣}ق_{٢}}{^{١٣}ق_{٨}} + \frac{^{١٣}ق_{٧}}{^{١٣}ق_{٨}} = ١ + \frac{٨}{١٣-٨+١}$

$= ١ + \frac{٨}{٦} = \frac{٣}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٧}{٣}$

---

(١٧) $\frac{^{١٣}ق_{ر+٢}}{^{١٣}ق_{ر+١}} = \frac{١٣-(ر+٢)+١}{ر+٢} = \frac{٩}{٥}$

∴ $٥(١٢-ر) = ٩(ر+٢)$ ∴ $١٤ر = ٤٢$ ∴ $ر = ٣$

---

(١٨) ∵ $^{م}ق_{٣} = {^{م}ق_{١٢}}$ ∴ $م = ٣ + ١٢ = ١٥$

، $\frac{^{١٥}ق_{ر-١}}{^{١٥}ق_{ر}} = \frac{ر}{١٥-ر+١} = \frac{١}{٣}$

∴ $٣ر = ١٦ - ر$ ∴ $٤ر = ١٦$ ∴ $ر = ٤$

---

(١٩) $ر + ٣ر - ٥ = ٧$ ∴ $٤ر = ١٢$ ∴ $ر = ٣$

∴ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{^{ن}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٢}} = \frac{ن-٣+١}{٣} = \frac{٨}{٣}$ ∴ $ن = ١٠$

---

(٢٠) $\frac{^{ن}ق_{٩}}{^{ن}ق_{٨}} > ١$ ∴ $\frac{م-٩+١}{٩} > ١$ ، $م - ٨ > ٩$ ∴ $ن > ١٧$

---

(٢١) $\frac{م-ر+١}{ر} = \frac{٧}{٦}$ ∴ $٦م - ١٣ر + ٦ = ٠$ (١)

، $ر + ر + ١ = م$ ∴ $م = ٢ر + ١$ ومن (١)

∴ $١٢ر + ٦ - ١٣ر + ٦ = ٠$ ∴ $ر = ١٢$ ∴ $م = ٢٥$

---

(٢٢) $٢ \times {^{ن}ق_{٤}} = {^{ن}ق_{٥}} + \frac{٣}{٢}\,{^{ن}ق_{٣}}$ وبالقسمة على $^{ن}ق_{٤}$

∴ $٢ = \frac{^{ن}ق_{٥}}{^{ن}ق_{٤}} + \frac{٣}{٢}\,\frac{^{ن}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٤}}$

∴ $٢ = \frac{ن-٥+١}{٥} + \frac{٣}{٢} \times \frac{٤}{ن-٤+١}$

∴ $٢ = \frac{ن-٤}{٥} + \frac{٦}{ن-٣}$

وبالضرب × ٥ (ن - ٣) ∴ $١٠ن - ٣٠ = ن^٢ - ٧ن + ١٢ + ٣٠$

∴ $ن^٢ - ١٧ن + ٧٢ = ٠$ ∴ $(ن-٨)(ن-٩) = ٠$

∴ $ن = ٨$ أ، $ن = ٩$

---

(٢٣) $\frac{٤ \times {^{١٢}ق_{ر-١}}}{\frac{٥}{٦} \times {^{١٢}ق_{ر}}} = \frac{٢٧ \times {^{١٢}ق_{ر-٢}}}{٤ \times {^{١٢}ق_{ر-١}}}$

∴ $\frac{٢٤}{٥} \times \frac{ر}{١٢-ر+١} = \frac{٢٧}{٤} \times \frac{ر-١}{١٢-(ر-١)+١}$

∴ $٣٢ر(١٤-ر) = ٤٥(ر-١)(١٣-ر)$

ومنها ∴ $ر^٢ - ١٤ر + ٤٥ = ٠$

∴ $(ر-٥)(ر-٩) = ٠$ ∴ $ر = ٥$ أ، ٩

---

(٢٤) $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن-١}ق_{ر}} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!} \times \frac{(ن-ر-١)!\,ر!}{(ن-١)!}$

$= \frac{ن\,(ن-١)! \times (ن-ر+١)!}{(ن-ر)\,(ن-ر-١)!\,(ن-١)!} = \frac{ن}{ن-١}$

∴ $\frac{^{٢٧}ق_{١٩} + {^{٢٦}ق_{١٩}}}{^{٢٦}ق_{١٩}} = \frac{^{٢٧}ق_{١٩}}{^{٢٦}ق_{١٩}} + ١ =$

$١ + \frac{٢٧}{٢٧-١٩} = \frac{٢٧}{٨} + \frac{٨}{٨} = \frac{٣٥}{٨}$

(25) الأيمن $= 1 + \dfrac{{}^{ن}ق_{ر+1}}{{}^{ن}ق_{ر}}$

$= 1 + \dfrac{م-(ر+1)+1}{ر+1} = \dfrac{ر+1+م-ر}{ر+1} =$ الأيسر

$\therefore \dfrac{{}^{م}ق_{9} + {}^{م}ق_{8}}{{}^{م}ق_{8}} = \dfrac{م+1}{9} = \dfrac{7}{3} \therefore 3م + 3 = 63$

$\therefore 3م = 60 \therefore م = 20$

(26) الأيمن $= \dfrac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!} + \dfrac{ن!}{(ن-ر-1)!\,(ر+1)!}$

$= \dfrac{ن!}{(ن-ر)\,(ن-ر-1)!\,ر!} + \dfrac{ن!}{(ن-ر-1)! \times (ر+1)\,ر!}$

$= \dfrac{ن!\,(ر+1+ن-ر)}{(ن-ر)\,(ن-ر-1)! \times (ر+1)\,ر!} = \dfrac{(ن+1)!}{(ن-ر)!\,(ر+1)!}$

$= {}^{ن+1}ق_{ر+1} =$ الأيسر

(أ) $= ({}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1}) + ({}^{ن}ق_{ر-1} + {}^{ن}ق_{ر-2})$

$= {}^{ن+1}ق_{ر} + {}^{ن+1}ق_{ر-1} = {}^{ن+2}ق_{ر}$

(ب) الأيمن $= \dfrac{{}^{18}ق_{ر+1}}{{}^{18}ق_{ر+2}} = \dfrac{ر+2}{18-(ر+2)+1} = \dfrac{7}{12}$

$\therefore 12ر + 24 = 119 - 7ر \therefore 19ر = 95 \therefore ر = 5$

(27) (أولاً) $= {}^{9}ق_{3} = 84$ (ثانياً) $= {}^{5}ق_{3} + {}^{4}ق_{3} = 10 + 4 = 14$

(ثالثاً) (رجلان وسيدة) أو (سيدتان ورجل)

$= {}^{5}ق_{2} \times {}^{4}ق_{1} + {}^{5}ق_{1} \times {}^{4}ق_{2} = 40 + 30 = 70$

(رابعاً) = (ثالثاً) + (ثانياً) $= 70 + 14 = 84$

(28) (2 من الأولى ، 4 من الثانية) أو (3 من الأولى ، 3 من الثانية) أو (4 من الأولى ، 2 من الثانية)

$= {}^{4}ق_{2} \times {}^{4}ق_{4} + {}^{4}ق_{3} \times {}^{4}ق_{3} + {}^{4}ق_{4} \times {}^{4}ق_{2} = 6\times1 + 4\times4 + 1\times6 = 28$

المجموعة الثالثة :

تمارين (1-1) من الكتاب المدرسي

(1) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معاً أو ثلاثة أحرف مختلفة معاً

$= {}^{6}ق_{2} + {}^{6}ق_{3}$ الجواب (جـ)

(2) $\because \dfrac{{}^{ن}ق_{5}}{{}^{ن}ق_{4}} = \dfrac{3}{1} \quad \therefore \dfrac{ن-5+1}{5} = \dfrac{3}{1}$

$\therefore ن - 4 = 15 \quad \therefore ن = 19$ الجواب (د)

(3) عدد الطرق $= {}^{12}ل_{3} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$ طريقة

الجواب (ب)

(4) ${}^{ن}ل_{2} = ن\,(ن-1)$ حيث $ن \in ص^{+}$ $= 30$ الجواب (د)

(5) $\therefore {}^{17}ل_{م+5} = {}^{29}ل_{م+5} \quad \therefore م + 5 = 0 \quad \therefore م = -5$ الجواب (أ)

(6) ${}^{ن-3}ل_{7} = 8! = {}^{8}ل_{7}$ ، $\cancel{{}^{8}ل_{8}}$ $\therefore ن - 3 = 8 \quad \therefore ن = 11$

الجواب (جـ)

(7) ${}^{50}ق_{4} + {}^{55}ق_{3} + {}^{54}ق_{3} + {}^{53}ق_{3} + {}^{52}ق_{3} + {}^{51}ق_{3} + {}^{50}ق_{3}$

$= {}^{55}ق_{3} + {}^{54}ق_{3} + {}^{53}ق_{3} + {}^{52}ق_{3} + {}^{51}ق_{3} + {}^{51}ق_{4}$

$= {}^{55}ق_{3} + {}^{54}ق_{3} + {}^{53}ق_{3} + {}^{52}ق_{3} + {}^{52}ق_{4}$

$= {}^{55}ق_{3} + {}^{54}ق_{3} + {}^{53}ق_{3} + {}^{53}ق_{4}$

$= {}^{55}ق_{3} + {}^{54}ق_{3} + {}^{54}ق_{4} = {}^{55}ق_{3} + {}^{55}ق_{4} = {}^{56}ق_{4}$

الجواب (أ)

(8) عدد طرق الإجابة = أما يجيب عن 4 من الخمسة الأولى وستة من الثمانية الأخيرة أو خمسة الأولى وخمسة من الثمانية الأخيرة

$\because$ الترتيب غير هام

$\therefore$ عدد الطرق $= {}^{5}ق_{4} + {}^{8}ق_{6} + {}^{5}ق_{5} \times {}^{8}ق_{5}$

$= 5 \times 28 + 1 \times 56 = 196$ طريقة الجواب (ب)

(9) $\therefore {}^{ن+2}ق_{4} = ن^{2} - 1$

$\therefore \dfrac{(ن+2)(ن+1) \times (ن)(ن-1)}{4\times3\times2\times1} = (ن+1)\,(ن-1)$

$\therefore ن\,(ن+2) = 24 = 4 \times 6$ ، $ن = 4$ الجواب (ب)

(10) عدد الطرق $= {}^{4}ق_{1} + {}^{5}ق_{2} = 4 \times \dfrac{5\times4}{2} = 40$ طريقة

(11) عدد الطرق $= {}^{4}ق_{1} + {}^{5}ق = 4 + 10 = 14$ طريقة

(12) الطالب الأول يأخذ جائزتين من 8 والثانى جائزتين من الستة الباقية والثالث جائزتين من الاربعه الباقية والرابع الجائزتين الباقيتين.

$\therefore$ عدد الطرق $= {}^{8}ق_{2} \times {}^{6}ق_{2} \times {}^{4}ق_{2} \times {}^{2}ق_{2} = 28 \times 15 \times 6 \times 1 = 2520$ طريقة

(13) (أ) عدد الطرق $= 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$ عدداً

(ب) بدون إحلال أى بدون تكرار، $\because$ عند تكوين العدد الترتيب هام

$\therefore$ عدد الطرق $= {}^{7}ل_{4} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ عدداً.

(14) (أ) ${}^{4}ل_{3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$

(ب) العدد من 3 أرقام على الأقل أى من 3 أرقام أ، 4 أرقام

$= {}^{4}ل_{3} + {}^{4}ل_{4} = 24 + 24 = 48$

(جـ) العدد من 3 أرقام على الأكثر أى من 3 أرقام أو من رقمين أو من رقم واحد

$\therefore$ عدد الأعداد $= {}^{4}ل_{3} + {}^{4}ل_{2} + {}^{4}ل_{1} = 24 + 12 + 4 = 40$

(١٥) (أ) ${}^{ن}ل_{٢} = ٢ = ٢ \times ١ = {}^{٢}ل_{٢}$ $\therefore ن = ٢$

${}^{ر+٢}ل_{٢} = ٩٠ = ١٠ \times ٩ = {}^{١٠}ل_{٢}$ $\therefore ر = ٨$

(ب) ${}^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٧}ل_{٤}$ $\therefore ن = ٧$

${}^{٨}ل_{ر} = ٣٣٦ = ٨ \times ٧ \times ٦ = {}^{٨}ل_{٣}$ $\therefore ر = ٣$

(جـ) ${}^{ن}ق_{٢} = ٢١$ ، ${}^{ن}ل_{٢} = ٤٢$ $\therefore {}^{ن}ل_{٢} = ٧ \times ٦ = {}^{٧}ل_{٢}$

$\therefore ن = ٧$ ، ${}^{ن+ر}ل_{٢} = ٩٩٠ = ١١ \times ١٠ \times ٩$

${}^{ن+ر}ل_{٢} = {}^{١١}ل_{٢}$ ، ن + ر = ١١ $\therefore ن = ٧$ $\therefore ر = ٤$

(د) ${}^{ن}ق_{ر} = ١٠$ ، $(ن-ر)! = ٦ = ٣!$

$\therefore ن - ر = ٣$ .... (١)

${}^{ن}ق_{ن-ر} = ١٠$ $\therefore {}^{ن}ق_{٣} = ١٠$ ، $\frac{{}^{ن}ل_{٣}}{٦} = ١٠$ $\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ٦٠$

${}^{ن}ل_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = {}^{٥}ل_{٣}$ $\therefore ن = ٥$

من (١) $\because ٥ - ر = ٣$ $\therefore ر = ٢$

---

(١٦) $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٢}{٣}$ $\therefore \frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore ٣ن - ٣ر + ٣ = ٢ر$ $\therefore ٣ن = ٥ر - ٣$ .... (١)

$\because \frac{{}^{ن}ق_{ر-١}}{{}^{ن}ق_{ر-٢}} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{ن-(ر-١)+١}{ر-١} = \frac{٣}{٤}$

$٤ن - ٤ر + ٨ = ٣ر - ٣$ ، $٤ن = ٧ر - ١١$ .... (٢)

$\therefore (١) \times ٤ \therefore (٢) \times ٣ \therefore ٢٠ر - ١٢ = ٢١ر - ٣٣ \therefore ر = ٢١$

من (١) $٣ن = ٥ \times ٢١ - ٣ = ١٠٢$ ، $ن = ٣٤$

---

(١٧) $\because \frac{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = ١ + \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}}$

$= ١ + \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١}$

$= \frac{ر+١+ن-ر-١+١}{ر+١} = \frac{ن+١}{ر+١}$

$\therefore$ الأيمن = $\frac{ر+١}{ن+١}$ = الأيسر

ومنها $\frac{{}^{١٥}ق_{٦} + {}^{١٥}ق_{٧}}{{}^{١٥}ق_{٦}} = \frac{١٥+١}{٧} = \frac{١٦}{٧}$

---

(١٨) الأيمن = $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-١}ق_{ر}} = \frac{ن!\; ر!\; (ن-١-ر)!}{ر!\; (ن-ر)!\; (ن-١)!}$

$= \frac{ن\,(ن-١)!\; ر!\; (ن-١-ر)!}{ر!\; (ن-ر)\,(ن-١-ر)!\; (ن-١)!} = \frac{ن}{ن-ر}$ = الأيسر

$\because \frac{{}^{ن}ق_{٨} + {}^{ن-١}ق_{٨}}{{}^{ن-١}ق_{٨}} = ٣$ $\therefore \frac{{}^{ن}ق_{٨}}{{}^{ن-١}ق_{٨}} + ١ = ٣$

$\because \frac{ن}{ن-٨} = \frac{٢}{١}$ $\therefore ٢ن - ١٦ = ن$ $\therefore ن = ١٦$

---

(١٩) $\because {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-١}$ $\therefore ن = ٢ر - ١$

، $\frac{(ن+١)!}{ر!\,(ن+١-ر)!} = \frac{٤٠ \times ن!}{ر!\,(ن+٢-ر)!}$

$\frac{(ن+١)\,ن!}{(ن+١-ر)!} = \frac{٤٠\,ن!}{(ن+٢-ر)\,(ن+١-ر)!}$

$(ن+١)\,(ن+٢-ر) = ٤٠$

من (١) $\because ٢ر \times (ر+١) = ٤٠$ $\therefore ر\,(ر+١) = ٢٠ = ٤ \times ٥$

$ر = ٤$ $\therefore ن = ٧$

---

(٢٠) ${}^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ر}$ $\therefore ر! = ١٢٠$

$\because ر! = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ٥!$ $\therefore ر = ٥$

، ${}^{١٢}ق_{٢ر} = {}^{١٢}ق_{١٠} = {}^{١٢}ق_{٢} = \frac{١٢ \times ١١}{٢ \times ١} = ٥٥$

$\because ن \geq ر$

$\therefore$ أقل قيمة عندما ن = ر = ٥

---

(٢١) $\because \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٥}{١}$ $\therefore ن - ر + ١ = \frac{٥}{١}$

$\therefore ن - ر + ١ = ٥ر$ $\therefore ن = ٦ر - ١$ .... (١)

، $\because \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٥}{٥} = \frac{٣}{١}$

$\therefore \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{٣}{١}$

$\therefore ن - ر = ٣ر + ٣$

$\therefore ن = ٤ر + ٣$ .... (٢)

من (١)، (٢) $\therefore ٦ر - ١ = ٤ر + ٣$

$\therefore ٢ر = ٤$ $\therefore ر = ٢$ من (٢) $\therefore ن = ١١$

(٢٢) الأيمن = $\frac{{}^{ن+١}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ر+١}\,\underline{|ن-ر}} \times \frac{\underline{|ر}\,\underline{|ن-ر}}{\underline{|ن}}$

$= \frac{(ن+١)\underline{|ن}\,\underline{|ر}}{(ر+١)\underline{|ر}\,\underline{|ن}} = \frac{ن+١}{ر+١} =$ الأيسر

النتيجة = $\frac{{}^{١٥}ق_{٥} + {}^{١٤}ق_{٤}}{{}^{١٤}ق_{٤} + {}^{١٣}ق_{٣}} = \frac{{}^{١٤}ق_{٤}\left(\frac{{}^{١٥}ق_{٥}}{{}^{١٤}ق_{٤}}+١\right)}{{}^{١٣}ق_{٣}\left(\frac{{}^{١٤}ق_{٤}}{{}^{١٣}ق_{٣}}+١\right)}$

$= \frac{١٤}{٤}\times\frac{\left(\frac{١٥}{٥}+١\right)}{\left(\frac{١٤}{٤}+١\right)} = \frac{٧}{٢}\times\frac{٤\times٢}{٩} = \frac{٢٨}{٩}$

---

(٢٣) $\frac{{}^{١٤}ق_{ر+١}}{{}^{١٤}ق_{ر}} = ٢ \quad \therefore \frac{١٤-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{٢}{١}$

$١٤-ر-١+١ = ٢ر+٢$ ، $١٤-٢ = ٣ر \quad \therefore ر = ٤$

---

(٢٤) $\because {}^{٣٠}ل_{س\,ص} = {}^{٣٠}ل_{٢٩} \quad \therefore {}^{٣٠}ل_{س\,ص} = {}^{٣٠}ل_{٣٠-١}$

س = ٣٠، ٢ص = −١ $\therefore$ ص = $-\frac{١}{٢}$

أو ${}^{٣٠}ل_{٢٩} = {}^{٣٠}ل_{٢٩+١}$ ، ٢ص = ١

$\therefore$ س = ٢٩ ، ص = $\frac{١}{٢}$ $\quad\therefore$ س = ٢٩ ، ص = $\frac{١}{٢}$

أو س = ٣٠ ، ص = $-\frac{١}{٢}$

أو س $\in$ {٠، ١، ٢، ٣، ....، ٣٠} ، ص = ٠

---

(٢٥) $\because {}^{ن}ل_{٧} \le {}^{ن}ل_{٨} \quad \therefore ٨ \le ن$

---

(٢٦) $(م+ن)(م+ن-١)\,\underline{|م+ن-٢} = ٣٨٠\,\underline{|م+ن-٢}$

$\therefore {}^{م+ن}ل_{٢} = ٢٠\times١٩ = {}^{٢٠}ل_{٢} \quad \therefore م+ن = ٢٠$

---

(٢٧) (أ) $(ن+٢)(ن+١)\,\underline{|ن}\,\underline{|٣ن-٤}$

$= \underline{|ن}(٣ن-٢)(٣ن-٣)\,\underline{|٣ن-٤}$

$\therefore ن^٢ + ٣ن + ٢ = ٩ن^٢ - ١٥ن + ٦$

$\therefore ٨ن^٢ - ١٨ن + ٤ = ٠$ ، $٤ن^٢ - ٩ن + ٢ = ٠$

$\therefore (ن-٢)(٤ن-١) = ٠$ ، ن = ٢ أو ن = $\frac{١}{٤}$ مرفوض

(ب) $٢\,\underline{|٢ن} = (ن+٢)(ن+١)(\underline{|ن})^٢$

$\therefore \frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن}} = \frac{\underline{|ن+٢}}{\underline{|٢}}$ ، ${}^{٢ن}ل_{ن} = {}^{ن+٢}ل_{٢} \quad \therefore ن = ٢$

(ج) $\underline{|٢ن}\,\underline{|ن-٣} = ٧٢\,\underline{|٣ن-٧}$

بضرب الطرفين × (٣ن − ٦) $\therefore \underline{|٢ن}\times٣(ن-٢)\,\underline{|ن-٣}$

$= ٧٢\,(٣ن-٦)\,\underline{|٣ن-٧}$

$\underline{|٢ن}\,\underline{|ن-٢} = ٢٤\,\underline{|٣ن-٦}$ ، $\underline{|٢ن}\,\underline{|ن-٢} = \underline{|٤}\,\underline{|٣ن-٦}$

$\frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|٤}} = \frac{\underline{|٣ن-٦}}{\underline{|ن-٢}}$ ، ${}^{٢ن}ل_{٢ن-٤} = {}^{٣ن-٦}ل_{٢ن-٤}$

$\therefore$ ٢ن = ٣ن − ٦ $\therefore$ ن = ٦ أو ٢ن − ٤ = ٠ ن = ٢ مرفوض

أو $\frac{\underline{|ن-٢}}{\underline{|٤}} = \frac{\underline{|٣ن-٦}}{\underline{|٢ن}}$ ، ${}^{ن-٢}ل_{ن-٦} = {}^{٣ن-٦}ل_{ن-٦}$

أما ن − ٦ = ٠ $\therefore$ ن = ٦

أو ن − ٢ = ٣ن − ٦ $\therefore$ ن = ٢ مرفوض

---

(٢٨) الأيمن = $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-١}ق_{ر-١}}$

$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\,\underline{|ن-ر}} \times \frac{\underline{|ر-١}\,\underline{|ن-ر}}{\underline{|ن-١}}$

$= \frac{ن\,\underline{|ن-١}\,\underline{|ر-١}}{ر\,\underline{|ر-١}\,\underline{|ن-١}} = \frac{ن}{ر} =$ الأيسر

$\because {}^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩\times{}^{ن+١}ق_{ر} \quad \therefore \frac{{}^{ن+٢}ق_{ر+١}}{{}^{ن+١}ق_{ر}} = ٩$

$\therefore \frac{ن+٢}{ر+١} = ٩$ ، ن + ٢ = ٩ر + ٩

$\therefore$ ن = ٩ر + ٧ .... (١)

$\because ٩\times{}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠\times{}^{ن}ق_{ر-١}$ ،

$\therefore \frac{{}^{ن+١}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٩٠}{٩} = ١٠ \quad \therefore \frac{ن+١}{ر} = ١٠$

$\therefore$ ن = ١٠ر − ١ .... (٢)

من (١)، (٢) ١٠ر − ١ = ٩ر + ٧

ر = ٨ من (٢) $\therefore$ ن = ٧٩

(٢٩) (أ) من خواص المتتابعة الحسابية

$$\therefore ٢ \times ٣ \times {}^{ن}ق_{٦} = ٤ \times {}^{ن}ق_{٥} + ٣ \times {}^{ن}ق_{٧}$$

بالقسمة على ${}^{ن}ق_{٦}$

$$٦ = ٤ \times \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٦}} + ٣ \times \frac{{}^{ن}ق_{٧}}{{}^{ن}ق_{٦}}$$

$$٦ = ٤ \times \frac{٦}{ن - ٦ - ١١} + ٣ \times \frac{ن - ٧ + ١}{٧}$$

$$\frac{٦}{١} = \frac{٢٤}{ن - ٥} + \frac{٣(ن - ٦)}{٧}$$

بالضرب × $\frac{٧(ن - ٥)}{٣}$ ، $١٤ (ن - ٥) = ٥٦ + ن^٢ - ١١ن + ٣٠$

$\therefore ن^٢ - ٢٥ن + ١٥٦ = ٠$ ، $(ن - ١٢)(ن - ١٣) = ٠$

$\therefore ن = ١٢$ أو $ن = ١٣$

(ب) من خواص المتتابعة الهندسية

$$\therefore \frac{٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١}}{٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}} = \frac{٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}}{٦ \times {}^{١٤}ق_{ر-١}}$$

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{١٤ - ر - ١ + ١}{ر + ١} = \frac{١٤ - ر + ١}{٢(ر)}$$

$٤ر (١٤ - ر) = ٣ (ر + ١) (١٥ - ر)$

$٥٦ ر - ٤ ر^٢ = ٤٢ ر - ٣ ر^٢ + ٤٥$ ، $ر^٢ - ١٤ ر + ٤٥ = ٠$

$(ر - ٩)(ر - ٥) = ٠$ $\therefore ر = ٩$ أو $ر = ٥$

(٣٠) (أ) $\frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{٢}{١}$ ، $\frac{ن - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = ٢$

$ن - ر - ١ + ١ = ٢ر + ٢$ ، $ن = ٣ر + ٢$ .... (١)

$\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ن - (ر + ٢) + ١}{ر + ٢} = \frac{٣}{٢}$

$٢ن - ٢ر - ٢ = ٣ر + ٦$ ، $٢ن = ٥ر + ٨$ .... (٢)

من (١) ، (٢) $٦ر + ٤ = ٥ر + ٨$ ، $ر = ٤$ ، $ن = ١٤$

(ب) $\frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{٢٤}{١٥} = \frac{٨}{٥}$ ، $\frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{٨}{٥}$

$٥ن - ٥ر = ٨ر + ٨$ ، $٥ن = ١٣ر + ٨$ .... (١)

$\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٢٨}{٢٤} = \frac{٧}{٦}$ ، $\frac{ن - ر - ٢ + ١}{ر + ٢} = \frac{٧}{٦}$

$٦ن - ٦ر - ٦ = ٧ر + ١٤$ ، $٦ن = ١٣ر + ٢٠$ .... (٢)

بطرح (١) من (٢) $ن = ١٢$ من (١)

$٦٠ - ٨ = ١٣ر$ $\therefore ر = ٤$

(جـ) ${}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ١٤ : ١٤$ $\therefore {}^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن}ق_{ر+٤}$

$\therefore ن = ٢ر + ٦$ ....(١) $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٤}{٣}$

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} \times \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٤}{٣}$$

$$\frac{ن - (ر + ٢) + ١}{ر + ٢} \times \frac{ن - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{١٤}{٣}$$

من (١) $\therefore \frac{٢ر + ٦ - ر - ١}{ر + ٢} \times \frac{٢ر + ٦ - ر}{ر + ١} = \frac{١٤}{٣}$

$(ر + ٥)(ر + ٦) \times ٣ = ١٤ (ر + ٢)(ر + ١)$

$٣ر^٢ + ٣٣ر + ٩٠ = ١٤ر^٢ + ٤٢ر + ٢٨$

$١١ر^٢ + ٩ر - ٦٢ = ٠$ ،

$(ر - ٢)(١١ر + ٣١) = ٠$

$ر = ٢$ أو $ر = \frac{-٣١}{١١}$ مرفوض

من (١) $ن = ٢ \times ٢ + ٦ = ١٠$ ، $ن = ١٠$

(د) $\because {}^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٢ر-٥}$

أو $ر = ٢ر - ٥$ أو $ر + ٢ر - ٥ = ١٥$

$٢ر = ٥$ ، $٤ر = ٢٠$ ، $ر = ٢,٥$ مرفوض ، $ر = ٥$

$\therefore \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٤}} = \frac{٩}{٥}$ $\therefore \frac{ن - ٥ + ١}{٥} = \frac{٩}{٥}$ ، $ن = ١٢$

(هـ) ${}^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ $\therefore ٢ر + ١٠ = ٣٠$

$\therefore ر = ١٠$

$\because {}^{ن}ل_{٢} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٠}$

$ن (ن - ١) \times {}^{ن-٢}ل_{٠} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٠}$ $\therefore {}^{ن}ل_{٢} = {}^{١٠}ل_{٢}$ $\therefore ن = ١٠$

(٣١) عدد القطع = ${}^{4}ق_{2} = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$

(٣٢) عدد الطرق = ${}^{5}ق_{2} = 10$ طرق

(٣٣) عدد الطرق = ${}^{20}ق_{4} \times {}^{10}ق_{2} = 4845 \times 45 = 218025$

(٣٤) عدد طرق تكوين الفريق = ${}^{5}ق_{3} \times {}^{9}ق_{4} = 1260$ طريقة

(٣٥) عدد طرق تكوين اللجنة = ${}^{12}ق_{3} \times {}^{9}ق_{3} = 18480$

(٣٦) (أ) عدد المثلثات = ${}^{4}ق_{3} = {}^{4}ق_{1} = 4$ مثلثات

(ب) عدد المثلثات = ${}^{5}ق_{3} = {}^{5}ق_{2} = 10$ مثلثات

(ج) عدد المثلثات = ${}^{6}ق_{3} = 20$ مثلثاً

(٣٧) عدد أقطار المضلع الذى عدد أضلاعه ن هو ${}^{ن}ق_{2} - ن$

(أ) عدد الأقطار = ${}^{6}ق_{2} - 6 = 9$ أقطار.

(ب) عدد الأقطار = ${}^{8}ق_{2} - 8 = 20$ قطر.

(ج) عدد الأقطار = ${}^{12}ق_{2} - 12 = 54$ قطر.

(٣٨) (أ) عدد اللجان = ${}^{12}ق_{4} = 495$

(ب) عدد اللجان = ${}^{3}ق_{1} \times {}^{9}ق_{3} = 252$

(ج) عدد اللجان = ${}^{3}ق_{1} \times {}^{9}ق_{3} + {}^{3}ق_{2} \times {}^{9}ق_{2} + {}^{3}ق_{3} \times {}^{9}ق_{1} = 369$

المجموعة الرابعة :

(١) $6 \times \frac{\underline{|م}}{\underline{|3}\;\underline{|م-3}} = \frac{\underline{|م}}{\underline{|م-م+2}}$

∴ $\underline{|م-3} = \underline{|2}$ ∴ م − ٣ = ٢ ∴ ن = ٥

(٢) إما ر + ٣ = ٧ − ر أي ر = ٢ ∴ ${}^{ن}ل_{2} = 720$

وهو مرفوض أ، ر + ٣ + ٧ − ر = م ∴ م = ١٠

∴ ${}^{10}ل_{ر} = 720 = 10 \times 9 \times 8 = {}^{10}ل_{3}$ ∴ ر = ٣

(٣) $\underline{|ر+1} = {}^{ن+1}ل_{ر+1} \div {}^{ن+1}ق_{ر+1} = 5040$

$= 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

∴ ر + ١ = ٧ ∴ ر = ٦ ∴ $\frac{ن+1-ر+1}{ر} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{ن+2-6}{6} = \frac{2}{3}$ ∴ ٣ن − ١٢ = ١٢ ∴ ن = ٨

(٤) ن = ٥ + ٤ = ٩ ، ك = ١×٢×٣×٤ = $\underline{|4}$ ∴ ل = ٤

∴ ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{9}ل_{4} = 9\times8\times7\times6 = 3024$

(٥) $1\times2\times3\times4\times5\times6 = \underline{|6}$ ∴ ن = ٦

∴ $\frac{{}^{6}ق_{ر}}{{}^{6}ق_{ر-1}} = \frac{3}{4}$ ∴ $\frac{6-ر+1}{ر} = \frac{3}{4}$

∴ ٣ر = ٢٨ − ٤ر ∴ ٧ر = ٢٨ ∴ ر = ٤

${}^{ن}ل_{ر} = {}^{6}ل_{4} = 6\times5\times4\times3 = 360$

(٦) الأيمن = $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\;\underline{|ن-ر}} \times \frac{\underline{|ر-1}\;\underline{|ن-1-ر+1}}{\underline{|ن-1}} = \frac{ن}{ر}$

∴ $\frac{ن\,\cancel{\underline{|ن-1}}}{ر\,\cancel{\underline{|ر-1}}\;\cancel{\underline{|ن-ر}}} \times \frac{\cancel{\underline{|ر-1}}\;\cancel{\underline{|ن-ر}}}{\cancel{\underline{|ن-1}}} = \frac{ن}{ر}$ = الايسر

القيمة = $\frac{{}^{24}ق_{2}\left(\frac{25}{4}+1\right)}{{}^{23}ق_{2}\left(\frac{24}{3}+1\right)} = \frac{\cancel{24}}{3} \times \frac{29}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{3}}{27} = \frac{58}{9}$

(٧) ر + ر + ١٠ = ٣٠ ∴ ٢ر = ٢٠ ∴ ر = ١٠ ،

ن (ن−١) × ${}^{ن-2}ل_{5}$ = ١٠ × ٩ × ${}^{ن-2}ل_{5}$ ∴ ${}^{ن}ل_{2} = {}^{10}ل_{2}$

∴ ن = ١٠ ∴ $\underline{|ن-ر} = \underline{|0} = 1$

(٨) ${}^{ن}ل_{ر} = 24 \times \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$

∴ $\underline{|ر} = 24 = 1\times2\times3\times4 = \underline{|4}$

∴ ر = ٤ ∴ ${}^{10}ق_{2ر} = {}^{10}ق_{8} = {}^{10}ق_{2} = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$

∴ ن ≥ ر ∴ أقل قيمة $\underline{|ن}$ هى عندما ن = ر ∴ ن = ٤

أقل قيمة $\underline{|ن}$ هى ن = ٤

(٩) ${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن+2}ق_{ر} = \frac{2}{1}$ ∴ $\underline{|ر} = 2 = 1\times2 = \underline{|2}$

ر = ٢ ∴ $\frac{{}^{ن}ق_{3}}{{}^{ن}ق_{2}} = \frac{5}{3}$ ∴ $\frac{ن-3+1}{3} = \frac{5}{3}$

ن − ٢ = ٥

ن = ٧

∴ ${}^{2ن}ق_{ن-ر} = {}^{14}ق_{5} = \frac{10\times11\times12\times13\times14}{1\times2\times3\times4\times5} = 2002$

(١٠) $\therefore \frac{\cancel{ن}(ن-١)(ن-٢)}{٣×٢×١} = ٥\cancel{ن}$

$\therefore {}^{ن-١}ل_{٢} = ٦ × ٥ = {}^{٦}ل_{٢}$

$\therefore ن - ١ = ٦ \quad \therefore ن = ٧$

$\therefore {}^{٧}ل_{ر+١} = ٢١٠ = ٧ × ٦ × ٥ = {}^{٧}ل_{٣}$

$\therefore ر + ١ = ٣ \quad \therefore ر = ٢$

---

(١١) $\therefore \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٧}{٤} \quad \therefore \frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٧}{٤}$

$\therefore ٤ن - ٤ر + ٤ = ٧ر$

$\therefore ٤ن = ١١ر - ٤$ ------- (١)

$\therefore {}^{ن}ق_{ر-١} ÷ ٥ × {}^{ن-١}ق_{ر-٢} = ٤ : ٦$

$$\therefore \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر+١}} × \frac{\underline{|ر-٢}\ \underline{|ن-١-ر+٢}}{٥\underline{|ن-١}} = \frac{٤}{٦}$$

$$\therefore \frac{\underline{|ن}}{(ر-١)\underline{|ر-٢}\ \underline{|ن+١-ر}} × \frac{\underline{|ر-٢}\ \underline{|ن+١-ر}}{\underline{|ن+١-ر} × ٥\underline{|ن-١}} = \frac{٤}{٦}$$

$\frac{ن\underline{|ن-١}}{٥(ر-١)\underline{|ن-١}} = \frac{٤}{٦} \quad \therefore ٣ن = ١٠ر - ١٠$ ----- (٢)

بضرب (١) × ٣ ، (٢) × ٤

$\therefore ١٢ن = ٣٣ر - ١٢$ ،

$١٢ن = ٤٠ر \quad \therefore ٤٠ر - ٤٠ = ٣٣ر - ١٢$

$\therefore ٧ر = ٢٨$

$ر = ٤$ من (١) $٤ن = ٤٠ \quad \therefore ن = ١٠$

$$\therefore \frac{\underline{|ن-٤}}{(\underline{|ر})^{٢}} = \frac{\underline{|٦}}{(\underline{|٤})^{٢}} = \frac{٦×٥×٤×٣×٢×١}{(٤×٣×٢×١)^{٢}}$$

$$= \frac{\cancel{٧٢٠}}{\cancel{٢٤}×٢٤} = \frac{٥}{٤}$$

---

(١٢) $(ن+١) × {}^{ن}ل_{ر} = ٧ × {}^{ن}ل_{ر} \quad \therefore ن + ١ = ٧ \quad \therefore ن = ٦$

$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٤}$ ، $\therefore \frac{{}^{٦}ق_{ر}}{{}^{٦}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \frac{٦-ر+١}{ر} = \frac{٣}{٤}$

$٣ر = ٢٨ - ٤ر \quad \therefore ٧ر = ٢٨ \quad \therefore ر = ٤$

$\underline{|ن-ر-٢} = \underline{|٦-٤-٢} = \underline{|٠} = ١$

إختبارات كتاب لامي (التباديل و التوافيق)

الاختبار الأول

[١] (أ) (١) $= ١٠×٩×٨×٧ = ٥٠٤٠$

(٢) $= ٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٧٢٠$

(٣) $= \frac{٨×٧×٦}{٣×٢×١} = ٥٦$

(٤) $\frac{{}^{١٢}ق_{٦}}{{}^{١٢}ق_{٧}} = \frac{{}^{١٢}ق_{٦}}{{}^{١٢}ق_{٥}} = \frac{١٢-٦+١}{٦} = \frac{٧}{٦}$

(ب) (١) $= \frac{١١-٦+١}{٦} = ١$ الجواب (د)

حل آخر $= \frac{{}^{١٢}ق_{٥}}{{}^{١٢}ق_{٥}} = ١$ الجواب (د)

(٢) $١٥ + ٥ = ٢٠$ الجواب (ب)

(٣) $ن(ن-١)(ن-٢) = ٩٠ن$

$\therefore {}^{ن-١}ل_{٢} = ٩٠ = ١٠ × ٩ = {}^{١٠}ل_{٢}$

$\therefore ن - ١ = ١٠ \quad \therefore ن = ١١$ الجواب (ج)

(٤) ${}^{ن}ل_{ر} = ٢٤ × \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$

$\therefore \underline{|ر} = ٢٤ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ = \underline{|٤}$

$\therefore ر = ٤$ الجواب (أ)

---

[٢] (أ) الأيمن $= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} ÷ \frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-١-ر+١}}$

$= \frac{ن\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-ر}} × \frac{\underline{|ن-ر}}{\underline{|ن-١}} = ن =$ الأيسر

$\therefore \frac{{}^{ن}ل_{٥}}{{}^{ن}ل_{٤}} = ٣$

$\therefore ن = ٧$

(ب) ∵ ${}^{ن}ق_{ر} = 1$

عندما ن = ر

${}^{ن+4}ق_{ن+2} = 28$

∴ ${}^{ن+4}ق_{2} = 28$

∴ $\frac{{}^{ن+4}ل_{2}}{2\times 1} = 28$

${}^{ن+4}ل_{2} = 56 = 8 \times 7 = {}^{8}ل_{2}$

∴ ن + 4 = 8

∴ ن = 4 ، ر = 4

∴ ن = ر أو ر = 0

عندما ر = 0

∴ ن + 4

${}^{ن+4}ق_{2} = 28$

$\frac{{}^{ن+4}ل_{2}}{2\times 1} = 28$

${}^{ن+4}ل_{2} = 56 = 8 \times 7 = {}^{8}ل_{2}$

∴ ن + 4 = 8

∴ ن = 4 ، ر = 0

---

[2] (أ) بقسمة الطرفين على ${}^{ن+1}ق_{10}$

∴ $\frac{{}^{ن+1}ق_{11}}{{}^{ن+1}ق_{10}} > 1$ ∴ $\frac{ن+1-11+1}{11} > 1$

∴ ن − 9 > 11 ∴ ن > 20

(ب) ∵ $\frac{{}^{ن+1}ق_{8}}{{}^{ن+1}ق_{7}} = 2$ ∴ $\frac{ن+1-8+1}{8} = \frac{2}{1}$

∴ ن − 6 = 16 ∴ ن = 22

الإختبار الثاني

[1] (أ) (1) $1\times 2\times 3\times 4\times 5 = \lfloor 5$ ∴ ن = 5

(2) $\frac{(ن+3)(ن+2)\lfloor ن+1}{\lfloor ن+1} = (ن+3)(ن+2)$

$= ن^2 + 5ن + 6$

(3) ${}^{25}ق_{22} = {}^{25}ق_{3} = \frac{25\times 24\times 23}{3\times 2\times 1} = 2300$

(4) ${}^{36}ق_{34} = {}^{36}ق_{2} = \frac{36\times 35}{2\times 1} = 630$

(ب) (1) $\frac{7\times 6\times 5\times 4}{5\times 4} = 42$ الجواب (أ)

(2) ∴ $10\times 9\times 8\times 7 = {}^{10}ل_{4}$ ∴ ر = 4 ∴ $\lfloor ر = \lfloor 4$

$= 4\times 3\times 2\times 1 = 24$ الجواب (ب)

(3) $= {}^{37}ق_{ن} - {}^{37}ق_{ن} =$ صفر الجواب (أ)

(4) ∴ ن > 15 ، ن < 17 ∴ 15 < ن < 17 ∴ ن = 16

الجواب (ب)

---

[2] (أ) (1) $\lfloor 20\ ن = (ن+2)(ن+1)\lfloor ن$

∴ ${}^{ن+2}ل_{2} = 20 = 5 \times 4 = {}^{5}ل_{2}$

∴ ن + 2 = 5 ∴ ن = 5 − 2 ∴ ن = 3

(2) $(ن+2)(ن+1) \times {}^{ن}ل_{2} = 72 \times {}^{ن}ل_{2}$

∴ ${}^{ن+2}ل_{2} = 72 = 9 \times 8 = {}^{9}ل_{2}$ ∴ ن + 2 = 9 ن = 7

(ب) ∵ ${}^{ن}ق_{ر+2} : {}^{ن}ق_{ر+4} = 4 : 4$

∴ ${}^{ن}ق_{ر+2} = {}^{ن}ق_{ر+4}$ ∴ ن = 2ر + 6 ----- (1)

، ∵ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+2}}{{}^{ن}ق_{ر+1}} = \frac{4}{3}$ ∴ $\frac{ن-(ر+2)+1}{ر+2} = \frac{4}{3}$ من (1)

$\frac{2ر+6-ر-2+1}{ر+2} = \frac{4}{3}$ ∴ 3 (ر+5) = 4 (ر+2)

∴ 4ر + 8 = 3ر + 15 ∴ ر = 7

من (1) ∴ ن = 2 × 7 + 6 ن = 20

---

[3] (أ) ∴ $2 \times {}^{ن}ق_{5} = {}^{ن}ق_{4} + {}^{ن}ق_{6}$ بقسمة الطرفين على ${}^{ن}ق_{5}$

$2 = \frac{{}^{ن}ق_{4}}{{}^{ن}ق_{5}} + \frac{{}^{ن}ق_{6}}{{}^{ن}ق_{5}}$

$2 = \frac{5}{ن-5+1} + \frac{ن-6+1}{6}$

$2 = \frac{5}{ن-4} + \frac{ن-5}{6}$ بالضرب × 6 (ن − 4)

∴ 12ن − 48 = 30 + (ن − 4) (ن − 5)

12ن − 48 = 30 + ن² − 9ن + 20 ∴ ن² − 21ن + 98 = 0

، (ن−7) (ن − 14) = 0 ∴ ن = 7 أو ن = 14

(ب) ∴ $\frac{{}^{ن+1}ق_{9}}{{}^{ن+1}ق_{8}} = \frac{2}{1}$ ∴ $\frac{ن+1-9+1}{9} = \frac{2}{1}$

ن − 7 = 18 ∴ ن = 25

تمارين (٢) نظرية ذي الحدين

المجموعة الأولى:

أ) أكمل ما يأ . :

١) $ن + ١ = ١٤ \therefore ن = ١٣$

٢) $٧ + ١ = ٨$ حدود

٣) $(٣ - ٤)^{٥} = -١$

٤) $^{٥}ق_{٢} - {}^{٥}ق_{٣} =$ صفر

٥) ٠٫٠٠١

٦) ٠٫٠٠٣

٧) $ن = ١٢$

٨) $ن = ١٣$

٩) $ح_{٤} = ٢٠ \times \frac{١}{٦٤} \times أ^{٣} = \frac{٥}{٢} \quad \therefore أ = ٢$

١٠) $ح_{٥} = ح_{٦} \therefore {}^{٩}ق_{٤} \times ب^{٤} \times ٢^{٥}$

$= {}^{٩}ق_{٥} \times ب^{٥} \times ٢^{٤} \quad \therefore ب = ٢$

١١) $^{١٢}ق_{٤} = ٤٩٥$

١٢) $^{٦}ق_{٢} \left(-\frac{١}{س}\right)^{٢} (٢س)^{٤} = ٢٤٠ س^{٢}$

ب) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) $س^{٨}$

٢) $(١ + س)^{٧} = ٣^{٧} \therefore س = ٣ - ١ = ٢$

٣) $- {}^{١١}ق_{٧}$

٤) $(٥ - ٣)^{٦} = ٦٤$

٥) $^{٦}ق_{٣} \times \left(\frac{٣}{س}\right)^{٣} \times \left(\frac{س}{٣}\right)^{٣} = ٢٠$

٦) $٣ن - ١ = ١٤ \therefore ن = ٥$.

٧) $(٢أ - ٣أ)^{٧} = (-أ)^{٧} = -أ^{٧}$

٨) $- {}^{٩}ق_{٥}$

٩) $٨٤ \times ٨ \times س^{٣} = \frac{٢١}{١٦} \quad \therefore س = \frac{١}{٨}$

١٠) $١٠ س = ٤٠ \therefore س = ٤$.

١١) $١٢٨ = ١٤ ص^{٢} \therefore ص = \pm ٣$

إجابات مفكوك ذي الحدين :

المجموعة الثانية:

(١) $(أ + ب)^{٧} = أ^{٧} + {}^{٧}ق_{١} أ^{٦} ب + {}^{٧}ق_{٢} أ^{٥} ب^{٢} + {}^{٧}ق_{٣} أ^{٤} ب^{٣} + {}^{٧}ق_{٤} أ^{٣} ب^{٤} + {}^{٧}ق_{٥} أ^{٢} ب^{٥} + {}^{٧}ق_{٦} أ ب^{٦} + ب^{٧} = أ^{٧} + ٧ أ^{٦} ب + ٢١ أ^{٥} ب^{٢} + ٣٥ أ^{٤} ب^{٣} + ٣٥ أ^{٣} ب^{٤} + ٢١ أ^{٢} ب^{٥} + ٧أ ب^{٦} + ب^{٧}$

(٢) $(س - أ)^{٦} = س^{٦} - {}^{٦}ق_{١} أ س^{٥} + {}^{٦}ق_{٢} أ^{٢} س^{٤} - {}^{٦}ق_{٣} أ^{٣} س^{٣} + {}^{٦}ق_{٤} أ^{٤} س^{٢} - {}^{٦}ق_{٥} أ^{٥} س + أ^{٦} = س^{٦} - ٦أ س^{٥} + ١٥ أ^{٢} س^{٤} - ٢٠ أ^{٣} س^{٣} + ١٥ أ^{٤} س^{٢} - ٦ أ^{٥} س + أ^{٦}$

(٣) $(٢أ + ٣ب)^{٥} = (٢أ)^{٥} + {}^{٥}ق_{١} (٢أ)^{٤} (٣ب) + {}^{٥}ق_{٢} (٢أ)^{٣} (٣ب)^{٢} + {}^{٥}ق_{٣} (٣ب)^{٣} (٢أ)^{٢} + {}^{٥}ق_{٤} (٣ب)^{٤} (٢أ) + (٣ب)^{٥} = ٣٢ أ^{٥} + ٢٤٠ أ^{٤} ب + ٧٢٠ أ^{٣} ب^{٢} + ١٠٨٠ أ^{٢} ب^{٣} + ٨١٠ أ ب^{٤} + ٢٤٣ ب^{٥}$

(٤) $(٣س - ٢ص)^{٤} = (٣س)^{٤} - {}^{٤}ق_{١} (٣ - س)^{٣} (٢ص) + {}^{٤}ق_{٢} (٣س)^{٢} (٢ص)^{٢} - {}^{٤}ق_{٣} (٣س) (٢ص)^{٣} + (٢ص)^{٤} = ٨١ س^{٤} - ٢١٦ س^{٣} ص + ٢١٦ س^{٢} ص^{٢} - ٩٦ س ص^{٣} + ١٦ ص^{٤}$

(٥) $\left(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س}\right)^{٦} = \left(\frac{س}{٢}\right)^{٦} - ٦ \left(\frac{س}{٢}\right)^{٥} \left(\frac{٣}{س}\right) + \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} \left(\frac{س}{٢}\right)^{٤} \left(\frac{٣}{س}\right)^{٢} - \left(\frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١}\right) \left(\frac{س}{٢}\right)^{٣} \left(\frac{٣}{س}\right)^{٣} + \left(\frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}\right) \left(\frac{س}{٢}\right)^{٢} \left(\frac{٣}{س}\right)^{٤} - ٦ \left(\frac{س}{٢}\right) \left(\frac{٣}{س}\right)^{٥} + \left(\frac{٣}{س}\right)^{٦} = \frac{س^{٦}}{٦٤} - \frac{٩}{١٦} س^{٤} + \frac{١٣٥}{١٦} س^{٢} - \frac{١٣٥}{٢} + \frac{١٢١٥}{٤ س^{٢}} - \frac{٧٢٩}{٤ س^{٤}} + \frac{٧٢٩}{س^{٦}}$

... ($\frac{١}{\sqrt{٢}\,س}$)^{٥} = (٢س)^{٥} + ^{٥}ق ($\frac{١}{\sqrt{٢}\,س}$) (٢س)^{٤} + ^{٥}ق (

$\frac{١}{\sqrt{٢}\,س}$)^{٢} (٢س)^{٣} + ^{٥}ق ($\frac{١}{\sqrt{٢}\,س}$)^{٣} (٢س)^{٢} + ^{٥}ق ($\frac{١}{\sqrt{٢}\,س}$)^{٤}

... ($\frac{١}{\sqrt{٢}\,س}$)^{٥} = ٣٢ س^{٥} + ٤٠ $\sqrt{٢}$ س^{٣} $\sqrt{س}$ + ٤٠ س^{٢} + ١٠

... + $\frac{٥}{٢}$ س$^{-١}$ + $\frac{\sqrt{٢}}{٨}$ س$^{-\frac{٥}{٢}}$

... = [($\sqrt{٢}$)^{٢} − ($\sqrt{٢س}$)^{٢}]^{٦} = (٣ − ٢ س)^{٦} = (٣)^{٦} − ^{٦}ق

... (٢) ... + ^{٦}ق (٢س)^{٢} (٣)^{٤} − ^{٦}ق (٢س)^{٣} (٣)^{٣} + ^{٦}ق (٢س)^{٤} (٣)^{٢}

... (٢س)^{٥} (٣) + (٢س)^{٦} = ...

... = [(٢)^{٢} − ($\sqrt{٣ - س^{٢}}$)^{٢}]^{٥} = (٤ − ٣ + س)^{٥} = (١ + س)^{٥}

١ + ^{٥}ق س + ^{٥}ق س^{٢} + ^{٥}ق س^{٣} + ^{٥}ق س^{٤} + ^{٥}ق س^{٥} = ١ + ٥س

... ١٠س^{٢} + ١٠س^{٣} + ٥س^{٤} + س^{٥}

(١,٠٢)^{١٠} = (١ + ٠,٠٢)^{١٠} = ١ + ١٠ (٠,٠٢) + $\frac{١٠\times٩}{٢\times١}$

(٠,٠٢)^{٢} + $\frac{١٠\times٩\times٨}{٣\times٢\times١}$ (٠,٠٢)^{٣} + ...

= ١ + ٠,٢ + ٠,٠١٨ + ٠,٠٠٠٩٦٠ = ١,٢١٨٩٦ ≈ ١,٢١٩

---

(١٠) (٠,٩٩)^{٧} = (١ − ٠,٠١)^{٧}

= ١ − ^{٧}ق (٠,٠١)^{١} + ^{٧}ق (٠,٠١)^{٢} − ^{٧}ق (٠,٠١)^{٣} + ...

= ١ − ٠,٠٧ + ٠,٠٠٢١ − ٠,٠٠٠٠٣٥ ≈ ٠,٩٣٢

---

(١١) (٠,٩٦)^{٥} = (١ − ٠,٠٤)^{٥}

= ١ − ٥ (٠,٠٤)^{١} + $\frac{٥\times٤}{٢\times١}$ (٠,٠٤)^{٢} − $\frac{٥\times٤\times٣}{٣\times٢\times١}$ (٠,٠٤)^{٣}

= ١ − ٠,٢٠ + ٠,٠١٦٠ − ٠,٠٠٠٦٤٠

= ٠,٨١٥٣٦٠ ≈ ٠,٨١٥

---

(١٢) (س + ٢)^{٦} = س^{٦} + ٦ × ٢ س^{٥} + $\frac{٦\times٥}{٢\times١}$ (٢)^{٢} س^{٤} +

$\frac{٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١}$ (٢)^{٣} س^{٣} + $\frac{٦\times٥}{٢\times١}$ (٢)^{٤} س^{٢} + ٦ (٢)^{٥} س + (٢)^{٦} =

س^{٦} + ١٢س^{٥} + ٦٠س^{٤} + ١٦٠س^{٣} + ٢٤٠س^{٢} + ١٩٢ س + ٦٤ .. (١)

($\frac{٢٠١}{١٠٠}$)^{٦} = (٠,٠١ + ٢)^{٦} وبالتعويض في (١) من س = ٠,٠١

($\frac{٢٠١}{١٠٠}$)^{٦} ≈ ٦٤ + ١٩٢ × ٠,٠١ + ٢٤٠ (٠,٠١)^{٢} + ..

≈ ٦٤ + ١,٩٢ + ٠,٠٢٤٠ ≈ ٦٥,٩٤٤

---

(١٣) (٢س − ٣ص)^{٥} = (٢س)^{٥} − ٥ (٢س)^{٤} (٣ص) + $\frac{٥\times٤}{٢\times١}$ (٢س)^{٣}

(٣ص)^{٢} − $\frac{٥\times٤}{٢\times١}$ (٢س)^{٢} (٣ص)^{٣} + ٥ (٢س) (٣ص)^{٤} + (٣ص)^{٥} = ٣٢

س^{٥} − ٢٤٠ س^{٤} ص + ٧٢٠ س^{٣} ص^{٢} − ١٠٨٠ س^{٢} ص^{٣} + ٨١٠ س ص^{٤} +

٨١ ص^{٥} .. (١)

(١,٩٧)^{٥} = (٢ × ١ − ٣ × ٠,٠١)^{٥} وبوضع س = ١ ، ص = ٠,٠١ في (١)

∴ (١,٩٧)^{٥} = ٣٢ × ١ − ٢٤٠ (١)^{٤} × ٠,٠١ + ٧٢٠ (١)^{٣} (٠,٠١)^{٢} −

١٠٨٠ (١)^{٢} (٠,٠١)^{٣} + ..

= ٣٢ − ٢,٤ + ٠,٠٧٢٠ - ٠,٠٠١٠٨٠ = ٢٩,٦٧٠٩٢ ≈ ٢٩,٦٧١

---

(١٤) الطرف الأيمن = مفكوك (١ + س)^{٧} = ٣^{٧}

∴ ١ + س = ٣ ∴ س = ٢

---

(١٥) المفكوك = [(١ − س) + ٢ س]^{٨} = (١ + س)^{٨} = ٠

∴ ١ + س = ٠ ∴ س = -١

---

(١٦) المقدار = ٢ح$_{١}$ + ٢ح$_{٣}$ + ٢ح$_{٥}$ في المفكوك الأول = ٢ (١ + ^{٤}ق

($\sqrt{٥}$)^{٢} + ^{٤}ق ($\sqrt{٥}$)^{٤}] = ١١٢

---

(١٧) المقدار = ٢ [ح$_{٢}$ + ح$_{٤}$ + ح$_{٦}$) في أول مفكوك = ٢ [^{٥}ق (٢$\sqrt{٢}$)^{١}

(٢$\sqrt{٣}$)^{٤} + ^{٥}ق (٣$\sqrt{٢}$)^{٣} (٢$\sqrt{٣}$)^{٢} + (٣$\sqrt{٢}$)^{٥}] = ٢ (٢١٦٠ $\sqrt{٢}$ +

٣٢٠ $\sqrt{٢}$ + ٧٦٨ $\sqrt{٢}$) = ٢٢٠٠ $\sqrt{٢}$

---

(١٨) المقدار = ٢ ح^{٢} + ٢ ح^{٤} + ٢ ح^{٦} في أول مفكوك = ٢ [^{٥}ق

(٣$\sqrt{٢}$)^{١} (٢$\sqrt{٣}$)^{٤} + ^{٥}ق (٣$\sqrt{٢}$)^{٣} (٢$\sqrt{٣}$)^{٢} + (٣$\sqrt{٢}$)^{٥}] = ٢(٢١٦٠ $\sqrt{٢}$

+ ٦٤٨٠ $\sqrt{٢}$ + ٩٧٢ $\sqrt{٢}$) = ١٩٢٢٤ $\sqrt{٢}$

---

(١٩) (١,٠٢)^{١٢} + (٠,٩٨)^{١٢} = (١ + ٠,٠٢)^{١٢} + (١ − ٠,٠٢)^{١٢}

= ٢ ح$_{١}$ + ٢ ح$_{٣}$ + ٢ ح$_{٥}$ + ...

= ٢ × ١ + ٢ × $\frac{١٢\times١١}{٢\times١}$ × ٠,٠٠٠٤ + ...

= ٢ + ٠,٠٥٢٨ − .. = ٢,٠٥٣

---

(٢٠) (١ + ٠,٠٠٣)^{٦} − (١ − ٠,٠٠٣)^{٦} = ٢ ح$_{٢}$ + ٢ ح$_{٤}$ + ..

= ٢ × ٦ × ٠,٠٠٣ + .. = ٠,٠٣٦

---

(٢١) ٢ (ح$_{١}$ + ح$_{٣}$ + ح$_{٥}$) = ١٦

∴ س٤ + ^{٤}ق س^{٢} + ١ = ٨ ∴ س^{٤} + ٦س^{٢} − ٧ = ٠

∴ (س^{٢} + ٧) (س^{٢} − ١) = ∴ س^{٢} = صفر

∴ س = ± ١ ، س^{٢} = -٧ مرفوض

---

(٢٢) الطرف الأيمن = ٢ (ح$_{٢}$ + ح$_{٤}$ + ح$_{٦}$) = ٥٦٠ س $\sqrt{٢}$

∴ ^{٦}ق ($\sqrt{٢}$)^{١} س^{٥} + ^{٦}ق ($\sqrt{٢}$)^{٣} س^{٣} + ^{٦}ق ($\sqrt{٢}$)^{٥} س = ٢٨٠ س $\sqrt{٢}$

∴ ٦ $\sqrt{٢}$ س^{٥} + ٤٠ $\sqrt{٢}$ س^{٣} + ٢٤ $\sqrt{٢}$ س = ٢٨٠ س $\sqrt{٢}$

$\therefore 2\text{س}(3\text{س}^4 + 20\text{س}^2 - 128) = 0$

$\therefore \text{س}(3\text{س}^2 + 32)(\text{س}^2 - 4) = 0 \quad \therefore \text{س} = 0$ أ، $\text{س} = \pm 2$

(٢٣) $(1+\text{س})^8 = {}^8\text{ق}_0(\text{س})^0 + {}^8\text{ق}_1\text{س}^1 + {}^8\text{ق}_2\text{س}^2 + {}^8\text{ق}_3\text{س}^3 + \cdots$

وبوضع س = ١ في طرفي المتطابقة

$\therefore {}^8\text{ق}_0 + {}^8\text{ق}_1 + {}^8\text{ق}_2 + \cdots + {}^8\text{ق}_8 = (1+1)^8 = 256$

وبوضع س = -١ في طرفي المتطابقة

$\therefore {}^8\text{ق}_0 - {}^8\text{ق}_1 - {}^8\text{ق}_2 + \cdots - {}^8\text{ق}_8 = (1-1)^8 = \text{صفر}$

وبوضع س = ٢ في طرفي المتطابقة

$\therefore {}^8\text{ق}_0 + 2\,{}^8\text{ق}_1 + 4\,{}^8\text{ق}_2 + 8 \times {}^8\text{ق}_3 + \cdots + 256\,{}^8\text{ق}_8 = (2+1)^8 =$

$3^8 = 6561$

إجابات الحد العام والحد الأوسط في مفكوك ذي الحدين :

(١) $\text{ح}_5 = {}^8\text{ق}_4(2\text{س})^4 = 1120\,\text{س}^4$، $\text{ح}_7 = {}^{10}\text{ق}_6(-1)^6(2\text{س})^4 = 3360\,\text{س}^4$

(٢) $\text{ح}_4 = {}^6\text{ق}_3\,\text{س}^3(2)^3 = 160\,\text{س}^3$،

$\text{ح}_6 = {}^9\text{ق}_5\left(-\frac{\text{س}}{3}\right)^5(\sqrt{3})^4 = -\frac{14}{3}\text{س}^5$

(٣) $\text{ح}_5 = {}^8\text{ق}_4\left(-\frac{\text{ص}}{2}\right)^4(\sqrt{\text{س}})^4 = \frac{35}{8}\text{س}^2\text{ص}^4$،

$\text{ح}_7 = {}^9\text{ق}_6\left(-\frac{1}{3\text{س}}\right)^6\left(\frac{3}{2}\text{س}^2\right)^3 = \frac{7}{18}$

(٤) معامل $\text{ح}_4 = {}^8\text{ق}_3(3)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{189}{4}$

(٥) (أ) الرتبة $= \frac{12+2}{2} = 7$

$\therefore \text{ح}_7 = {}^{12}\text{ق}_6(-\text{س})^6 = 924\,\text{س}^6$

(ب) الرتب هي $\frac{9+1}{2}$ ، $\frac{9+3}{2}$ أي ٥ ، ٦

$\therefore \text{ح}_5 = {}^9\text{ق}_4(\text{س}\sqrt{2})^4 = 504\,\text{س}^4$ ، $\text{ح}_6 = {}^9\text{ق}_5(\text{س}\sqrt{2})^5 = 504\sqrt{2}\,\text{س}^5$

(٦) (أ) الرتبة $= \frac{10+2}{2} = 6 \quad \therefore \text{ح}_6 = {}^{10}\text{ق}_5\left(\frac{2}{\text{س}}\right)^5\text{س}^5 = 8064$

(ب) الرتب هي $\frac{15+1}{2}$ ، $\frac{15+3}{2}$ أي ٨ ، ٩

$\therefore \text{ح}_8 = {}^{15}\text{ق}_7\left(\frac{3}{\text{س}}\right)^7\left(\frac{\text{س}^2}{3}\right)^8 = 2145\,\text{س}^9$ ،

$\text{ح}_9 = {}^{15}\text{ق}_8\left(\frac{3}{\text{س}}\right)^8\left(\frac{\text{س}^2}{3}\right)^7 = 19305\,\text{س}^6$

(٧) $\frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_9} = \frac{{}^{14}\text{ق}_6(-1)^6(3\text{س})^8}{{}^{16}\text{ق}_8(3)^8\text{س}^8} = \frac{7}{30}$

(٨) الحد الأوسط رتبة $\frac{10+2}{2} = 6$

$\therefore \frac{\text{ح}_6}{\text{ح}_4} = \frac{{}^{10}\text{ق}_5\left(\frac{3}{2\text{س}}\right)^5\left(\frac{2\text{س}}{3}\right)^5}{{}^{10}\text{ق}_3\left(\frac{3}{2\text{س}}\right)^3\left(\frac{2\text{س}}{3}\right)^7} = \frac{3^4}{(2\text{س})^4} \times \frac{42}{20} = \frac{21}{160}$

عندما س = ٣

(٩) $\text{ح}_5 = {}^7\text{ق}_4\,\text{أ}^4\,\text{ص}^4\,\text{س}^3$

$\therefore \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\text{أ}^4 = 560$

$\therefore \text{أ}^4 = 16 = (\pm2)^4 \quad \therefore \text{أ} = \pm 2$

(١٠) الحد الأوسط $= \text{ح}_5 = {}^8\text{ق}_4\left(\frac{2}{3\text{س}}\right)^4(3\text{س}^2)^4$

$= 70 \times 16\,\text{س}^4 = 17920 \quad \therefore \text{س}^4 = 16$

$\therefore \text{س}^4 = (\pm2)^4 \quad \therefore \text{س} = \pm 2$

(١١) الحدان الأوسطان هما ح_7 ، ح_8 $\therefore \frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_7} = 1$

$\therefore \frac{{}^{13}\text{ق}_7(2\text{ص})^7(3\text{س})^6}{{}^{13}\text{ق}_6(2\text{ص})^6(3\text{س})^7} = \frac{13-7+1}{7} \times \frac{2\text{ص}}{3\text{س}} = 1$

$\therefore 2\,\text{ص} = 3\,\text{س}$

(١٢) الحد الأوسط هو ح_6 $\therefore \frac{\text{ح}_9}{\text{ح}_6} = \frac{{}^{10}\text{ق}_8\,\text{س}^8}{{}^{10}\text{ق}_5\,\text{س}^5} = \frac{10}{7}$

$\therefore \frac{\frac{10\times9}{2\times1}\text{س}^3}{\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}} = \frac{10}{7}$

$\therefore \frac{10\,\text{س}^3}{8\times7} = \frac{10}{7} \quad \therefore \text{س} = 2$

(١٣) رتبتا الحدين الأوسطين $\frac{2\text{ن}+2}{2}$ ، $\frac{2\text{ن}+4}{2}$ أي ن + ١، ن + ٢

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ن}+2}}{\text{ح}_{\text{ن}+1}} = \frac{{}^{2\text{ن}+1}\text{ق}_{\text{ن}+1}\,\text{ب}^{\text{ن}+1}(\text{أس})^{\text{ن}}}{{}^{2\text{ن}+1}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{ن}}(\text{أس})^{\text{ن}+1}} = 1$

$\therefore \frac{(2\text{ن}+1)-(\text{ن}+1)+1}{\text{ن}+1} \times \frac{\text{ب}}{\text{أس}} = 1$

$\therefore \text{ب} = \text{أ}\,\text{س} \quad \therefore \text{س} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

(١٤) $\dfrac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5} = \dfrac{{}^{15}\text{ق}_5\,(\frac{1}{\text{س}})^5\,\text{س}^{10}}{{}^{14}\text{ق}_4\,(-\frac{1}{\text{س}^2})^4\,\text{س}^{10}} = \dfrac{8}{9}$

$\therefore \dfrac{\lfloor 15}{\lfloor 10 \lfloor 5} \times \dfrac{1}{\text{س}^5} \times \dfrac{\lfloor 4 \lfloor 10 \times \text{س}^8}{\lfloor 14} = \dfrac{8}{9}$

$\therefore \dfrac{3}{2}\text{س}^3 = \dfrac{8}{9} \therefore \text{س}^3 = \dfrac{8}{27} \therefore \text{س} = \dfrac{2}{3}$

---

(١٥) $\dfrac{\text{ح}_6}{\text{ح}_8} = \dfrac{{}^{9}\text{ق}_5\,\text{أ}^5(2\text{س})^4}{{}^{9}\text{ق}_7\,(2)^7(\text{أس}^2)^2} = \dfrac{7}{54}$

$\therefore \dfrac{\lfloor 9 \times \text{أ}^5 \times 16\,\text{س}^4}{\frac{\lfloor 4 \lfloor 5 \times \lfloor 9}{\lfloor 2 \lfloor 7} \times 128\,\text{أ}^2\,\text{س}^4} = \dfrac{7}{54}$

$\therefore \dfrac{210\,\text{أ}^3}{60 \times 8} = \dfrac{7}{54} \therefore \text{أ}^3 = \dfrac{8}{27} \therefore \text{أ} = \dfrac{2}{3}$

---

(١٦) المقدار = مفكوك $(1+\text{س}+\text{س})^6 = (1+2\text{س})^6$

$\therefore$ الحد الأوسط = $\text{ح}_4 = {}^{6}\text{ق}_3\,(2\text{س})^3 = 16\,\text{س}^3$

---

(١٧) رتبة الحد الأوسط = $\dfrac{2\text{ن}+1}{2} = \text{ن} + 1$

$\therefore \text{ح}_{\text{ن}+1} = {}^{2\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \dfrac{\lfloor 2\text{ن}}{\lfloor \text{ن} \lfloor \text{ن}}$

$= \dfrac{2\text{ن}(2\text{ن}-1)(2\text{ن}-2)\cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\,\text{ب}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن} \times \lfloor \text{ن}}$

$= \dfrac{(2\text{ن}-1)\times\cdots\times 3\times 1}{\lfloor \text{ن}} \times \dfrac{\text{ن}(\text{ن}-1)\times\cdots\times 2\times 1}{\lfloor \text{ن}}\,2^{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$

$= \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\text{ن}-1)}{\lfloor \text{ن}} \times 2^{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$

---

(١٨) $\text{ح}_2 = {}^{\text{ن}}\text{ق}_1\,\text{س} = \text{ن}\,\text{س} = -\dfrac{10}{3}$ .. (١) ،

$\text{ح}_3 = {}^{\text{ن}}\text{ق}_2\,\text{س}^2 = \dfrac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1}\text{س}^2 = \dfrac{40}{9}$ .. (٢)

وبتربيع (١) $\therefore \text{ن}^2\text{س}^2 = \dfrac{100}{9}$ .. (٣) وبالقسمة ÷ (١)

$\therefore \dfrac{\text{ن}^2 \times 2}{\text{ن}(\text{ن}-1)} = \dfrac{100}{9} \times \dfrac{9}{40}$

$\therefore \dfrac{\text{ن}}{\text{ن}-1} = \dfrac{5}{4} \therefore \text{ن} = 5$

ومن (١) $\therefore 5\,\text{س} = -\dfrac{10}{3} \therefore \text{س} = \dfrac{-2}{3}$

$\therefore \text{ح}_4 = {}^{5}\text{ق}_3\,(-\dfrac{2}{3})^3 = -\dfrac{80}{27}$

---

(١٩) $\text{ح}_3 = {}^{\text{ن}}\text{ق}_2\,\text{س}^2 = 28\,\text{س}^2 \therefore \dfrac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1} = 28$

$\therefore \text{ن}^2 - \text{ن} - 56 = 0 \therefore (\text{ن}-8)(\text{ن}+7) = 0$

$\therefore \text{ن} = 8$ ، $\text{ح}_5 = {}^{8}\text{ق}_4\,\text{س}^4 = 1120$

$\therefore \dfrac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1}\text{س}^4 = 1120 \therefore \text{س}^4 = 16 \therefore \text{س} = \pm 2$

---

(٢٠) $\text{ح}_2 = {}^{\text{ن}}\text{ق}_1\,(-\text{م}\,\text{س})^1 = -\dfrac{1}{4}\text{س} \therefore \text{ن}\,\text{م} = \dfrac{1}{4}$ .. (١)

، $\text{ح}_3 = {}^{\text{ن}}\text{ق}_2\,(-\text{م}\,\text{س})^2 = \dfrac{3}{100}\text{س}^2 = \dfrac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1}\text{م}^2\,\text{س}^2$

$\therefore \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{م}^2 = \dfrac{3}{50}$ ... (٢)

وبتربيع معادلة (١) $\therefore \text{ن}^2\,\text{م}^2 = \dfrac{1}{16}$ وبالقسمة ÷ (٢)

$\therefore \dfrac{\text{ن}^2\,\text{م}^2}{\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{م}^2} = \dfrac{1}{16} \times \dfrac{50}{3} \therefore \dfrac{\text{ن}}{\text{ن}-1} = \dfrac{25}{24} \therefore \text{ن} = 25$

ومن (١) $\therefore 25\,\text{م} = \dfrac{1}{4} \therefore \text{م} = \dfrac{1}{100}$

---

(٢١) $13 \times {}^{15}\text{ق}_2\,(-3)^2\,(2\text{س})^{13} + 10 \times {}^{15}\text{ق}_3\,(-3)^3\,(2\text{س})^{12} + {}^{15}\text{ق}_4$

$(-3)^4\,(2\text{س})^{11} = 0$ وبالقسمة على $(2\text{س})^{11}$ $(\text{س} \neq 0)$

$\therefore 13 \times \dfrac{15\times 14}{2\times 1} \times 9 \times 4\,\text{س}^2 - 10 \times \dfrac{15\times 14\times 13}{3\times 2\times 1} \times 27 \times$

$2\text{س} + \dfrac{15\times 14\times 13\times 12}{4\times 3\times 2\times 1} \times 81 = 0 \therefore 4\text{س}^2 - 20\text{س} + 9 = 0$

$\therefore (2\text{س} - 9)(2\text{س} - 1) = 0 \therefore \text{س} = \dfrac{9}{2}$ أ، $\dfrac{1}{2}$

أجابات معامل $(\text{س}^{\text{ر}})$ والحد الخالي من (س) في مفكوك ذات الحدين :

(١) $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\,(-\dfrac{1}{\text{س}})^{\text{ر}}\,\text{س}^{10-\text{ر}} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\,(-1)^{\text{ر}}\,\text{س}^{10-2\text{ر}}$

$\therefore 10 - 2\text{ر} = 0 \therefore \text{ر} = 5 \therefore$ الخالي $= \text{ح}_6 = (-1)^5 \times {}^{10}\text{ق}_5 = -252$

---

(٢) $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\dfrac{2}{3\text{س}})^{\text{ر}}\,(\dfrac{3\text{س}}{2})^{11-\text{ر}} =$

$= {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\dfrac{2}{3})^{\text{ر}}\,(\dfrac{3}{2})^{11-\text{ر}}\,\text{س}^{11-2\text{ر}}$ ... (١)

ثم نضع $11 - 2\text{ر} = 1 \therefore \text{ر} = 5$ وبالتعويض في (١)

$\therefore$ معامل س $= {}^{11}\text{ق}_5\,(\dfrac{2}{3})^5\,(\dfrac{3}{2})^6 = 693$

(٣) $ح_{ر+1} = {}^{9}ق_{ر} \left(-\frac{1}{3س}\right)^{ر} \left(\frac{3}{2}س^2\right)^{9-ر}$

$= {}^{9}ق_{ر} \left(-\frac{1}{3}\right)^{ر} \left(\frac{3}{2}\right)^{9-ر} س^{18-3ر}$

ثم نضع ١٨ - ٣ر = صفر ∴ ر = ٦

∴ الحد الخالي = $ح_7 = {}^{9}ق_6 \left(-\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{7}{18}$

---

(٤) $ح_{ر+1} = {}^{8}ق_{ر} \left(-\frac{3}{س^2}\right)^{ر} \left(\frac{س^2}{2}\right)^{8-ر}$

$= {}^{8}ق_{ر} (3)^{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{8-ر} س^{16-4ر}$ ثم نضع ١٦ - ٤ر = ٤ ∴ ر = ٣

∴ معامل $س^4$ هو ${}^{8}ق_3 (3)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{189}{4}$ ثم نضع ١٦ - ٤ر = صفر ∴ ر = ٤ ∴ الحد الخالي = ${}^{8}ق_4 (3)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2835}{8}$

---

(٥) $ح_{ر+1} = س^4 \times {}^{15}ق_{ر} \left(\frac{2}{س^3}\right)^{ر} \left(\frac{س^2}{2}\right)^{15-ر}$

$= {}^{15}ق_{ر} (2)^{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{15-ر} س^{34-5ر}$ ثم نضع ٣٤ - ٥ر = ١٤ ∴ ر = ٤

∴ المعامل = ${}^{15}ق_4 (2)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1365}{128}$

---

(٦) $ح_{ر+1} = س^9 \times {}^{13}ق_{ر} \left(-\frac{1}{س^3}\right)^{ر} (س^2)^{13-ر}$

$= (-1)^{ر} \times {}^{13}ق_{ر} س^{35-5ر}$ ثم نضع ٣٥ - ٥ر = ٠ ∴ ر = ٧

∴ الحد الخالي = $(-1)^7 \times {}^{13}ق_7 = -1716$

---

(٧) $ح_{ر+1} = س^{\frac{7}{2}} \times {}^{10}ق_{ر} \left(-\frac{1}{س}\right)^{ر} \left(س^{\frac{1}{2}} 2\right)^{10-ر}$

$= (-1)^{ر} \times {}^{10}ق_{ر} (2)^{10-ر} س^{\frac{17}{2}-\frac{3}{2}ر}$

ثم نضع $\frac{17}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ ∴ ر = ٦

∴ المعامل = $(-1)^6 \times {}^{10}ق_6 (2)^4 = 3360$

---

(٨) $ح_{ر+1} = \frac{2}{س^3} {}^{9}ق_{ر} \left(-\frac{س^2}{3}\right)^{ر} \left(\frac{3}{س}\right)^{9-ر}$

$= 2 \times {}^{9}ق_{ر} \left(-\frac{1}{3}\right)^{ر} (3)^{9-ر} س^{3ر-12}$

ثم نضع ٣ر - ١٢ = ٠ ∴ ر = ٤ ∴ الحد الخالي = $ح_5 = 2 \times {}^{9}ق_4$
$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 \times (3)^5 = 756$

---

(٩) بفرض $\frac{س}{ص} = ع$ ∴ المطلوب معامل $ع^4$ في $\left(2ع + \frac{1}{2ع}\right)^{10}$

∴ $ح_{ر+1} = {}^{10}ق_{ر} \left(\frac{1}{2ع}\right)^{ر} (2ع)^{10-ر}$

$= {}^{10}ق_{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{ر} (2)^{10-ر} ع^{10-2ر}$ وبوضع ١٠-٢ر = ٤ ∴ ر = ٣

∴ المعامل = ${}^{10}ق_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 (2)^7 = 1920$

---

(١٠) $ح_{ر+1} = {}^{10}ق_{ر} \left(-\frac{2}{س^3}\right)^{ر} \left(\frac{س}{2}\right)^{10-ر}$

$= (-2)^{ر} \times {}^{10}ق_{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-ر} س^{10-4ر}$

وإذا كان ١٠ - ٤ر = ٠ فإن ر = $\frac{5}{2} \notin ص^+$

∴ لا يوجد حد خالي من س ، عندما ١٠ - ٤ر = ٦

∴ ر = ٤ ∴ المعامل = $(-2)^4 \times {}^{10}ق_4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{2}$

---

(١١) $ح_{ر+1} = {}^{5ن}ق_{ر} \left(\frac{1}{س^2}\right)^{ر} (س^3)^{5ن-ر}$

$= {}^{5ن}ق_{ر} س^{15ن-5ر}$ .... (١) وبوضع ١٥ن - ٥ر = ٠ ∴ ر = ٣ن ...(٢)

وبوضع ١٥ن - ٥ر = ٥ن ∴ ر = ٢ن .. (٣)

من (٢) ، (١) ∴ الحد الخالي = ${}^{5ن}ق_{3ن} = {}^{5ن}ق_{2ن}$

يساوي معامل $س^{5ن}$ (٣) ، عندما ٤-١ = ٣ن

∴ ن = ١ ∴ معامل $س^{5ن} = {}^{5}ق_2 = 10$

---

(١٢) المقدار = مفكوك $[(2+س)+(1+س)]^{10} = (3+2س)^{10}$

وفيه $ح_{ر+1} = {}^{10}ق_{ر} (2س)^{ر} (3)^{10-ر}$

$= {}^{10}ق_{ر} (2)^{ر} (3)^{10-ر} س^{ر}$

عندما $س^{ر} = س^9$ ∴ ر = ٩ ∴ المعامل = ${}^{10}ق_9 (2)^9 (3)^1$

∴ المعامل = ١٥٣٦٠

---

(١٣) المفكوك = $\left[(س\sqrt{2})^2 - \left(\frac{ص}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^8 = \left(2س^2 - \frac{ص^2}{2}\right)^8$

وفيه $ح_{ر+1} = {}^{8}ق_{ر} \left(-\frac{ص^2}{2}\right)^{ر} (2س^2)^{8-ر}$

$= {}^{8}ق_{ر} \left(-\frac{1}{2}\right)^{ر} (2)^{8-ر} ص^{2ر} س^{16-2ر}$

عندما $س^{16-2ر} ص^{2ر} = س^8 ص^8$ فإن ٢ر = ٨ أي ر=٤

∴ المعامل = ${}^{8}ق_4 \left(-\frac{1}{2}\right)^4 (2)^4 = 70$

(14) $ح_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر} (س^{٥})^{٢ن-ر}$

$= {}^{٢ن}ق_{ر} \times س^{١٠ن-٧ر}$ ويوجد حد خالي عندما $١٠ن - ٧ر = $ صفر أي $ر = \frac{١٠ن}{٧}$

∴ ر لا تكون عدداً صحيحاً موجباً إلا إذا كانت ن تقبل القسمة ع ٧

وعندما $ن = ٧$ فإن $ر = \frac{٧٠}{٧} = ١٠$

∴ الحد الخالي $= ح_{١١} = {}^{١٤}ق_{١٠} = {}^{١٤}ق_{٤} = ١٠٠١$

---

(15) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{أ}{س^{٣}}\right)^{ر} (٢س^{٢})^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} (أ)^{ر} (٢)^{١٠-ر} \times س^{٢٠-٥ر}$ .. (1)

وعندما $٢٠ - ٥ر = ٥$ فإن $ر = ٣$ ∴ معامل $س^{٥} = {}^{١٠}ق_{٣} \times أ^{٣} \times ٢^{٧}$ ... (2)

وعندما $٢٠ - ٥ر = ١٥$ ∴ $ر = ١$ ∴ معامل $س^{١٥} = {}^{١٠}ق_{١} (أ) (٢)^{٩}$ .. (3)

من (2)، (3) ∴ ${}^{١٠}ق_{٣} أ^{٣} \times ٢^{٧} = {}^{١٠}ق_{١} أ (٢)^{٩}$

∴ $\frac{١٠\times٩\times٨}{١\times٢\times٣} أ^{٢} = ١٠ \times ٤$ ∴ $أ^{٢} = \frac{١}{٣}$ ∴ $أ = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

---

(16) $ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{ك}{س^{٣}}\right)^{ر} (س^{٢})^{١٥-ر} = {}^{١٥}ق_{ر} ك^{ر} \times س^{٣٠-٥ر}$ ... (1)

وعندما $٣٠ - ٥ر = ٠$ ∴ $ر = ٦$ ومن (1) ∴ الحد الخالي $= {}^{١٥}ق_{٦} ك^{٦}$ .. (2)

وعندما $٣٠ - ٥ر = ٥$ فإن $ر = ٥$ ومن (1)

∴ معامل $س^{٥} = {}^{١٥}ق_{٥} ك^{٥}$ .. (3) = (2)

∴ ${}^{١٥}ق_{٥} ك^{٥} = {}^{١٥}ق_{٦} ك^{٦}$ ∴ $ك = \frac{{}^{١٥}ق_{٥}}{{}^{١٥}ق_{٦}}$

∴ $ك = \frac{٦}{١٥-٦+١} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

---

(17) $(أ - س)^{١٤} = أ^{١٤} - {}^{١٤}ق_{١} س أ^{١٣} + {}^{١٤}ق_{٢} س^{٢} أ^{١٢} - {}^{١٤}ق_{٣} س^{٣} أ^{١١} + {}^{١٤}ق_{٤} س^{٤} أ^{١٠} - ...$ وبالتعويض ∴ $٤ ({}^{١٤}ق_{٤}) أ^{١٠} + ١١ (- {}^{١٤}ق_{٣} أ^{١١} + {}^{١٤}ق_{٢} أ^{١٢}) = ٠$

وبالقسمة على ${}^{١٤}ق_{٣} \times أ^{١٠}$

∴ $٤ \times \frac{{}^{١٤}ق_{٤}}{{}^{١٤}ق_{٣}} - ١١أ + \frac{{}^{١٤}ق_{٢}}{{}^{١٤}ق_{٣}} \times ١١ أ^{٢} = ٠$

∴ $٤ \times \frac{١٤-٤+١}{٤} - ١١أ + \frac{٣\times١١}{١٤-٣+١} أ^{٢} = ٠$

∴ $٤ - ٤أ + أ^{٢} = ٠$ ∴ $(أ - ٢)^{٢} = ٠$ ∴ $أ = ٢$

إجابات معامل $(س^{ر})$ في مفكوك $(١+س)^{ن}$:

(1) معامل $ح_{٥} = {}^{١٦}ق_{٤} = {}^{١٦}ق_{١٢} =$ معامل $ح_{١٣}$

، $ح_{٤} = {}^{١٦}ق_{٣} س^{٣} = ٧٠$ ∴ $\frac{١٦\times١٥\times١٤}{١\times٢\times٣} س^{٣} = ٧٠$

∴ $س^{٣} = \frac{١}{٨}$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

---

(2) ${}^{ن}ق_{٤} = ٧٠$ ∴ $\frac{{}^{ن}ل_{٤}}{٤\times٣\times٢\times١} = ٧٠$ ، ${}^{ن}ل_{٤} = ٨\times٧\times٦\times٥$

∴ $ن = ٨$ ، $ح_{٣} = {}^{٨}ق_{٢} س^{٢} = ٦٣$ ∴ $٢٨ س^{٢} = ٦٣$

∴ $س^{٢} = \frac{٩}{٤}$ ∴ $س = \pm \frac{٣}{٢}$

---

(3) $\frac{{}^{ن}ق_{٢}}{{}^{ن}ق_{٤}} = \frac{ن(ن-١)}{٢\times١} \times \frac{٤\times٣\times٢\times١}{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)} = \frac{٢}{٧}$

∴ $ن^{٢} - ٥ن - ٣٦ = ٠$ ∴ $(ن - ٩)(ن + ٤) = ٠$

∴ $ن = ٩$ ، ${}^{٩}ق_{٥} س^{٥} = {}^{٩}ق_{٦} س^{٦}$ ∴ $س = \frac{٦}{٩-٦+١} = \frac{٣}{٢}$

---

(4) ${}^{٢٥}ق_{٢ر} = {}^{٢٥}ق_{ر+٤}$ ∴ $٢٥ = ٢ر + ر + ٤$ ∴ $ر = ٧$

∴ الحدان هما $ح_{١٥}$ ، $ح_{١٢}$

أو $٢ر = ر + ٤$ ∴ $ر = ٤$ وهي تغطي نفس الحد

---

(5) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\ ر!} = \frac{ن\ (ن-١)!}{(ن-ر)! \times ر\ (ر-١)!}$

$= \frac{ن}{ر} \times {}^{ن-١}ق_{ر-١}$ ، ${}^{ن}ق_{١٠} \times ٢ = {}^{ن-١}ق_{٩} \times ٣$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{١٠}}{{}^{ن-١}ق_{٩}} = \frac{٣}{٢}$ وباستخدام القاعدة السابقة

∴ $\frac{ن}{١٠} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $ن = ١٥$

---

(6) $\frac{{}^{ن+١}ق_{٤}}{{}^{ن}ق_{٣}} = \frac{٩}{٤}$ ∴ $\frac{(ن+١)!}{٤!\ (ن-٣)!} \times \frac{٣!\ (ن-٣)!}{ن!} = \frac{٩}{٤}$

∴ $\frac{ن+١}{٤} = \frac{٩}{٤}$ ∴ $ن = ٨$ ∴ ${}^{٩}ق_{٦} س^{٦} = {}^{٨}ق_{٥} س^{٥}$

∴ $س = \frac{{}^{٨}ق_{٣}}{{}^{٩}ق_{٣}} = \frac{٨\times٧\times٦}{١\times٢\times٣} \times \frac{١\times٢\times٣}{٧\times٨\times٩} = \frac{٢}{٣}$

(٧) ${}^{٢٠}ق_{ر} + {}^{٢٠}ق_{ر+١} = {}^{٢١}ق_{ر+١}$ ∴ ${}^{٢١}ق_{ر+١} = {}^{٢١}ق_{٨}$

∴ ر + ١ = ٨ ∴ ر = ٧ ∴ الحدان هما $ح_{٨}$ ، $ح_{٩}$ أو ٢١ = ر + ١ + ٨

∴ ر = ١٢ ∴ الحدان $ح_{١٣}$ ، $ح_{١٤}$

---

(٨) بفرض الحدود هي $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

∴ $\frac{{}^{٣٠}ق_{ر-١} + {}^{٣٠}ق_{ر}}{{}^{٣٠}ق_{ر} + {}^{٣٠}ق_{ر+١}} = \frac{{}^{٣١}ق_{ر}}{{}^{٣١}ق_{ر+١}}$ بقانون الجمع

$= \frac{ر+١}{٣١-(ر+١)+١} = \frac{٥}{٣}$

∴ ٣ ر + ٣ = ١٥٥ − ٥ ر ∴ ٨ ر = ١٥٢ ∴ ر = ١٩

---

(٩) الأيمن = $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر}} + \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = ١ + \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١}$

$= \frac{ر+١+ن-ر}{ر+١} = \frac{ن+١}{ر+١}$ = الأيسر

، $\frac{ط}{ط+ق} + \frac{ر}{ر+ل} = \frac{{}^{ن}ق_{ل}}{{}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢}} + \frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٤}}$

$= \frac{٢}{ن+١} + \frac{٤}{ن+١} = \frac{٦}{ن+١}$ .. (١)

، $\frac{٢ق}{ق+ر} = \frac{٢ \times {}^{ن}ق_{٢}}{{}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣}} = ٢ \times \frac{٣}{ن+١} =$ (١)

إجابات قانون النسبة بين حدين متتالين

(١) $\frac{ع_{٧}}{ع_{٦}} = \frac{١٥-٦+١}{٦} \times \frac{٣ص}{٤س} = \frac{٥ص}{٤س}$

، $\frac{\text{معامل } ع_{١٢}}{\text{معامل } ع_{١١}} = \frac{١٥-١١+١}{١١} \times \frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٤٤}$

، $\frac{ع_{٤}}{ع_{٥}} = \frac{٤}{١٥-٤+١} \times \frac{٤س}{٣ص} = \frac{٤س}{٩ص}$

، $\frac{ع_{٩}}{ع_{٧}} = \frac{ع_{٩}}{ع_{٨}} \times \frac{ع_{٨}}{ع_{٧}} = \frac{١٥-٨+١}{٨} \times \frac{٣ص}{٤س} \times \frac{١٥-٧+١}{٧} \times \frac{٣ص}{٤س}$

، $\frac{م.ع_{٦}}{م.ع_{٨}} = \frac{م.ع_{٦}}{م.ع_{٧}} \times \frac{م.ع_{٧}}{م.ع_{٨}} = \frac{٦}{١٥-٦+١} \times \frac{٤}{٣} \times \frac{٧}{١٥-٧+١} \times \frac{٤}{٣} = \frac{١١٢}{١٣٥}$

---

(٢) $\frac{ع_{١١}}{ع_{١٠}} = \frac{١٣-١٠+١}{١٠} \times \frac{س}{٢} = \frac{٣}{١٠}$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

---

(٣) $\frac{م.ع_{٩}}{م.ع_{٨}} = \frac{ن-٨+١}{٨} \times \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ن = ٢٣

---

(٤) $\frac{م.ع_{٦}}{م.ع_{٤}} = \frac{م.ع_{٦}}{م.ع_{٥}} \times \frac{م.ع_{٥}}{م.ع_{٤}} = \frac{٨}{٢٧}$

∴ $\frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٣}{٢}} \times \frac{ن-٤+١}{٤} \times \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{٨}{٢٧}$

∴ $ن^{٢}$ − ٧ن − ١٨ = ٠ ∴ (ن − ٩)(ن + ٢) = ٠ ∴ ن = ٩

---

(٥) رتبتا الحدين الأوسطين $\frac{١٣+١}{٢}$ ، $\frac{١٣+٣}{٢}$ أي ٧ ، ٨

∴ $\frac{ع_{٨}}{ع_{٧}} = ١$ ∴ $\frac{١٣-٧+١٠}{٧} \times \frac{٧ص}{٥س} = ١$

∴ ٧ ص = ٥ س ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٧}{٥}$

---

(٦) رتبتا الحدين الأوسطين $\frac{٢ن+١+١}{٢}$ ، $\frac{٢ن+١+٣}{٢}$

∴ هما $ح_{ن+١}$ ، $ح_{ن+٢}$ وهما متساويان

∴ $\frac{ع_{ن+٢}}{ع_{ن+١}} = \frac{(٢ن+١)-(ن+١)+١}{ن+١} \times \frac{٥}{٣س} = ١$

∴ ٣ س = ٥ ∴ $س = \frac{٥}{٣}$

---

(٧) نفرض أن الحدين هما $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$

∴ $\frac{\text{معامل } ع_{ر+١}}{\text{معامل } ع_{ر}} = \frac{١٨-ر+١}{ر} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٢}$

∴ ٧٦ − ٤ ر = ١٥ ر ∴ ٧٦ = ١٩ ر ∴ ر = ٤

---

(٨) ${}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٨}$ ∴ ن = ٥ + ٨ = ١٣

، $\frac{ع_{٨}}{ع_{٦}} = \frac{ع_{٨}}{ع_{٧}} \times \frac{ع_{٧}}{ع_{٦}} = \frac{١٣-٧+١}{٧} \times \frac{س}{١} \times \frac{١٣-٦+١}{٦} \times \frac{س}{١}$

$= \frac{٨}{٦} س^{٢} = \frac{٣}{٤}$ ∴ $س^{٢} = \frac{٩}{١٦}$ ∴ $س = \pm \frac{٣}{٤}$

---

(٩) $٢ح_{٥} = ح_{٤} + ح_{٦}$ ∴ $٢ = \frac{ع_{٤}}{ع_{٥}} + \frac{ع_{٦}}{ع_{٥}}$

∴ $٢ = \frac{٤}{٨-٤+١} \times \frac{١}{س} + \frac{٨-٥+١}{٥} \times \frac{س}{١}$

∴ $٢ = \frac{٤}{٥س} + \frac{٤}{٥} س$ ∴ ١٠س = ٤ + ٤ $س^{٢}$

∴ $٢س^{٢}$ − ٥س + ٢ = ٠ ∴ (٢س − ١)(س − ٢) = ٠

∴ $س = \frac{١}{٢}$ أو س = ٢

(10) $2\text{ح}_2=\text{ح}_1+\text{ح}_3$ ∴ $2=\frac{\text{ح}_1}{\text{ح}_2}+\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2}$

∴ $2=\frac{1}{\text{ن}-1+1}\times\frac{\text{س}}{\text{ص}}+\frac{\text{ن}-2+1}{2}\times\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

∴ $2=\frac{1}{\text{ن}}\times\frac{2}{1}+\frac{\text{ن}-1}{2}\times\frac{1}{2}$ وبالضرب $\times\,4\text{ن}$

∴ $8\text{ن}=8+\text{ن}^2-\text{ن}$ ∴ $\text{ن}^2-9\text{ن}+8=0$

∴ $(\text{ن}-8)(\text{ن}-1)=0$ ∴ $\text{ن}=8$

(11) $15\,\text{ح}_3+10\,\text{ح}_4+2\,\text{ح}_5=0$ وبالقسمة ÷ ح_4

∴ $15\,\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_4}+10+2\,\frac{\text{ح}_5}{\text{ح}_4}=0$

∴ $15\times\frac{3}{8-3+1}\times\frac{2\text{س}}{-3}+10+2\times\frac{8-4+1}{4}\times\frac{-3}{2\text{س}}$

∴ $-5\text{س}+10-\frac{15}{4\text{س}}=$ صفر

∴ $-20\text{س}^2+40\text{س}-15=0$ ∴ $4\text{س}^2-8\text{س}+3=0$

∴ $(2\text{س}-3)(2\text{س}-1)=0$ ∴ $\text{س}=\frac{3}{2}$ أ، $\frac{1}{2}$

(12) $\frac{\text{ح}_{10}}{\text{ح}_9}=\frac{\text{ن}-9+1}{9}\times\frac{2}{3}=\ ...$ (1)

، $\frac{\text{ح}_{15}}{\text{ح}_{14}}=\frac{\text{ن}-14+1}{14}\times\frac{3}{\text{س}}=\frac{1}{4}$ ... (2)

وبقسمة (1) ÷ (2) ∴ $\frac{\text{ن}-8}{9}\times\frac{14}{\text{ن}-13}=\frac{8}{3}$

∴ $7\text{ن}-56=12\text{ن}-156$ ∴ $\text{ن}=20$

ومن (1) ∴ $\frac{12}{9}\times\frac{3}{\text{س}}=\frac{2}{3}$ ∴ $\text{س}=6$

(13) $\frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_6}=\frac{\text{ن}-6+1}{6}\times\frac{\text{س}}{1}=\frac{1}{2}$ ∴ $\frac{\text{ن}-5}{3}\times\text{س}=1$

∴ $\frac{(\text{ن}-5)^2}{9}\times\text{س}^2=1$ .. (1)،

$\frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_2}=\frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3}\times\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2}=\frac{\text{ن}-3+1}{3}\times\frac{\text{س}}{1}\times\frac{\text{ن}-2+1}{2}\times\frac{\text{س}}{1}$

، $\frac{\text{ن}-2}{3}\times\frac{\text{ن}-1}{2}\times\text{س}^2=\frac{15}{4}$ .. (2)

وبقسمة (1) ÷ (2) ∴ $\frac{\text{ن}^2-10\text{ن}+25}{\text{ن}^2-3\text{ن}+2}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$

ومنها ∴ $3\text{ن}^2-44\text{ن}+121=0$

∴ $(\text{ن}-11)(3\text{ن}-11)=0$

∴ $\text{ن}=11$ ومن (1) ∴ $\text{س}=1/2$

(14) $\frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3}=\frac{8-3+1}{3}\times\frac{\text{ص}}{\text{س}}=\frac{4}{1}$ ∴ $\text{ص}=2\text{س}$

، الحد الأوسط $=\text{ح}_5={}^{8}\text{ق}_4\ \text{ص}^4\ \text{س}^4=1120$

∴ $\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times(2\text{س})^4\times\text{س}^4=1120$ ∴ $\text{س}^8=1$

∴ $\text{س}=\pm1$ ∴ $\text{ص}=\pm2$

(15) $\frac{\text{م.ح}_7}{\text{م.ح}_5}=\frac{\text{م.ح}_7}{\text{م.ح}_6}\times\frac{\text{م.ح}_6}{\text{م.ح}_5}=\frac{8}{5}$

∴ $\frac{\text{ن}-6+1}{6}\times\frac{\text{م}}{1}\times\frac{\text{ن}-5+1}{5}\times\frac{\text{م}}{1}=\frac{8}{5}$

، معامل $\text{ح}_3={}^{\text{ن}}\text{ق}_2\ \text{م}^2=\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times1}\ \text{م}^2=112$ (2)

وبقسمة (1) ÷ (2) ∴ $\frac{\text{ن}^2-9\text{ن}+20}{\text{ن}^2-\text{ن}}=\frac{48}{224}=\frac{3}{14}$ ومنها

∴ $11\text{ن}^2-123\text{ن}+280=0$ ∴ $(11\text{ن}-35)(\text{ن}-8)=0$

∴ $\text{ن}=8$ ومن (1) ∴ $\text{م}^2=4$ ∴ $\text{م}=\pm2$

(16) $\frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_6}=\frac{\text{ن}-6+1}{6}\times\frac{\text{س}}{1}=\frac{14}{21}$ .. (1)،

$\frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_7}=\frac{\text{ن}-7+1}{7}\times\frac{\text{س}}{1}=\frac{6}{14}$ .. (2)

وبقسمة (1) ÷ (2) ∴ $\frac{\text{ن}-5}{\text{ن}-6}\times\frac{7}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{3}$ ∴ $\frac{\text{ن}-5}{\text{ن}-6}=\frac{4}{3}$

∴ $3\text{ن}-15=4\text{ن}-24$ ∴ $\text{ن}=9$ ومن (1)

∴ $\frac{4}{6}\text{س}=\frac{2}{3}$ ∴ $\text{س}=1$

(17) $\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2}=\frac{\text{ن}-2+1}{2}\times\frac{\text{ب}}{\text{أ}}=\frac{60}{96}$

∴ $\frac{\text{ن}-1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ ∴ $\text{ن}=6$ ، $\text{ح}_2={}^{6}\text{ق}_1\ \text{ب}^1\ (4\text{ب})^5=96$

∴ $\text{ب}^6=\frac{1}{64}$ ∴ $\text{ب}=\pm\frac{1}{2}$ ∴ $\text{أ}=4\times\pm\frac{1}{2}=\pm2$

(18) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_4$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ق}_5$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ق}_6$ تكون م.ح ∴ $2\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_5={}^{\text{ن}}\text{ق}_4+{}^{\text{ن}}\text{ق}_6$

∴ $2=\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_4}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_5}+\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_6}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_5}=\frac{5}{\text{ن}-5+1}+\frac{\text{ن}-6+1}{6}$

∴ $12(\text{ن}-4)=30+(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)$

∴ $\text{ن}^2-21\text{ن}+98=0$ ∴ $(\text{ن}-14)(\text{ن}-7)=0$

∴ $\text{ن}=14$ أ، 7 ، عندما $\text{ن}=7$ فإن

${}^{7}\text{ق}_4={}^{7}\text{ق}_3$ ، ${}^{7}\text{ق}_5={}^{7}\text{ق}_2$ ، ${}^{7}\text{ق}_6={}^{7}\text{ق}_1$

∴ ${}^{7}\text{ق}_1$ ، ${}^{7}\text{ق}_2$ ، ${}^{7}\text{ق}_3$ تكون م.ج أي ح_4 ، ح_3 ، ح_2

، بالمثل عندما $\text{ن}=14$ فإن ح_{12} ، ح_{11} ، ح_{10} تكون م.ج

(١٩) $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+2}}{\text{ح}_{\text{ر}+1}} = \frac{\text{ن}-(\text{ر}+1)+1}{\text{ر}+1} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}} = 1$

ومنها $\therefore \text{ن} - 2\text{ر} - 1 = 0$ (١)

، $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+3}}{\text{ح}_{\text{ر}+2}} = \frac{\text{ن}-(\text{ر}+2)+1}{\text{ر}+2} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}} = \frac{3}{4}$

ومنها $4\text{ن} - 7\text{ر} - 10 = 0$ (٢)

وبضرب (١) × ٤ $\therefore 4\text{ن} - 8\text{ر} - 4 = 0$ (٣)

وبطرح (٢) - (٣) $\therefore \text{ر} - 6 = 0 \quad \therefore \text{ر} = 6$

ومن (١) $\therefore \text{ن} - 13 = 0 \quad \therefore \text{ن} = 13$

(٢٠) $16 = \text{ح}_3^2\ (45)^2$. (١) ، $\text{ح}_2 \times \text{ح}_4 = 75$ (٢)

وبقسمة (١) ÷ (٢) $\therefore 16 \times \frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} \times \frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_4} = \frac{45 \times 45}{75}$

$\therefore 16 \times \frac{\text{ن}-2+1}{2} \times \frac{\text{س}}{1} \times \frac{3}{\text{ن}-3+1} \times \frac{1}{\text{س}} = 27$

، منها $8\text{ن} - 8 = 9\text{ن} - 18$

$\therefore \text{ن} = 10$ ، $\text{ح}_3 = {}^{\text{ن}}\text{ق}_2\ \text{س}^2 = \frac{45}{4}$

$\therefore \frac{10 \times 9}{2 \times 1}\text{س}^2 = \frac{45}{4} \quad \therefore \text{س}^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \text{س} = \pm\frac{1}{2}$

(٢١) $\frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_2} = \frac{44\ \text{ح}_6}{9\ \text{ح}_4} \quad \therefore \frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3} \times \frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} = \frac{44}{9} \times \frac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5} \times \frac{\text{ح}_5}{\text{ح}_4}$

$\therefore \frac{\text{ن}-3+1}{3} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{ن}-2+1}{2} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{44}{9} \times \frac{\text{ن}-5+1}{5} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}} \times \frac{\text{ن}-4+1}{4} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}}$

$\therefore 15\ (\text{ن}-2)(\text{ن}-1) = 22\ (\text{ن}-4)(\text{ن}-3)$ ومنها

$\therefore 7\text{ن}^2 - 109\text{ن} + 234 = 0 \quad \therefore (\text{ن}-13)(7\text{ن}-18) = 0$

$\therefore \text{ن} = 13$ والجواب الآخر مرفوض

(٢٢) نفرض أن الحدود هي $\text{ح}_{\text{ر}}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+1}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+2}$

$\therefore \frac{\text{م.ح}_{\text{ر}+1}}{\text{م.ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}} \times \frac{2}{1} = \frac{5}{1}$ ومنها

$\therefore 2\text{ن} - 7\text{ر} + 2 = 0$ .. (١)،

$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+2}}{\text{ح}_{\text{ر}+1}} = \frac{\text{ن}-(\text{ر}+1)+1}{\text{ر}+1} \times \frac{2}{1} = \frac{20}{5}$ ومنها

$\therefore \text{ن} - 3\text{ر} - 2 = 0 \quad \therefore 2\text{ن} - 6\text{ر} - 4 = 0$ (٢)

وبطرح (١) - (٢) $\therefore -\text{ر} + 6 = 0 \quad \therefore \text{ر} = 6$

، من (١) $\therefore 2\text{ن} - 42 + 2 = 0 \quad \therefore \text{ن} = 20$

(٢٣) $\frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3} = \frac{\text{ن}-3+1}{3} \times \frac{-\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-1512}{252}$ .. (١)

، $\frac{\text{ح}_5}{\text{ح}_4} = \frac{\text{ن}-4+1}{4} \times \frac{-\text{ص}}{\text{س}} = \frac{5670}{-1512}$ .. (٢)

وبقسمة (١) ÷ (٢) $\therefore \frac{\text{ن}-2}{3} \times \frac{4}{\text{ن}-3} = \frac{8}{5}$ ومنها $\text{ن} = 8$

ومن (١) $\therefore 2 \times \frac{-\text{ص}}{\text{س}} = -6 \quad \therefore \text{ص} = 3\text{س}$

، $\text{ح}_3 = {}^{8}\text{ق}_2\ (-\text{ص})^2\ \text{س}^6 = 252$

$28 \times 9\text{س}^2 \times \text{س}^6 = 252 \quad \therefore \text{س}^8 = 1 \quad \therefore \text{س} = \pm 1 \quad \therefore \text{ص} = \pm 3$

(٢٤) نفرض ان اكبر معامل هو $\text{ح}_{\text{ر}+1}$

$\therefore \frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+1}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{15-\text{ر}+1}{\text{ر}} \times \frac{3}{2} \succ 1$

$\therefore 24 - 3\text{ر}\,3 < 2\text{ر} \qquad \therefore 5 > 48 \qquad \therefore \text{ر} > 9{,}6$ (١)

، $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+2}}{\text{ح}_{\text{ر}+1}} > 1 \qquad \therefore 45 - 3\text{ر} > 2\text{ر} + 2$

$\therefore 5\text{ر} > 43 \qquad \therefore \text{ر} > 8{,}6$ (٢) ، من (١) (٢) $\therefore \text{ر} = 9$

$\therefore$ اكبر معامل هو معامل $\text{ح}_{10} = {}^{15}\text{ق}_9 \times \frac{3^9}{2^6}$

إجابات مسائل عامة على نظرية ذات الحدين

(١) (أولا) $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{9}\text{ق}_{\text{ر}}\ \left(\frac{1}{4\text{س}}\right)^{\text{ر}} (2\text{س}^2)^{9-\text{ر}}$

$= {}^{9}\text{ق}_{\text{ر}}\ \left(\frac{1}{4}\right)^{\text{ر}} (2)^{9-\text{ر}}\ \text{س}^{18-3\text{ر}}$ ثم نضع

$18 - 3\text{ر} = 0 \quad \therefore \text{ر} = 6 \quad \therefore$ الحد الخالي $= \text{ح}_7 = {}^{9}\text{ق}_6\ \left(\frac{1}{4}\right)^6 (2)^3$

$\therefore \text{ح}_7 = \frac{21}{28}$ ، رتبتا الحدين الأوسطين $\frac{9+1}{2}$ ، $\frac{9+3}{2}$

$\therefore \frac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5} = \frac{9-5+1}{5} \times \frac{\frac{1}{4\text{س}}}{2\text{س}^2} = 1$ ومنها $8\text{س}^3 = 1$

$\therefore \text{س}^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore \text{س} = \frac{1}{2}$

(٢) $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{2\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \left(\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (\text{س})^{2\text{ن}-\text{ر}} = {}^{2\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{2\text{ن}-2\text{ر}}$

ثم نضع $2\text{ن} - 2\text{ر} = 0 \quad \therefore \text{ر} = \text{ن} \quad \therefore$ الحد الخالي هو $\text{ح}_{\text{ن}+1}$

وترتيب الحد الأوسط $= \frac{2\text{ن}+2}{2} = \text{ن} + 1$ وهو نفس الحد الخالي

، عندما $\text{ن} = \text{ر} = 4 \quad \therefore$ الحد الخالي $= {}^{8}\text{ق}_4 = 70$

(٣) الحد الأوسط هو $ح_٧ = {}^{١٢}ق_٦ \left(\frac{٣}{٢س^٢}\right)^٦ \left(\frac{٢س}{٣}\right)^٦$

$= ٩٢٤س^{-٦}$ ، $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \left(\frac{٣}{٢س^٢}\right)^ر \left(\frac{٢س}{٣}\right)^{١٢-ر}$

∴ $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \left(\frac{٣}{٢}\right)^ر \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١٢-ر} س^{١٢-٣ر}$

ثم نضع $١٢ - ٣ر = -٣$ ∴ $ر = ٥$

∴ المعامل $= {}^{١٢}ق_٥ \left(\frac{٣}{٢}\right)^٥ \left(\frac{٢}{٣}\right)^٧ = ٣٥٢$

∴ $\frac{٩٢٤س^{-٦}}{٣٥٢س^{-٣}} = \frac{٧}{٩}$ ومنها $س^٣ = \frac{٢٧}{٨}$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

---

(٤) $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \left(\frac{١}{٢س}\right)^ر (س^٢)^{١٢-ر}$

$= {}^{١٢}ق_ر \left(\frac{١}{٢}\right)^ر س^{٢٤-٣ر}$ ∴ $٢٤ - ٣ر = ٠$

∴ $ر = ٨$ ∴ هو $ح_٩ = {}^{١٢}ق_٨ \left(\frac{١}{٢}\right)^٨ = \frac{٤٩٥}{٢٥٦}$

∴ $\frac{ح_٩}{ح_٨} = \frac{١٢-٨+١}{٨} \times \frac{\frac{١}{٢}س}{س^٢} = \frac{٢}{١٠٠}$

ومنها $س^٣ = \frac{١٢٥}{٨}$ ∴ $س = \frac{٥}{٢}$

---

(٥) $ح_٧ = {}^{ن}ق_٦ \left(\frac{١}{س}\right)^٦ (٢س)^{ن-٦}$

$= {}^{ن}ق_٦ (٢)^{ن-٦} س^{ن-١٢}$ وعندما $ن - ١٢ = ٠$

∴ $ن = ١٢$ ∴ الحد الأوسط ترتيبه $= \frac{١٢+٢}{٢} = ٧$

، $\frac{ح_٨}{ح_٦} = \frac{ح_٨}{ح_٧} \times \frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{١٢-٧+١}{٧} \times \frac{١}{٢س^٢} \times$

$\frac{١٢-٦+١}{٦} \times \frac{١}{٢س^٢} = \frac{١}{٤س^٤} = ٤$ ∴ $س^٤ = \frac{١}{١٦}$

∴ $س = \pm \frac{١}{٢}$

---

(٦) $\frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{٢}{٣س} \times \frac{٢}{٣س} = \frac{٢٤}{٤٠}$ .. (١)

، $\frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{ن-٦+١}{٦} \times \left(\frac{٢}{٣س}\right)^٢ = \frac{١١}{٢٤}$ .. (٢)

وبقسمة (١) ÷ (٢) ∴ $\frac{ن-٤}{ن-٥} \times \frac{٦}{٥} = \frac{٧٢}{٥٥}$

∴ $١١ن - ٤٤ = ١٢ن - ٦٠$ ∴ $ن = ١٦$

، من (١) ∴ $\frac{١٢}{٥} \times \frac{٤}{٩س^٢} = \frac{٣}{٥}$ ∴ $س^٢ = \frac{١٦}{٩}$

∴ $س = \pm \frac{٤}{٣}$ ، يوجد حد أوسط واحد

ترتيبه $= \frac{١٦+٢}{٢} = ٩$ ∴ $ح_٩ = {}^{١٦}ق_٨ \left(\frac{٢}{٣س}\right)^٨ \left(\frac{٣س}{٢}\right)^٨ = ١٢٨٧٠$

---

(٧) الأيمن $= س + \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} \times \frac{س}{١}$

$= \frac{س ر + س + ن س - س ر}{ر+١} = \frac{ن+١}{ر+١} س$

---

(٨) $\frac{ح_{١٠}}{ح_٨} = \frac{ح_{١٠}}{ح_٩} \times \frac{ح_٩}{ح_٨} = \frac{٢٠}{٩}$

∴ $\frac{(٢ن+١)-٩+١}{٩} \times \frac{٤}{٣} \times \frac{(٢ن+١)-٨+١}{٨} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٢٠}{٩}$

$(٢ن - ٧)(٢ن - ٦) = ٩٠$ ∴ $٤ن^٢ - ٢٦ن - ٤٨ = ٠$

∴ $٢ن^٢ - ١٣ن - ٢٤ = ٠$ ∴ $(ن - ٨)(٢ن + ٣) = ٠$ ∴ $ن = ٨$

∴ الأس = ١٧ ورتبتا الحدين الأوسطين $\frac{١٧+١}{٢}$ ، $\frac{١٧+٣}{٢}$

أي ٩ ، ١٠ ∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_٩} = \frac{١٧-٩+١}{٩} \times \frac{٤}{٣س} = ١$

∴ $س = \frac{٤}{٣}$

---

(٩) حاصل الضرب $= (١ + {}^{١٠}ق_١ س + {}^{١٠}ق_٢ س^٢ + ...) \times$

$(١ - {}^٥ق_١ (٢س) + {}^٥ق_٢ (٢س)^٢ - ...)$

∴ معامل $س^٢ = ١ \times {}^٥ق_٢ (٢)^٢ + {}^{١٠}ق_١ \times - {}^٥ق_١ (٢) + {}^{١٠}ق_٢ \times ١$

$= ١٠ \times ٤ - ١٠ \times ١٠ + ٤٥ = -١٥$

---

(١٠) (أ) $= (١ + ٢س + س^٢)(.... + {}^٧ق_٤ (-\frac{١}{س})^٤ س^٣ + {}^٧ق_٥$

$(-\frac{١}{س})^٥ س^٢ + ...$

∴ الحد الخالي $= ٢س \times \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} \times \frac{١}{س^٤} \times س^٣ = ٧٠$

(ب) $= (٤ + ٤س^٢ + س^٤)(١ + {}^٥ق_١ (\frac{١}{س^٢}) + {}^٥ق_٢ (\frac{١}{س^٢})^٢ + ...)$

∴ الحد الخالي $= ٤ \times ١ + ٤س^٢ \times {}^٥ق_١ \times \frac{١}{س^٢} + س^٤ \times {}^٥ق_٢ \times$

$\frac{١}{س^٤} = ٣٤$

---

(١١) المفكوك $= [(١ + س) - س^٢]^٥ =$

$(١ + س)^٥ - {}^٥ق_١ س^٢ (١ + س)^٤ + {}^٥ق_٢ (س^٢)^٢ (١+س)^٣ - ...$

∴ معامل $س^٢ = {}^٥ق_٢ - {}^٥ق_١ = ١٠ - ٥ = ٥$

، معامل $س^٣ = {}^٥ق_٣ - {}^٥ق_١ \times {}^٤ق_١ = ١٠ - ٥ \times ٤ = -١٠$

المجموعة الثالثة :

تمارين (١ - ٢) من كتاب المدرسة

(١) رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{ن+١}{٢} = ٨$ $\boxed{ن = ١٥}$

الجواب (ب)

---

(٢) $(١ + س)^{٥} = ١٠٢٤ = ٤^{٥}$

$١ + س = ٤$ ∴ $س = ٣$ الجواب (د)

---

(٣) في مفكوك $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{٧}$ بوضع س = ١

∴ مجموع المعاملات $= (١ - ١)^{٧} = ٠$ الجواب (د)

---

(٤) $ح_{٥} = {}^{١٠}ق\,(٢س)^{٤}$ بوضع س = ١

∴ معامل $ح_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤} \times ٢^{٤} = ١٦ \times {}^{١٠}ق_{٤}$ الجواب (جـ)

---

(٥) $س^{٢٤-٤ر} = س^{١٢}$ $٢٤ - ١٢ = ٤ر$ ∴ $ر = ٣$

الحد هو $ح_{٤}$ الجواب (ب)

---

(٦) رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{٢ن+٢}{٢} = ن + ١$

رتبة الحد الأوسط الثاني $= ن + ٢$ ∴ $\frac{ح_{ن+٢}}{ح_{ن+١}} = ١$

$\frac{٢ن+١-(ن+١)+١}{ن+١} \times \frac{٢ب}{ا} = ١$

$\frac{٢ب}{ا} = ١$ ∴ $\boxed{ا = ٢ب}$ الجواب (د)

---

(٧) رتبة الحد الأوسط $= \frac{٨ن+٢}{٢}$

∴ $٤ن + ١ = ٩$ ∴ $\boxed{ن = ٢}$ الجواب (ب)

---

(٨) $ح_{٦} = {}^{٩}ق_{٥}\,(ب س)^{٥}\,(١)^{٤}$ بوضع س = ١

∴ معامل $ح_{٦} = {}^{٩}ق_{٥}\,ب^{٥}$ الجواب (جـ)

---

(٩) ∵ عدد الحدود = ٧ + ٦ = ١٣

∴ المفكوك على الصورة $(أ - س)^{١٢}$ الجواب (أ)

---

(١٠) $١ + {}^{٨}ق_{١}س + {}^{٨}ق_{٢}س^{٢} + ... + س^{٨} = ٢٥٦$

∴ $(١+س)^{٨} = ٢^{٨}$ ∴ $١ + س = ٢$

$\boxed{س = ١}$ أو $١ + س = -٢$ أو $\boxed{س = -٣}$

---

(١١) (أ) $(١,٠٠٣)^{٥} = (١ + ٠,٠٠٣)^{٥}$

$= ١ + {}^{٥}ق_{١}(٠,٠٠٣) + {}^{٥}ق_{٢}(٠,٠٠٣)^{٢}$

$+ .... + {}^{٥}ق_{٥}(٠,٠٠٣)^{٥}$

$= ١ + ٥ \times ٠,٠٠٣ + ١٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٩$

$= ١ + ٠,٠١٥ + ٠,٠٠٠٠٩٠ + ...$

$= ١,٠١٥٠٩٠ = ١,٠١٥$ تقريباً

(ب) $(٠,٩٩٨)^{٧} = (١ - ٠,٠٠٢)^{٧}$

$\simeq ١ - {}^{٧}ق_{١}(٠,٠٠٢) + {}^{٧}ق_{٢}(٠,٠٠٢)^{٢}$

+ حدود تهمل عند التقريب

$= ١ - ٠,٠١٤ + ٢١ \times ٠,٠٠٠٠٠٤ + ..$

$= ٠,٩٨٦٠٨٤ = ٠,٩٨٦$ تقريباً

(جـ) $(١,٠١)^{٦} + (٠,٩٩)^{٦} = (١ + ٠,٠١)^{٦} + (١ - ٠,٠١)^{٦}$

$= ٢\left[١ + {}^{٦}ق_{٢}(٠,٠١)^{٢} + {}^{٦}ق_{٤}(٠,٠١)^{٤} + ...\right]$

$= ٢(١ + ٠,٠٠١٥ + ٠,٠٠٠٠٠٠٠١٥ + ...) = ٢,٠٠٣$ تقريباً

(د) $(١ + ٠,٠٢)^{٨} - (١ - ٠,٠٢)^{٨}$

$= ٢\ [{}^{٨}ق_{١}(٠,٠٢) + {}^{٨}ق_{٣}(٠,٠٢)^{٣}$

+ حدود تهمل عند التقريب]

$= ٢[\ ٠,١٦ + ٠,٠٠٠٤٤٨$ + حدود تهمل]

$= ٠,٣٢ + ٠,٠٠٠٨٩٦$ + حدود تهمل $= ٠,٣٢١$

---

(١٢) $\left(١ + \sqrt{٣}\right)^{٦} - \left(١ - \sqrt{٣}\right)^{٦} = ٤٨٠ \sqrt{٣}\,س$

$٢\left[{}^{٦}ق_{١}\left(\sqrt{٣}\right) + {}^{٦}ق_{٣}\left(\sqrt{٣}\right)^{٣} + {}^{٦}ق_{٥}\left(\sqrt{٣}\right)^{٥}\right]$

$= ٤٨٠ \sqrt{٣}\,س$

بالقسمة على $٢\sqrt{٣}$ ∴ $٦ + ٢٠ \times ٣ + ٦ \times ٩ = ٢٤٠\,س$

$١٢٠ = ٢٤٠\,س$ ∴ $\boxed{س = \frac{١}{٢}}$

---

(١٣) (أ) $(١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١}س + {}^{١٠}ق_{٢}س^{٢}$

$+ ... + س^{١٠}$ (١) بوضع س = ١ في الطرفين $= ٢^{١٠}$

(ب) بوضع س = - ١ في طرفي (١)

∴ $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} ... + {}^{١٠}ق_{١٠} =$ صفر

---

(١٤) (أ) $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢}\right)^{٤} = ١٦س^{-٤} + {}^{٤}ق_{١}\left(\frac{س}{٢}\right)\left(\frac{٢}{س}\right)^{٣}$

$+ {}^{٤}ق_{٢}\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{٢}{س}\right)^{٢} + {}^{٤}ق_{٣}\left(\frac{س}{٢}\right)^{٣}\left(\frac{٢}{س}\right)^{١} + \left(\frac{س}{٢}\right)^{٤}$

$= ١٦س^{-٤} + ١٦س^{-٢} + ٦ + س^{٢} + \frac{١}{١٦}س^{٤}$

(ب) $\left(س-\frac{١}{س}\right)^{٥} = س^{٥} + {}^{٥}ق_{١}\left(\frac{١}{س}\right)(س^{٤}) + {}^{٥}ق_{٢}\left(\frac{١}{س}\right)^{٢} س^{٣}$

$-\,{}^{٥}ق_{٣}\left(\frac{١}{س}\right)^{٣} س^{٢} + {}^{٥}ق_{٤}\left(\frac{١}{س}\right)^{٤} س - \left(\frac{١}{س}\right)^{٥}$

$= س^{٥} - ٥س^{٣} + ١٠س - ١٠س^{-١} + ٥س^{-٣} - س^{-٥}$

(جـ) $(س+\sqrt{٢})^{٤} + (س-\sqrt{٢})^{٤}$

$= ٢(س^{٤} + ١٢س^{٢} + ٤) = ٢س^{٤} + ٢٤س^{٢} + ٨$

(د) $(\sqrt{٣}+٢س)^{٥} - (\sqrt{٣}-٢س)^{٥}$

$= ٢\left[{}^{٥}ق_{١}(٢س)(\sqrt{٣})^{٤} + {}^{٥}ق_{٣}(٢س)^{٣}(\sqrt{٣})^{٢}\right]$

$= ١٨٠س + ٤٨٠س^{٣} + ٦٤س^{٥}$

(١٥) $\because ح_{٣} = ٢٨\,س^{٢}$ ، ${}^{ن}ق_{٢}\,س^{٢} = ٢٨س^{٢}$

$\frac{ن(ن-١)}{٢\times١} = ٢٨ \quad \therefore {}^{ن}ل_{٢} = {}^{٨}ل_{٢}$

$\boxed{ن=٨}$ ، $\because ح_{٥} = ١١٢٠$ ، ${}^{٨}ق_{٤}\,س^{٤} = ١١٢٠$

$س^{٤} = \frac{١١٢٠}{٧٠} = ١٦$ ، $\boxed{س = \pm ٢}$

(١٦) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$

$\because$ معامل $ح_{٦}$ = معامل $ح_{١٠}$ ، ${}^{ن}ق_{٥} \times ١^{٥} = {}^{ن}ق_{٩} \times ١^{٩}$

${}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٩} \quad \therefore ن = ٥+٩ \quad \therefore \boxed{ن = ١٤}$

(١٧) $(أ\,س + ب)^{١٠}$

$\because ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥}(ب)^{٥}(أس)^{٥}$

بوضع س = ١ ، $\because$ معامل $ح_{٦} = \frac{٦٣}{٨}$

$\because ٢٥٢ \times ب^{٥} \times أ^{٥} = \frac{٦٣}{٨} \quad \therefore (أب)^{٥} = \frac{٦٣}{٨\times٢٥٢}$

$\therefore (أب)^{٥} = \frac{١}{٣٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \quad \therefore أب = \frac{١}{٢} \quad \therefore ٢أب = ١$

(١٨) رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٢+٢}{٢} = ٧$

$\therefore ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦}\left(\frac{١}{٢س}\right)^{٦}(٢س^{٢})^{٦} = ٩٢٤\,س^{٦}$

(١٩) رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{١١+١}{٢} = ٦$

رتبة الحد الأوسط الثاني = ٧

$ح_{٦} = {}^{١١}ق_{٥}\left(-\frac{٢}{س}\right)^{٥}\left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{٦} = -٢٣١س^{٧}$ ،

$ح_{٧} = {}^{١١}ق_{٦}\left(-\frac{٢}{س}\right)^{٦}\left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{٥} = ٩٢٤\,س^{٤}$

(٢٠) في مفكوك $س^{٤}\left(س-\frac{١}{س}\right)^{٩}$

$ح_{٤}$ من النهاية هو $ح_{٤}$ من البداية

في مفكوك $س^{٤}\left(-\frac{١}{س}+س\right)^{٩}$

$\therefore ح_{٤} = س^{٤} \times {}^{٩}ق_{٣}(س)^{٣}\left(-\frac{١}{س}\right)^{٦} = ٨٤\,س$

(٢١) رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٠+٢}{٢} = ٦$

$\therefore ح_{٦} = \frac{٢٨}{٢٧} \quad \therefore {}^{١٠}ق_{٥}\left(\frac{١}{٢س}\right)^{٥}(س^{٢})^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧}$

$٢٥٢ \times \frac{١}{٣٢}\,س^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧}$

$\therefore س^{٥} = \frac{٢٨\times٣٢}{٢٧\times٢٥٢} = \frac{٣٢}{٢٤٣}$

$س^{٥} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥} \quad \therefore \boxed{س = \frac{٢}{٣}}$

(٢٢) رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٠+٢}{٢} = ٦$

$\therefore \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{{}^{١٠}ق_{٥}\left(\frac{٣}{٢س}\right)^{٥}\left(\frac{٢س}{٣}\right)^{٥}}{{}^{١٠}ق_{٤}\left(\frac{٣}{٢س}\right)^{٤}\left(\frac{٢س}{٣}\right)^{٦}}$

$= \frac{١٠-٥+١}{٥} \times \left(\frac{٣}{٢س}\right) \times \left(\frac{٣}{٢س}\right)$

$= \frac{٦}{٥} \times \frac{٩}{٤س^{٢}} = \frac{٢٧}{١٠}\,س^{-٢}$

عندما س = ٣ $\therefore$ النسبة $= \frac{٢٧}{١٠\times٩} = \frac{٣}{١٠} = ٠,٣$

(٢٣) $\because \frac{{}^{١٥}ق_{٤}\left(\frac{١}{س}\right)^{٤}(س)^{١١}}{{}^{١٤}ق_{٣}\left(-\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٣}(س)^{١١}} = \frac{-١٦}{١٥}$

$\frac{١٥}{٤} \times -\frac{س^{٦}}{س^{٤}} = \frac{-١٦}{١٥}$

$س^{٢} = \frac{٦٤}{٢٢٥} \quad \therefore س = \pm\frac{٨}{١٥}$

تمارين (١ - ٣) من كتاب المدرسة

(١) $(١ + ٢س)^{١٠}$ ، $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} (٢س)^{ر}$

يحتوى $س^{٤}$ ∴ $ر = ٤$ ، الحد هو ${}^{١٠}ق_{٤} \times ١٦س^{٤}$

∴ معامل الحد المستمر على $س^{٤}$ هو $١٦ \times {}^{١٠}ق_{٤}$ الجواب (جـ)

---

(٢) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س)^{١٠-ر}$

يحتوى $س^{-ر+١٠-ر} = س^{٠}$ $\boxed{ر = ٥}$

الحد الخالى من $س = ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥}$ الجواب (جـ)

---

(٣) $ح_{ر+١} = س^{٣} \times {}^{٧}ق_{ر} س^{ر}$

يحتوى $س^{٣+ر} = س^{٤}$ ∴ $ر = ١$

الحد هو $ح_{٢} = س^{٣} \times {}^{٧}ق_{١} س$

∴ معامل $س^{٤}$ هو ${}^{٧}ق_{١}$ الجواب (جـ)

---

(٤) $ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س}\right)^{ر} \times (س^{٢})^{٦-ر}$

يحتوى $س^{-ر+١٢-٢ر} = س^{٠}$

$١٢ - ٣ر = ٠$ ∴ $\boxed{ر = ٤}$

الحد الخالى من س = $ح_{٥}$ الجواب (جـ)

---

(٥) $\left(أس^{٢} + \frac{١}{أس}\right)^{١١}$

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{١}{أس}\right)^{ر} (أس^{٢})^{١١-ر}$

يحتوى $س^{-ر+٢٢-٢ر} = س^{٢٢-٣ر}$

$س^{٢٢-٣ر} = س^{٤}$ $\boxed{ر = ٦}$

$س^{٢٢-٣ر} = س^{٧}$ $\boxed{ر = ٥}$

∴ معامل $ح_{٧}$ = معامل $ح_{٦}$

∴ ${}^{١١}ق_{٦} \left(\frac{١}{أ}\right)^{٦} (أ)^{٥} = {}^{١١}ق_{٥} \left(\frac{١}{أ}\right)^{٥} (أ)^{٦}$

∴ $\frac{١}{أ} = أ$ ∴ $أ^{٢} = ١$ ∴ $أ = \pm ١$ الجواب (جـ)

---

(٦) $ح_{٧} = {}^{ن}ق_{٦} \left(\frac{١}{س}\right)^{٦} (س)^{ن-٦}$

∴ $س^{ن-١٢} = س^{٠}$ ∴ $ن = ١٢$ الجواب (جـ)

---

(٧) $\left(س^{٢} + \frac{١}{أس}\right)^{٨}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٨ + ٢}{٢} = ٥$

$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} \left(\frac{١}{أس}\right)^{٤} (س^{٢})^{٤}$

معامل $ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} \left(\frac{١}{أ}\right)^{٤}$ (١)

$ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \left(\frac{١}{أس}\right)^{ر} (س^{٢})^{٨-ر}$

يحتوى $س^{١٦-٣ر} = س^{٧}$ ، $٣ر = ١٥$ ∴ $ر = ٥$

معامل $س^{٧} = {}^{٨}ق_{٣} \left(\frac{١}{أ}\right)^{٣}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $٧٠ \times \frac{١}{أ^{٤}} = ٥٦ \times \frac{١}{أ^{٣}}$

$أ = \frac{٥}{٤}$ الجواب (د)

---

(٨) $\left(أس + \frac{١}{بس}\right)^{١٠}$

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{١}{بس}\right)^{ر} (أس)^{١٠-ر}$

يحتوى $س^{١٠-٢ر} = س^{٠}$

$\boxed{ر = ٥}$ ∴ الحد الخالى من س هو $ح_{٦}$

، ∵ $ح_{٧} = {}^{١٠}ق_{٦} \left(\frac{١}{بس}\right)^{٦} (أس)^{٤}$

بوضع س = ١

∴ ${}^{١٠}ق_{٦} \left(\frac{١}{ب}\right)^{٦} (أ)^{٤} = {}^{١٠}ق_{٥} \left(\frac{١}{ب}\right)^{٥} (أ)^{٥}$

$٢١٠ \times \frac{أ^{٤}}{ب^{٦}} = ٢٥٢ \times \frac{أ^{٥}}{ب^{٥}}$

$٢٥٢ أ^{٥} ب^{٦} = ٢١٠ أ^{٤} ب^{٥}$ ، $أب = \frac{٥}{٦}$ الجواب (ب)

---

(٩) $ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر} (٢س)^{٨-ر}$

يحتوى $س^{٨-٢ر} = س^{٠}$ ∴ $\boxed{ر = ٤}$

∴ الحد $= ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} (٢)^{٤} = ٧٠$ الجواب (جـ)

---

(١٠) $(١ + أس)^{٧}$ ، $ح_{٥} = {}^{٧}ق_{٤} (أس)^{٤}$ بوضع س = ١

∴ ${}^{٧}ق_{٤} أ^{٤} = ٥٦٠$ ، $٣٥ أ^{٤} = ٥٦٠$

∴ $أ^{٤} = ١٦$ ∴ $أ = \pm ٢$ الجواب (جـ)

(١١) $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر} (٤س^{٢})^{١٢-ر}$

يحتوي $س^{٢٤-٢ر-ر} = س^{٠}$ ، $\therefore ر = ٨$

الحد الخالي من س $= ح_{٩} = {}^{١٢}ق_{٨} = ٤٩٥$

---

(١٢) $ح_{ر+١} = س^{٢} \times {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{ر} \left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{١٠-ر}$

يحتوي $س^{٢-٣ر+٢٠-٢ر} = س^{١٢}$

$\therefore ٢٢-٥ر=١٢$ ، $٥ر = ٢٠$ $\therefore \boxed{ر = ٤}$

$\therefore$ معامل $س^{١٢} = ١ \times {}^{١٠}ق_{٤} (٢)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١١}$

$= ١٣٦٥ \times \frac{١}{١٢٨} = \frac{١٣٦٥}{١٢٨}$

---

(١٣) $ح_{٦} = {}^{ن}ق_{٥} \left(\frac{-١}{س^{٣}}\right)^{٥} (٢س)^{ن-٥}$

يحتوي $س^{ن-٢٠} = س^{٠}$ ، $ن - ٢٠ = ٠$ $\therefore \boxed{ن = ٢٠}$

$\therefore$ المفكوك هو $\left(٢س - \frac{١}{س^{٣}}\right)^{٢٠}$

نفرض أن الحد المحتوى $س^{-٦}$ هو $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = {}^{٢٠}ق_{ر} \left(-\frac{١}{س^{٣}}\right)^{ر} (٢س)^{٢٠-ر}$

يحتوى $س^{٢٠-٤ر} = س^{-٦}$

$٤ر = ٢٦$ $\therefore ر = ٦,٥$ ونفرض

$\therefore$ هذا المفكوك لا يحتوى حداً يشتمل على $س^{-٦}$.

---

(١٤) $\left(٢س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٩}$

أولاً: نفرض أن الحد المحتوى $س^{٣}$ هو $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \left(-\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر} (٢س)^{٩-ر}$

يحتوي $س^{٩-٣ر} = س^{٣}$ $\boxed{ر = ٢}$

معامل $س^{٣} = {}^{٩}ق_{٢} \left(-\frac{١}{١}\right)^{٢} (٢)^{٧}$

$= \frac{٩ \times ٨}{٢ \times ١} \times ٢^{٧} = ٤٦٠٨$

ثانياً: نفرض أن الحد الخالي من س هو $ح_{ر+١}$ يحتوي $س^{٩-٣ر} = س^{٠}$ $\boxed{ر = ٣}$

الحد الخالي من س $= {}^{٩}ق_{٣} (-١)^{٣} (٢)^{٦} = -٥٣٧٦$

ثالثاً: نفرض ان الحد المحتوي $س^{٢}$ هو $ح_{ر+١}$

يحتوي $س^{٩-٣ر} = س^{٢}$

$\boxed{ر = ٣,٥}$ مرفوض

هذا المفكوك لا يحتوي على حد يشتمل على $س^{٢}$

---

(١٥) الأيمن $= \frac{|\underline{ن} \; |\underline{ر-١} \; |\underline{ن-ر}}{|\underline{ر} \; |\underline{ن-ر} \; |\underline{ن-١}} = \frac{ن |\underline{ن-١} \; |\underline{ر-١}}{ر |\underline{ر-١} \; |\underline{ن-١}}$

$= \frac{ن}{ر} =$ الأيسر ، $\frac{{}^{ن}ق_{١٠} (س^{٢})^{١٠}}{{}^{ن-١}ق_{٩} (-ص)^{٩}}$ بوضع س = ١ ، ص = ١

$\therefore \frac{{}^{ن}ق_{١٠}}{{}^{ن-١}ق_{٩} \times -١} = \frac{-٣}{٢}$ $\therefore -\frac{ن}{١٠} = -\frac{٣}{٢}$

$\therefore \boxed{ن = ١٥}$

---

(١٦) $\left[٢\left(\frac{س}{ص}\right) + \frac{١}{٢}\left(\frac{س}{ص}\right)^{-١}\right]^{١٠}$

نفرض أن الحد المحتوى $\left(\frac{س}{ص}\right)$ هو $ح_{ر+١}$

$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢}\left(\frac{س}{ص}\right)^{-١}\right)^{ر} \left(٢\left(\frac{س}{ص}\right)\right)^{١٠-ر}$

يحتوى $\left(\frac{س}{ص}\right)^{١٠-٢ر} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٤}$ $\therefore ٢ر = ٦$ $ر = ٣$

الحد هو $ح_{٤}$ بوضع $\left(\frac{س}{ص}\right) = ١$

معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٤} = {}^{١٠}ق_{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} (٢)^{٧} = ١٩٢٠$

---

(١٧) فى مفكوك $(١+س)^{٢ن}$ ، معامل $س^{ن}$ هو ${}^{٢ن}ق_{ن}$

، فى مفكوك $(١+س)^{٢ن-١}$ ، معامل $س^{ن}$ هو ${}^{٢ن-١}ق_{ن}$

$\therefore \frac{{}^{٢ن}ق_{ن}}{{}^{٢ن-١}ق_{ن}} = \frac{|\underline{٢ن}}{|\underline{ن} \; |\underline{ن}} \times \frac{|\underline{ن} \; |\underline{ن-١}}{|\underline{٢ن-١}}$

$= \frac{٢ن |\underline{٢ن-١} \; |\underline{ن-١}}{ن |\underline{ن-١} \; |\underline{٢ن-١}} = ٢$

$\therefore$ معامل $س^{ن}$ فى مفكوك $(١+س)^{٢ن}$

ضعف معامل $س^{ن}$ فى مفكوك $(١+س)^{٢ن-١}$

---

(١٨) رتبة الحد الأوسط $= \frac{٢ن+٢}{٢} = ن + ١$

$ح_{ن+١} = {}^{٢ن}ق_{ن} \left(\frac{١}{س}\right)^{ن} (س)^{ن} = {}^{٢ن}ق_{ن}$

خال من س عند ن = ٨

$ح_{ن+١} = ح_{٩} = {}^{١٦}ق_{٨} = ١٢٨٧٠$

(١٩) $\left(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٦}$

أولاً : نفرض أن الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٦}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} \left(\text{س}^{\text{ك}}\right)^{٦-\text{ر}}$$

يحتوي $\text{س}^{٦\text{ك}-\text{كر}-\text{ر}} = \text{س}^{٠}$ ، $٦\text{ك} - \text{كر} = \text{ر}$

$\text{ك}(٦-\text{ر}) = \text{ر}$ ، $\text{ك} = \frac{\text{ر}}{٦-\text{ر}}$ ، $\text{ر} < ٦$

عند ر = ١ $\text{ك} = \frac{١}{٥}$ نفرض ،

عند ر = ٢ $\text{ك} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ نفرض

عند ر = ٣ $\text{ك} = \frac{٣}{٣} = ١$

عند ر = ٤ $\text{ك} = \frac{٤}{٢} = ٢$

عند ر = ٥ $\text{ك} = \frac{٥}{١} = ٥$ ∴ قيم ك هي ١، ٢، ٥

ثانياً : عند ك = ٥ ∴ ر = ٥

الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{٦} = {}^{٦}\text{ق}_{٥} = ٦$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٦+٢}{٢} = ٤$

معامل $\text{ح}_{٤} = {}^{٦}\text{ق}_{٣} \times ١ \times ١ = ٢٠$

النسبة $= \frac{\text{الحد الخالي من س}}{\text{معامل الحد الأوسط}} = \frac{٦}{٢٠} = \frac{٣}{١٠}$

(٢٠) $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{أس}}\right)^{١٢}$ ، نفرض أن الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$$∴ \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{أس}}\right)^{\text{ر}} \left(\text{س}^{٢}\right)^{١٢-\text{ر}}$$

يحتوي $\text{س}^{٢٤-٣\text{ر}} = \text{س}^{٠}$ ∴ ر = ٨

الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{٩} = {}^{١٢}\text{ق}_{٨} \left(\frac{١}{\text{أ}}\right)^{٨}$

نفرض أن الحد المحتوى $\text{س}^{٣}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

يحتوي $\text{س}^{٢٤-٣\text{ر}} = \text{س}^{٣}$ ، ر = ٧

معامل $\text{س}^{٣} = {}^{١٢}\text{ق}_{٧} \left(\frac{١}{\text{أ}}\right)^{٧}$ $∴ \frac{{}^{١٢}\text{ق}_{٨} \left(\frac{١}{\text{أ}}\right)^{٨}}{{}^{١٢}\text{ق}_{٧} \left(\frac{١}{\text{أ}}\right)^{٧}} = \frac{٥}{١٦}$

$\frac{١٢-٨+١}{٨} \times \frac{١}{\text{أ}} = \frac{٥}{١٦}$ ، $\frac{٥}{٨\text{أ}} = \frac{٥}{١٦}$ ∴ $\boxed{\text{أ} = ٢}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٢+٢}{٢} = ٧$

الحد الأوسط $= \text{ح}_{٧} = {}^{١٢}\text{ق}_{٦} \left(\frac{١}{٢\text{س}}\right)^{٦} \left(\text{س}^{٢}\right)^{٦}$

عند س = ٢ ، الحد الأوسط $= ٩٢٤ \times \left(\frac{١}{٢\times٢}\right)^{٦} (٤)^{٦} = ٩٢٤$.

(٢١) نفرض أن الحد المحتوى $\text{س}^{٥}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}^{٣}}\right)^{\text{ر}} \left(٢\text{س}^{٢}\right)^{١٠-\text{ر}}$$

يحتوي $\text{س}^{-٣\text{ر}+٢٠-٢\text{ر}} = \text{س}^{٥}$

$٢٠ - ٥\text{ر} = ٥$ $\boxed{\text{ر} = ٣}$ ∴ معامل $\text{س}^{٥} = {}^{١٠}\text{ق}_{٣} \times \text{أ}^{٣} \times ٢^{٧}$

نفرض أن الحد المحتوى $\text{س}^{١٥}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

يحتوي $\text{س}^{٢٠-٥\text{ر}} = \text{س}^{١٥}$ ∴ ر = ١ .

معامل $\text{س}^{١٥} = {}^{١٠}\text{ق}_{١} (\text{أ})^{١} (٢)^{٩}$

∴ $١٢٠\text{أ}^{٣} \times ٢^{٧} = ١٠\text{أ} \times ٢^{٩}$ ∴ $٣\text{أ}^{٢} = ١$

∴ $\text{أ} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٢٢) أولاً : نفرض ان الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{٨\text{س}}\right)^{\text{ر}} \left(\text{س}^{٢}\right)^{١٣-\text{ر}}$$

يحتوى $\text{س}^{٢٦-٣\text{ر}} = \text{س}^{٠}$ ، $\text{ر} = \frac{٢٦}{٣} = ٨\frac{٢}{٣} \notin \text{ط}$

مرفوض

∴ هذا المفكوك لا يحتوى حد خالى من س

ثانياً : ∵ $\text{ح}_{٤} = \text{ح}_{١١}$

$${}^{١٣}\text{ق}_{٣} \left(\frac{١}{٨\text{س}}\right)^{٣} \left(\text{س}^{٢}\right)^{١٠} = {}^{١٣}\text{ق}_{١٠} \left(\frac{١}{٨\text{س}}\right)^{١٠} \left(\text{س}^{٢}\right)^{٣}$$

∴ $\text{س}^{١٤} = \left(\frac{١}{٨\text{س}}\right)^{٧}$ ، $\text{س}^{٢} = \frac{١}{٨\text{س}}$ ∴ $٨\text{س}^{٣} = ١$

$\text{س}^{٣} = \frac{١}{٨}$ ∴ $\boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}}$

(٢٣) أولاً : نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$$∴ \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{\text{ر}} (\text{س})^{٩-\text{ر}}$$

يحتوى $\text{س}^{٩-٣\text{ر}} = \text{س}^{٠}$ $\boxed{∴ \text{ر} = ٣}$

∴ الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{٤} = ٨٤$

ثانياً: رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{9+1}{2} = 5$

رتبة الحد الأوسط الثانى $= 6$

$\therefore ح_6 + ح_5 = 0 \quad \therefore ح_6 = -ح_5 \quad ، \quad \therefore \frac{ح_6}{ح_5} = -1$

$\therefore \frac{9-5+1}{5} \times \frac{\frac{1}{س^2}}{س} = -1$

$\therefore \frac{1}{س^3} = -1 \quad \therefore \boxed{س = -1}$

(24) نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+1}$

$\therefore ح_{ر+1} = {}^{9}ق_{ر} \left(\frac{1}{3س}\right)^{ر} \left(9س^2\right)^{9-ر}$

يحتوى $س^{18-3ر} = س^{0} \quad \therefore ر = 6$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $ح_7 = {}^{9}ق_6 = 84$

رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{9+1}{2} = 5$

رتبة الحد الأوسط الثانى $= \frac{9+3}{2} = 6$

$\therefore ح_6 = ح_5 \quad \therefore \frac{ح_6}{ح_5} = 1 \quad ، \quad \frac{9-5+1}{5} \times \frac{\frac{1}{3س}}{9س^2} = 1$

$\frac{1}{27س^3} = 1 \quad \therefore \boxed{س = \frac{1}{3}}$

(25) أولاً: نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+1}$

$ح_{ر+1} = {}^{3ن}ق_{ر} \left(\frac{1}{س}\right)^{ر} \left(س^2\right)^{3ن-ر}$

يحتوى $س^{6ن-3ر} = س^{0} \quad ، \quad \therefore ر = 2ن$

$\therefore$ الحد الخالى من س $= {}^{3ن}ق_{2ن} = {}^{3ن}ق_{ن}$ (1)

ثانياً: يحتوي $س^{6ن-3ر} = س^{3ن} \quad \therefore ر = ن$

$\therefore$ معامل $س^{3ن} = {}^{3ن}ق_{ن}$ (2)

من (1) و (2) $\therefore$ الحد الخالي من س = معامل $س^{3ن}$

عند ن = 6 $\therefore$ الحد الخالي من س $= {}^{18}ق_6$

$\therefore$ رتبة الحد الأوسط $= \frac{18+2}{2} = 10$

$\therefore$ معامل $ح_{10} = {}^{18}ق_9$

$\therefore$ النسبة $= \frac{{}^{18}ق_6}{{}^{18}ق_9} = \frac{21}{55}$

تمارين (1 - 4) من كتاب المدرسة

(1) $\frac{ح_9}{ح_8} = \frac{10-8+1}{8} \times \frac{ص}{س} = \frac{3ص}{8س}$ الجواب (أ)

(2) $\frac{\text{معامل}\,ح_6}{\text{معامل}\,ح_5} = \frac{12-5+1}{5} \times \frac{-1}{1} = \frac{-8}{5}$ الجواب (جـ)

(3) $\frac{ح_6}{ح_4} = \frac{ح_6}{ح_5} \times \frac{ح_5}{ح_4}$

$= \frac{8-5+1}{5} \times \frac{ص}{س} \times \frac{8-4+1}{4} \times \frac{ص}{س} = \frac{ص^2}{س^2}$ الجواب (د)

(4) رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{11+1}{2} = 6$

رتبة الحد الأوسط الثانى $= 7$

$\frac{ح_7}{ح_6} = \frac{11-6+1}{6} \times \frac{-2ب}{3أ} = \frac{-2}{3} \quad ، \quad \frac{ب}{أ} = 1$ الجواب (جـ)

(5) (أ) $\frac{ح_3}{ح_2} = \frac{11-2+1}{2} \times \frac{\frac{3}{س^2}}{\frac{2س^2}{1}}$

$= 5 \times \frac{3}{س^2} \times \frac{1}{2س^2} = \frac{15}{4س^4}$

(ب) $\frac{ح_4}{ح_5} = \frac{4}{11-4+1} \times \frac{\frac{2س^2}{3}}{\frac{3}{س^2}} = \frac{1}{3}س^4$

(جـ) $\frac{ح_6}{ح_8} = \frac{ح_6}{ح_7} \times \frac{ح_7}{ح_8}$

$= \frac{6}{11-6+1} \times \frac{\frac{2س^2}{3}}{\frac{3}{س^2}} \times \frac{7}{11-7+1} \times \frac{2س^4}{3} = \frac{28}{45}س^8$

(د) $\frac{\text{معامل}\,ح_4}{\text{معامل}\,ح_6} = \frac{\text{معامل}\,ح_4}{\text{معامل}\,ح_5} \times \frac{\text{معامل}\,ح_5}{\text{معامل}\,ح_6}$

$= \frac{4}{11-4+1} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{11-5+1} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{63}$

(6) $\because ح_3 = 2ح_2 \quad \therefore \frac{ح_3}{ح_2} = 2$

$\therefore \frac{12-2+1}{2} \times \frac{س}{1} = 2 \quad ، \quad س = \frac{4}{11}$

(7) $\because \frac{ح_3}{ح_2} = \frac{720}{240} = \frac{3}{1} \quad \therefore \frac{ن-2+1}{2} \times \frac{ب}{1} = 3$

$(ن-١)\left(\frac{ب}{ا}\right)=٦$ (١) ، $\frac{ح_٤}{ح_٣}=\frac{١٠٨٠}{٧٢٠}=\frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ن-٣+١}{٣}\times\frac{ب}{ا}=\frac{٣}{٢}$ ، $٢(ن-٢)\left(\frac{ب}{ا}\right)=٩$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) $\frac{٢(ن-٢)}{ن-١}=\frac{٣}{٢}$

$٤ن-٨=٣ن-٣$ $\boxed{ن=٥}$ ، من (١) $٤ب=٦ا$

$ب=\frac{٣}{٢}ا$ (٣) ∵ $ح_٢=٢٤٠$ ∴ $^٥ق_١ ا^٤ ب=٢٤٠$

∴ $٥\times\frac{٣}{٢}ا\times ا^٤=٢٤٠$ ∴ $ا^٥=٣٢$ ∴ $\boxed{ا=٢}$

من (٣) $ب=\frac{٣}{٢}\times٢$ ∴ $\boxed{ب=٣}$

(٨) $(ا+ب)^ن$ ، $\frac{ح_٣}{ح_٢}=\frac{ن-٢+١}{٢}\times\frac{ب}{ا}$ (١)

، $(ا+ب)^{ن+٣}$ ، $\frac{ح_٤}{ح_٣}=\frac{ن+٣-٣+١}{٣}\times\frac{ب}{ا}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∵ $ح_٣:ح_٢=ح_٤:ح_٣$

∴ $\frac{ن-١}{٢}\times\frac{ب}{ا}=\frac{ن+١}{٣}\times\frac{ب}{ا}$ ، $٣ن-٣=٢ن+٢$

∴ $\boxed{ن=٥}$

(٩) $(١+م س)^ن$

∵ $٤ح_٦=٧ح_٨$ عند س = ١

∴ $\frac{ح_٨}{ح_٦}=\frac{٤}{٧}$ عند س = ١

∴ $\frac{ح_٨}{ح_٧}\times\frac{ح_٧}{ح_٦}=\frac{٤}{٧}$ عند س = ١

∴ $\frac{ن-٧+١}{٧}\times\frac{م}{١}\times\frac{ن-٦+١}{٦}\times\frac{م}{١}=\frac{٤}{٧}$

$(ن-٦)(ن-٥)م^٢=٢٤$ (١)

، ∵ $\frac{ح_٤}{ح_٦}=\frac{١}{٤}$ عند س = ١

∴ $\frac{ح_٦}{ح_٥}\times\frac{ح_٥}{ح_٤}=٤$ عند س = ١

∴ $\frac{ن-٥+١}{٥}\times\frac{م}{١}\times\frac{ن-٤+١}{٤}\times\frac{م}{١}=٤$

∴ $(ن-٤)(ن-٣)م^٢=٨٠$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) ∴ $\frac{ن^٢-٧ن+١٢}{ن^٢-١١ن+٣٠}=\frac{١٠}{٣}$

∴ $١٠ن^٢-١١٠ن+٣٠٠=٣ن^٢-٢١ن+٣٦$

∴ $٧ن^٢-٨٩ن+٢٦٤=٠$ ، $(ن-٨)(٧ن-٣٣)=٠$

$\boxed{ن=٨}$ أو $ن=\frac{٣٣}{٧}$ ونفرض من (٢)

$٤\times٥م^٢=٨٠$ ∴ $م^٢=٤$ ∴ $\boxed{م=\pm٢}$

(١٠) نفرض ان اكبر حد هو $ح_{ر+١}$

∴ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر}\ge١$ ، $\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}}\le١$ ∴ $\frac{١٥-ر+١}{ر}\times\frac{١}{٣}\ge١$

∴ $١٦-ر\ge٣ر$ ∴ $ر\le٤$ (١)

∴ $\frac{١٥-(ر+١)+١}{ر+١}\times\frac{١}{٣}\le١$

$١٥-ر\le٣ر+٣$ ∴ $ر\ge٣$

من (١) و (٢) ∴ ر = ٣ ، ر = ٤

∴ الحدان $ح_٤$ و $ح_٥$ متساويان وهما اكبر حدان

(١١) ∵ $ح_٣$ وسط حسابي بين $ح_٢$ ، $ح_٤$

∴ $٢ح_٣=ح_٢+ح_٤$ بالقسمة على $ح_٣$

∴ $٢=\frac{ح_٤}{ح_٣}+\frac{ح_٢}{ح_٣}$ عند س = ٢ ص

∴ $٢=\frac{ن-٢+١}{٢}\times\frac{ص}{٢ص}+\frac{١}{ن-١+١}\times\frac{٢ص}{ص}$

∴ $٢=\frac{ن-١}{٤}+\frac{٢}{ن}$

بالضرب × ٤ن ∴ $٨ن=ن^٢-ن+٨$

∴ $ن^٢-٩ن+٨=٠$ ، $(ن-٨)(ن-١)=٠$

∴ $\boxed{ن=٨}$ أو ن = ١ مرفوض لوجود $ح_٣$

تمارين كتاب المدرسة العامة (الوحدة الأولى)

(١) $\frac{^نل_ر}{^{ن-١}ل_{ر-١}}=\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}\times\frac{\underline{|ن-ر}}{\underline{|ن-١}}$

$=\frac{ن\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-١}}=ن$ الجواب (أ)

حل آخر : $\frac{ن\times{}^{ن-١}ل_{ر-١}}{^{ن-١}ل_{ر-١}}=ن$ الجواب (أ)

(٢) $\underline{|س-٣}\times{}^سل_٣=٢٠\underline{|س-٢}$

∴ $\underline{|س-٣}\times\frac{\underline{|س}}{\underline{|س-٣}}=٢٠\underline{|س-٢}$

$س(س-١)\underline{|س-٢}=٢٠\underline{|س-٢}$

$\text{س}\text{ل}_{٢} = ٥ \times ٤ = {}^{٥}\text{ل}_{٢}$ ∴ $\text{س} = ٥$ الجواب (ج)

(٣) ∵ ${}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}^{٢}} = {}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}+٢}$

∴ إما $\text{ر}^{٢} = \text{ر} + ٢$ | أو $\text{ر}^{٢} + \text{ر} + ٢ = ١٤$

$\text{ر}^{٢} - \text{ر} - ٢ = ٠$ | $\text{ر}^{٢} + \text{ر} - ١٢ = ٠$

$(\text{ر}-٢)(\text{ر}+١) = ٠$ | $(\text{ر}-٣)(\text{ر}+٤) = ٠$

$\text{ر} = ٢$ أو $\text{ر} = -١$ ونفرض $\text{ر} = ٣$ أو $\text{ر} = -٤$

مرفوض

∴ $\text{ر} = ٢$ أو ٣ الجواب (د)

(٤) $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}} \times \dfrac{\underline{|\text{ن}+١-\text{ر}}}{\underline{|\text{ن}}}$

$= \dfrac{(\text{ن}+١-\text{ر})\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}} = \text{ن} - \text{ر} + ١$ الجواب (ج)

(٥) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١}$ الجواب (ج)

(٦) ${}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} > {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}-١}$ ∴ $\dfrac{{}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}-١}} > ١$

$\dfrac{٩-\text{ر}+١}{\text{ر}} > ١$ ، $١٠ - \text{ر} > \text{ر}$

∴ $١٠ > ٢\text{ر} \div ٢ = ٥ > \text{ر}$ ∴ $\text{ر} < ٥$ الجواب (جـ)

(٧) ${}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{٢} = ٢١٠ = {}^{١٥}\text{ل}_{٢}$ ∴ $\text{س} + \text{ص} = ١٥$ ...... (١)

${}^{\text{ص}-٣}\text{ق}_{٣} = ٣٥$ ∴ $\dfrac{{}^{\text{ص}-٣}\text{ل}_{٣}}{٦} = ٣٥$

∴ ${}^{\text{ص}-٣}\text{ل}_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}\text{ل}_{٣}$ ، $\text{ص} - ٣ = ٧$ ∴ $\text{ص} = ١٠$

من (١) ∴ $\text{س} = ٥$ ∴ $\underline{|٢\text{س} - \text{ص}} = \underline{|٠} = ١$ الجواب (د)

(٨) ∴ ${}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}} > ١$ ∴ $\text{ر} < ٧$

، ∴ ${}^{\text{ر}}\text{ق}_{٥} > ١$ ∴ $\text{ر} > ٥$

∴ $٥ < \text{ر} < ٧$ ، ر عدد صحيح

∴ $\text{ر} = ٦$ ∴ $\underline{|٦-\text{ر}} = \underline{|٠} = ١$ الجواب (ب)

(٩) ∵ $\dfrac{\text{أ}_{٢}+\text{أ}_{٣}}{\text{أ}_{٢}} = ٣$ ∴ $\dfrac{\text{معامل س}^{٢} + \text{معامل س}^{٣}}{\text{معامل س}^{٢}} = ٣$

$\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}} = ٣$ ∴ $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}} + \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}} = ٣$

∴ $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}} = ٢$ ، $\dfrac{\text{ن}-٣+١}{٣} = ٢$

$\text{ن} - ٢ = ٦$ ∴ $\text{ن} = ٨$ الجواب (ج)

(١٠) $١ + {}^{٥}\text{ق}_{١}\left(\dfrac{\text{س}}{٢}\right) + {}^{٥}\text{ق}_{٢}\left(\dfrac{\text{س}}{٢}\right)^{٢} +$

${}^{٥}\text{ق}_{٣}\left(\dfrac{\text{س}}{٢}\right)^{٣} + \cdots\cdots + \left(\dfrac{\text{س}}{٢}\right)^{٥} = \left(١ + \dfrac{\text{س}}{٢}\right)^{٥} = ٤^{٥}$

∴ $١ + \dfrac{\text{س}}{٢} = ٤$ ∴ $\dfrac{\text{س}}{٢} = ٣$ ∴ $\text{س} = ٦$ الجواب (جـ)

(١١) رتبة الحد الأوسط الأول = $\dfrac{٢\text{ن}+٢}{٢} = \text{ن} + ١$

رتبة الحد الأوسط الثانى = $\text{ن} + ٢$ ∴ $\dfrac{\text{ح}_{\text{ن}+٢}}{\text{ح}_{\text{ن}+١}} = ١$

∴ $\dfrac{٢\text{ن}+١-(\text{ن}+١)+١}{\text{ن}+١} \times \dfrac{\text{ب}}{٢ \times \text{أ}} = ١$

$\dfrac{\text{ن}+١}{\text{ن}+١} \times \dfrac{\text{ب}}{٢\text{أ}} = ١$ ∴ $\text{ب} = ٢\text{أ}$ الجواب (ب)

(١٢) $\dfrac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-\text{ر}}} = \dfrac{٤\underline{|٦}}{\underline{|٦-\text{ر}+١}}$

$(٧-\text{ر})\underline{|٦-\text{ر}} = ٤\underline{|٦-\text{ر}}$

$٧ - \text{ر} = ٤$ ∴ $\text{ر} = ٣$ ، $\underline{|\text{ن}-\text{ر}} = ١ \times ٢ \times ٣ = \underline{|٣}$

$\underline{|\text{ن}-٣} = \underline{|٣}$ ، $\text{ن} - ٣ = ٣$ ∴ $\text{ن} = ٦$

(١٣) ∵ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-٢} = ٤٥$ ∴ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ٤٥$

∴ ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٩٠ = ٩ \times ١٠ = {}^{١٠}\text{ل}_{٢}$ ، $\text{ن} = ١٠$ ،

∵ ${}^{\text{م}}\text{ل}_{\text{م}-٣} = ٤$ ∴ $\dfrac{\underline{|\text{م}}}{\underline{|٣}} = ٤$ ∴ $\underline{|\text{م}} = ٤\underline{|٣} = \underline{|٤}$

∴ $\text{م} = ٤$

${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{م}-٢} \div {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{م}-١} = {}^{١٠}\text{ق}_{٢} \div {}^{١٠}\text{ق}_{٣} = \dfrac{٣}{١٠-٣+١} = \dfrac{٣}{٨}$

(١٤) ∵ $\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢) \times .... \times (\text{ن}-\text{ر}+١) = ٥٠٤٠$

∴ ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ٥٠٤٠ = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧$ ∴ ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = {}^{١٠}\text{ل}_{٤}$

∵ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}}$ ∴ $\underline{|\text{ر}} = \dfrac{٥٠٤٠}{٢١٠} = ٢٤$

$\underline{|\text{ر}} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ = \underline{|٤}$ ∴ $\text{ر} = ٤$ ، $\text{ن} = ١٠$.

∴ ${}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٢\text{ر}} = {}^{١١}\text{ق}_{٨} = {}^{١١}\text{ق}_{٣} = \dfrac{١١ \times ١٠ \times ٩}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٦٥$

(١٥) ∵ $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{٦} = ١٢٠$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠ = ١٠ × ٩ × ٨ = {}^{١٠}ل_{٣}$ ∴ ن = ١٠

، ∵ $^{ن}ق_{ر^٢+٢ر} = {}^{ن}ق_{٢ر+٥}$ ∴ $^{١٠}ق_{ر^٢+٢ر} = {}^{١٠}ق_{٢ر+٥}$

أ) $ر^٢ + ٢ر = ٢ر + ٥$ ∴ $ر^٢ = ٥$ ∴ $ر = \sqrt{٥} \notin ط$ ونرفض

أ) $ر^٢ + ٢ر + ٢ر + ٥ = ١٠$ ، $ر^٢ + ٤ر - ٥ = ٠$

(ر - ١) (ر + ٥) = ٠ ، ر = ١ ، أ) ر = -٥ ونرفض

∴ $^{ن}ق_{٧ر+٣} = {}^{١٠}ق_{١٠} = ١$

(١٦) ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٥}{٧}$ ∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٥}{٧}$

٧ن - ٧ر + ٧ = ٥ر ، ٧ن = ١٢ر - ٧ .... (١)

∵ $\frac{^{ن}ل_{ر}}{^{ن}ل_{ر-١}} = ٥$ ، ∴ $\frac{ن!}{(ن-ر)!} × \frac{(ن+١-ر)!}{ن!} = ٥$

∴ $\frac{(ن+١-ر)\,(ن-ر)!}{(ن-ر)!} = ٥$

ن - ر + ١ = ٥ ، ن = ٤ + ر .... (٢)

من (١) : ٢٨ + ٧ر = ١٢ر - ٧ ، ٣٥ = ٥ر

ر = ٧ ، من (٢) ∴ ن = ٤ + ٧ ∴ ن = ١١

(١٧) $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٧}{٤}$ ∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٧}{٤}$

٤ن - ٤ر + ٤ = ٧ر ، ٤ن = ١١ر - ٤ .... (١)

$\frac{^{ن}ق_{ر-١}}{٥ × {}^{ن-١}ق_{ر-٢}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{ن!\,(ر-٢)!\,(ن-ر+٢)!}{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!\,(ن-١)!} = \frac{١٠}{٣}$

$\frac{ن\,(ن-١)!\,(ر-٢)!}{(ر-١)\,(ر-٢)!\,(ن-١)!} = \frac{١٠}{٣}$

٣ن = ١٠ر - ١٠ .... (٢)

(١) × ٣ ، (٢) × ٤ ∴ ٣٣ر - ١٢ = ٤٠ر - ٤٠

٧ر = ٢٨ ∴ ر = ٤

، من (١) ٤ن = ١١ × ٤ - ٤ ، ن = ١٠

العدد الأكبر من ٣٠٠ أما من ٣ أرقام وأكبر من ٣٠٠ أو من ٤ أرقام أو من ٥ أرقام.

(١٨) (أ) عدد الأعداد = ٢ × ٣ × ٥ + ٢ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥

- ٢ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ = ١٥٣٠

(ب) الأعداد من ٣ أرقام وأكبر من ٣٠٠ عندما رقم الآحاد ٢

∴ عدد الأعداد = ١ × ٣ × ٣

، عندما رقم الآحاد ٤ ∴ عدد الأعداد = ١ × ٢ × ٣

∴ عدد الأعداد الأكبر من ٣٠٠ =

= ٩ + ٦ + ٢ × ٤ × ٣ × ٢ + ٢ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١١١ عدداً

(١٩) $ن! = ٧٢٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ = ٦!$

∴ ن = ٦ ، $\frac{^{٧}ق_{ر}}{^{٧}ق_{ر-١}} = \frac{٧ - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٥}$

∴ ٣ر = ٤٠ - ٥ر ، ٨ر = ٤٠ ∴ ر = ٥

$^{ن+١}ق_{ر-٢} = {}^{٧}ق_{٣} = \frac{٧ × ٦ × ٥}{٣ × ٢ × ١} = ٣٥$

(٢٠) هى نفسها في (٢٨) من تمارين (١-١)

(٢١) هى نفسها في (١٢) تمارين (١-١)

(٢٢) ∵ $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} = \frac{ن\,(ن-١)!}{ر\,(ر-١)!\,(ن-ر)!}$

$= \frac{ن}{ر} × {}^{ن-١}ق_{ر-١}$ ∴ $^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ر}{ن} × {}^{ن}ق_{ر}$

∵ $(١+س)^{ن-١} = {}^{ن-١}ق_{٠} + {}^{ن-١}ق_{١}\,س + {}^{ن-١}ق_{٢}\,س^٢ + {}^{ن-١}ق_{٣}\,س^٣$

$+ ..... + {}^{ن-١}ق_{ن-١}\,س^{ن-١}$

بوضع س = ١ في الطرفين

∴ $^{ن-١}ق_{٠} + {}^{ن-١}ق_{١} + {}^{ن-١}ق_{٢} + ... + {}^{ن-١}ق_{ن-١} = ٢^{ن-١}$

∴ $\frac{١}{ن} × {}^{ن}ق_{١} + \frac{٢}{ن} × {}^{ن}ق_{٢} + \frac{٣}{ن} × {}^{ن}ق_{٣} + ... +$

$\frac{ن}{ن} × {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن-١}$

بضرب الطرفين × ن ∴ $^{ن}ق_{١} + ٢ × {}^{ن}ق_{٢} + ٣ × {}^{ن}ق_{٣}$

$+ .... + ن × {}^{ن}ق_{ن} = ن × ٢^{ن-١}$

حل أخر

∵ $(١+س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\,س + {}^{ن}ق_{٢}\,س^٢ + ... + {}^{ن}ق_{ن}\,س^{ن}$

بتفاضل الطرفين بالنسبة الى س

∴ $ن\,(١+س)^{ن-١} = {}^{ن}ق_{١} + ٢\,{}^{ن}ق_{٢}\,س + ٣\,{}^{ن}ق_{٣}\,س^٢ + ... + ن\,{}^{ن}ق_{ن}\,س^{ن-١}$

بوضع س = ١ في الطرفين ثبت المطلوب

(٢٣) $(١+س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١} س + {}^{١٠}ق_{٢} س^{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠} س^{١٠}$

(أ) بوضع س = ١ في الطرفين

∴ $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠} = ٢^{١٠} = ١٠٢٤$

(ب) بوضع س = -١ في الطرفين

∴ $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠} = (٠)^{١٠} =$ صفر

(ج) بوضع س = ٣ في الطرفين

∴ $١ + ٣٠ + ٩ × {}^{١٠}ق_{٢} + ٢٧ × {}^{١٠}ق_{٣} + ... + (٣)^{١٠} = (١ + ٣)^{١٠}$

$= ٤^{١٠} = ١٠٤٨٥٧٦$

---

(٢٤) $ح_{٤} = {}^{ن}ق_{٣} \left(\frac{١}{س}\right)^{٣} (س^{٢})^{ن-٣}$

$ح_{١٣} = {}^{ن}ق_{١٢} \left(\frac{١}{س}\right)^{١٢} (س^{٢})^{ن-١٢}$

∵ معامل $ح_{٤}$ = معامل $ح_{١٣}$ ∴ ${}^{ن}ق_{٣} = {}^{ن}ق_{١٢}$

∴ ن = ١٢ + ٣ ، ن = ١٥

∴ المفكوك هو $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{١٥}$

نفرض أن الحد الخالي من س هو $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{٢})^{١٥-ر}$

يحتوي $س^{٣٠-٣ر} = س^{٠}$ ∴ ر = ١٠

∴ الحد الخالي من س هو $ح_{١١} = {}^{١٥}ق_{١٠} × ١ = {}^{١٥}ق_{٥} = ٣٠٠٣$

---

(٢٥) ∵ $ح_{٣} × ح_{٣} = ح_{٢} × ح_{٥}$ ∴ $\frac{ح_{٥}}{ح_{٣}} = \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}}$

∴ $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}}$

∴ $\frac{ن-٤+١}{٤} × \frac{س}{١} × \frac{ن-٣+١}{٣} × \frac{س}{١} = \frac{ن-٢+١}{٢} × س$

∴ (ن - ٣) (ن - ٢) س = ٦ (ن - ١) عند س = $\frac{٩}{٥}$

∴ $(ن^{٢} - ٥ن + ٦) \frac{٩}{٥} = ٦ (ن - ١)$

$٣ن^{٢} - ١٥ن + ١٨ = ١٠ن - ١٠$

$٣ن^{٢} - ٢٥ن + ٢٨ = ٠$ ، (ن - ٧) (٣ن - ٤) = ٠

ن = ٧

أ، ن = $\frac{٤}{٣}$ مرفوض

---

(٢٦) ∵ $ح_{١٠}$ وسط حسابي بين $ح_{٩}$ ، $ح_{١١}$

∴ $٢ ح_{١٠} = ح_{١١} + ح_{٩}$ عند س = ١

∴ $٢ = \frac{ح_{١١}}{ح_{١٠}} + \frac{ح_{٩}}{ح_{١٠}}$ عند س = ١

$٢ = \frac{ن-١٠+١}{١٠} × \frac{١}{١} + \frac{٩}{ن-٩+١} × \frac{١}{١}$

$٢ = \frac{ن-٩}{١٠} + \frac{٩}{ن-٨}$

بالضرب × ١٠ (ن - ٨) ∴ ٢٠ن - ١٦٠ = (ن-٩) (ن-٨) + ٩٠

$٢٠ن - ١٦٠ = ن^{٢} - ١٧ن + ٧٢ + ٩٠$

$ن^{٢} - ٣٧ن + ٣٢٢ = ٠$ ، (ن - ١٤) (ن - ٢٣) = ٠

ن = ١٤ أ، ن = ٢٣

(ب) ${}^{ن}ل_{٣} = ٢١٨٤$ ، ${}^{٢٣}ل_{٣} = ١٠٦٢٦$ (ج) ⌊٤ = ٢٤

---

(٢٧) ∵ $\frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \frac{٦}{١٤} = \frac{٣}{٧}$ ، $\frac{ن-٧+١}{٧} × \frac{س}{١} = \frac{٣}{٧}$

(ن-٦) × س = ٣ .... (١)

، ∵ $\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{١٤}{٢١} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{ن-٦+١}{٦} × \frac{س}{١} = \frac{٢}{٣}$

∴ (ن - ٥) × س = ٤ .... (٢)

بقسمة (٢) على (١) ∴ $\frac{(ن-٥)}{(ن-٦)} = \frac{٤}{٣}$

٤ن - ٢٤ = ٣ن ÷ ١٥ ، ن = ٢٤ - ١٥ ∴ ن = ٩

من (١) (٩ - ٦) س = ٣ ∴ ٣ س = ٣ ∴ س = ١

---

(٢٨) نفرض ان الحدود هي: $ح_{ر}$، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

∴ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{٦}{١٥}$ ، $\frac{٢٧-ر+١}{ر} × \frac{ك}{س^{٢}} = \frac{٢}{٥}$

$٥ ك (٢٨ - ر) = ٢ ر س^{٢}$ (١)

$\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}} = \frac{٢}{٦}$ ∴ $\frac{٢٧-ر}{ر+١} × \frac{ك}{س^{٢}} = \frac{١}{٣}$

∴ $٣ ك (٢٧ - ر) = (ر + ١) س^{٢}$ (٢)

بقسمة ا(١) على (٢)

∴ (ر + ١) (٢٨ - ر) = ٦ ر (٢٧ - ر)

∴ $ر^{٢} - ٢٧ ر + ١٤٠ = ٠$ ، (ر - ٢٠) (ر - ٧) = ٠

∴ ر = ٢٠ أو ر = ٧

∴ الحدود هي $ح_{٢٠}$، $ح_{٢١}$، $ح_{٢٢}$ أو $ح_{٧}$، $ح_{٨}$، ح،

نفرض ان الحد الخالي من س هو $ح_{ر+١}$

$\therefore ح_{ر+١} = ٢٧ق_ر \left(\frac{ك}{س^٢}\right)^ر (س)^{٢٧-ر}$

$٢٧ - ٣ر = ٠ \quad \therefore ر = ٩$

$\therefore$ الحد الخالي من س $= ٢٧ق_٩ \times ك^٩$

(٢٩) $(١ + م س)^ن$

$\because ح_٢ = -\frac{١٠}{٣}س \quad \therefore ن ق_١ (م س) = -\frac{١٠}{٣}س$

$٣ن م س = -١٠ س$ ، $٣ن م = -١٠$ .... (١)

، $ن ق_٢ (م س)^٢ = ٥س^٢$ ، $\frac{ن(ن-١)}{٢\times١} \times م^٢ س^٢ = ٥س^٢$

$ن(ن-١) م^٢ = ١٠$ .... (٢)

بتربيع طرف (١) $\therefore ٩ن^٢م^٢ = ١٠٠$ .... (٣)

بقسمة (٣) على (٢) $\frac{٩ن^٢م^٢}{ن(ن-١)م^٢} = \frac{١٠٠}{١٠}$

$\therefore ١٠ن - ١٠ = ٩ن \quad \therefore ن = ١٠$

من (١) $\therefore م = \frac{-١٠}{٣\times١٠} = -\frac{١}{٣}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٠+٢}{٢} = ٦$

$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (م س)^٥$ عند س = ٣

${}^{١٠}ق_٥ \left(-\frac{١}{٣}\times٣\right)^٥ = -٢٥٢$

(٣٠) نفرض أن الحد الخالي من س هو $ح_{ر+١}$ من المفكوك الأول

$ح_{ر+١} = {}^{٢١}ق_ر \left(\frac{-٣}{س}\right)^ر (٢س^٢)^{٢١-ر}$

يحتوى $س^{٤٢-٣ر} = س^٠ \quad \therefore ر = ١٤ \quad \therefore$ الحد هو $ح_{١٥}$

من المفكوك الثانى: $ح_{١٥} = {}^{٢ن}ق_{١٤} \left(\frac{١}{س}\right)^{١٤} (س)^{٢ن-١٤}$

يحتوى $س^{٢ن-٢٨} = س^٠ \quad \therefore ن = ١٤$

من المفكوك الأول

رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{٢١+١}{٢} = ١١$

رتبة الحد الأوسط الثانى $= \frac{٢١+٣}{٢} = ١٢$

النسبة المطلوبة هى $= \frac{ح_{١٢}}{ح_{١١}} = \frac{٢١-١١+١}{١١} \times \frac{\frac{-٣}{س}}{٢س^٢}$

$= \frac{-٣}{س} \times \frac{١}{٢س^٢} = -\frac{٣}{٢س^٣}$

عند س = -١ $= -\frac{٣}{٢(-١)^٣} = \frac{٣}{٢}$

(٣١) نفرض أن الحد المحتوى $س^٥$ هو $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = {}^{١٣}ق_ر \left(\frac{١}{٢س}\right)^ر (٤س^٢)^{١٣-ر}$

يحتوى $س^{٢٦-٣ر} = س^٥ \quad \therefore ٢٦ - ٣ر = ٥ \quad \therefore ر = ٧$

الحد هو $ح_٧$ بوضع س = ١

$\therefore$ معامل $س^٥$ = معامل $ح_٧ = {}^{١٣}ق_٧ \left(\frac{١}{٢}\right)^٧ (٤)^٦$

$= {}^{١٣}ق_٧ \times ٢^٥ = ٥٤٩١٢$

رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{١٣+١}{٢} = ٧$

رتبة الحد الأوسط الثانى = ٨

$\because ح_٨ = ح_٧ \quad \therefore \frac{ح_٨}{ح_٧} = ١ \quad \therefore \frac{١٣-٧+١}{٧} \times \frac{\frac{١}{٢س}}{٤س^٢} = ١$

$\therefore \frac{١}{٨س^٣} = ١ \quad \therefore س = \frac{١}{٢}$

نفرض أن الحد الخالي من س هو $ح_{ر+١}$ يحتوى $س^{٢٦-٣ر} = س^٠$

$\therefore ٢٦-٣ر = ٠ \quad \therefore ر = \frac{٢٦}{٣} \notin ط$

$\therefore$ لا يوجد فى هذا المفكوك حد خالى من س.

(٣٢) نفرض أن الحدود هى $ح_ر$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_ر} = \frac{٢١}{٣٥} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore \frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{١}{١} = \frac{٣}{٥} \quad \therefore ٥ن - ٥ر + ٥ = ٣ر$

$\therefore ٥ن = ٨ر - ٥$ .... (١)

، $\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+٢}}{\text{معامل } ح_{ر+١}} = \frac{٧}{٢١} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{٣}$

$٣ن - ٣ر = ر + ١$ ، $٣ن = ٤ر + ١$ .... (٢)

لامي

بضرب (١) × ٣ ، (٢) × ٥ ، ٢٤ر − ١٥ = ٢٠ر + ٥

∴ ر = ٥

٤ر = ٢٠

من (١) ∴ ٥ن = ٨ × ٥ − ٥ ∴ ن = ٧

والحدود هي : $ح_٥$ ، $ح_٦$ ، $ح_٧$

---

(٣٣) رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٠+٢}{٢} = ٦$ ، $\frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{١}{٢}$

$∴ \frac{١٠-٦+١}{٦} \times \frac{س}{١} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥س}{٦} = \frac{١}{٢}$ ∴ $س = \frac{٣}{٥}$

---

(٣٤) $\left(س^٢ + \frac{١}{س}\right)^ن$

نفرض أن الحد الخالي من س هو $ح_{ر+١}$

$∴ ح_{ر+١} = {}^ن ق_ر \left(\frac{١}{س}\right)^ر (س^٢)^{ن-ر}$

يحتوى $س^{٢ن-٣ر} = س^{صفر}$ ∴ $ر = \frac{٢}{٣}ن \in ط$

∴ ن لابد أنها ٣ أو مضاعفاً لها.

عند ن = ١٢ ∴ $ر = \frac{٢\times١٢}{٣} = ٨$

الحد هو $ح_٩ = {}^{١٢}ق_٨ \times ١ \times ١ = {}^{١٢}ق_٤$

$= \frac{١٢\times١١\times١٠\times٩}{٤\times٣\times٢\times١} = ٤٩٥$

---

(٣٥) رتبة الحد الأوسط الأول = $\frac{١٧+١}{٢} = ٩$

رتبة الحد الأوسط الثاني = ١٠

$∵ ح_{١٠} = ح_٩$ ∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_٩} = ١$

$∴ \frac{١٧-٩+١}{٩} \times \frac{٣}{٢س} = ١$ ∴ س = ١,٥

---

(٣٦) رتبة الحد الأوسط الأول = $\frac{١٥+١}{٢} = ٨$

رتبة الحد الأوسط الثاني = ٩

الأيمن = أ + ب $س^٢$ = $ح_٨ + س^٢ \times ح_٩$

$= {}^{١٥}ق_٧ \left(\frac{-١}{س}\right)^٧ (س)^٨ + س^٢ \times {}^{١٥}ق_٨ \left(\frac{-١}{س}\right)^٨ س^٧$

$= {}^{١٥}ق_٧ \left(\frac{-١}{س}\right)^٧ (س)^٧ [س - س] = ٠$ = الأيسر

---

(٣٧) $∵ \frac{ح_٦}{ح_٤} = \frac{٨}{٢٧}$ ∴ $\frac{ح_٦}{ح_٥} \times \frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{٨}{٢٧}$ عند س = ١

$$∴ \frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{\frac{٢\times١}{٣}}{\frac{٣}{٢}} \times \frac{ن-٤+١}{٤} \times \frac{\frac{٢\times١}{٣}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{٨}{٢٧}$$

$$∴ \frac{(ن-٤)(ن-٣)}{٥\times٤} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٨}{٢٧}$$

∴ (ن − ٤) (ن − ٣) = ٣٠ = ٥ × ٦

$∴ {}^{ن-٣}ل_٢ = {}^٦ل_٢$ ∴ ن − ٣ = ٦ ∴ ن = ٩

---

(٣٨) ∴ $ح_٣ = ح_٦$

$$∴ {}^٧ق_٢ \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ (٢س^٢)^٥ = {}^٧ق_٥ \left(\frac{١}{٢}\right)^٥ (٢س^٢)^٢$$

، $∵ {}^٧ق_٥ = {}^٧ق_٢$ ∴ $(٢س^٢)^٣ = \left(\frac{١}{٢}\right)^٣$ ∴ $٢س^٢ = \frac{١}{٢}$

$∴ س^٢ = \frac{١}{٤}$ ∴ $س = \pm\frac{١}{٢}$

---

(٣٩) $∵ ح_٥ = ح_٦$ ∴ $\frac{ح_٦}{ح_٥} = ١$

$\frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{س}{١} = ١$ ،

(ن − ٤) س = ٥ .... (١)

، $∵ \frac{ح_٤}{ح_٢} \times \frac{٢٥}{٣}$ ∴ $\frac{ح_٣}{ح_٢} \times \frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{٢٥}{٣}$

$$∴ \frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{س}{١} \times \frac{ن-٢+١}{٢} \times \frac{س}{١} = \frac{٢٥}{٣}$$

∴ (ن−٢) (ن−١) $س^٢$ = ٥٠ .... (٢)

بتربيع طرف (١) ∴ $(ن-٤)^٢ س^٢ = ٢٥$ .... (٣)

بقسمة (٢) على (٣)

$$∴ \frac{ن^٢ - ٣ن + ٢}{ن^٢ - ٨ن + ١٦} = \frac{٢}{١}$$

∴ $٢ن^٢ - ١٦ن + ٣٢ = ن^٢ - ٣ن + ٢$

∴ $ن^٢ - ١٣ن + ٣٠ = ٠$ ،

(ن − ١٠) (ن − ٣) = ٠

ن = ١٠ أ، ن = ٣ مرفوض لوجود $ح_٥$ أي ن ≥ ٥

من (١) ∴ ٦س = ٥ ∴ $س = \frac{٥}{٦}$

(٤٠) $م_١$ = معامل س ، $م_٢$ = معامل $س^٢$ وهكذا

∴ $^{ن}ق_١$ جـ س = ١٢ س ∴ ن جـ = ١٢ ....(١)

= معامل $ح_٢$

∵ $\frac{م_٤}{م_٣} = ٤$ ∴ $\frac{م_٤}{م_٣} \times \frac{م_٣}{م_٢} = \frac{١٥}{٢}$

∴ $\frac{ن-٤+١}{٤} \times \frac{جـ}{١} \times \frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{جـ}{١} = \frac{١٥}{٢}$

∴ (ن-٣) (ن-٢) $جـ^٢$ = ٩٠ .... (٢)

بتربيع طرفي (١) ∴ $ن^٢جـ^٢$ = ١٤٤ .... (٣)

بقسمة (٣) على (٢)

∴ $\frac{ن^٢ جـ^٢}{(ن^٢ - ٥ن + ٦) جـ^٢} = \frac{٨}{٥}$

$٨ن^٢ - ٤٠ن + ٤٨ = ٥ن^٢$ ، $٣ن^٢ - ٤٠ن + ٤٨ = ٠$

(ن-١٢) (٣ن-٤) = ٠ ، ن = ١٢ أو ن = $\frac{٤}{٣}$ مرفوض

من (١) ١٢ جـ = ١٢ ∴ جـ = ١

---

(٤١) $ح_٣$ = ١١٢ ، $ح_٤$ = ٤٤٨ ، $ح_٥$ = ١١٢٠

∴ $\frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{٤٤٨}{١١٢} = ٤$

∴ $\frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{ص}{س} = ٤$

(ن-٢) $\left(\frac{ص}{س}\right)$ = ١٢ .... (١)

، $\frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{١١٢٠}{٤٤٨} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

∴ $\frac{ن-٤+١}{٤} \times \left(\frac{ص}{س}\right) = \frac{٥}{٢}$

(ن-٣) $\left(\frac{ص}{س}\right)$ = ١٠ .... (٢)

بقسمة (٢) على (١) $\frac{ن-٣}{ن-٢} = \frac{٥}{٦}$

٦ن - ١٨ = ٥ن - ١٠ ∴ ن = ٨

من (١) $\frac{ص}{س}$ = ٢ ∴ ص = ٢س ∴ $ح_٣$ = ١١٢

∴ $^{٨}ق_٢ ص^٢ س^٦ = ١١٢$

$\frac{٨ \times ٧}{٢ \times ١} \times ٤س^٢ \times س^٦ = ١١٢$

$س^٨ = ١$ ∴ س = ± ١ ، ص = ± ٢

---

(٤٢) رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢+٢}{٢} = ٧$

$ح_٧ = {^{١٢}ق_٦} \left(\frac{٣}{٢س^٢}\right)^٦ \left(\frac{٢س}{٣}\right)^٦ = ٩٢٤ س^{-٦}$

نفرض أن الحد المشتمل على $س^٣$ هو $ح_{ر+١}$

∵ $ح_{ر+١} = {^{١٢}ق_ر} \left(\frac{٣}{٢س^٢}\right)^ر \left(\frac{٢س}{٣}\right)^{١٢-ر}$

يحتوي $س^{-٢ر+١٢-ر} = س^٣$

∴ ١٢ - ٣ر = ٣ ، ر = ٣

∴ الحد المشتمل على $س^٣$ هو $ح_٤$

∴ $ح_٤ = {^{١٢}ق_٣} \left(\frac{٣}{٢س^٢}\right)^٣ \left(\frac{٢س}{٣}\right)^٩$

$= {^{١٢}ق_٣} \times \frac{٢^٦}{٣^٦} س^٣ = \frac{١٤٠٨٠}{٧٢٩} س^٣$

---

(٤٣) المفكوك = ٢ ($ح_١$ + $ح_٣$ + $ح_٥$) من المفكوك الأول

$= ٢\Big[{^{٦}ق_١} \left(\frac{١}{س}\right)^١ (س^٥) + {^{٦}ق_٣} \left(\frac{١}{س}\right)^٣ (س)^٣$

$+ {^{٦}ق_٥} \left(\frac{١}{س}\right)^٥ (س)^١ \Big]$

∴ الحد الخالي من س = ٢ × $^{٦}ق_٣$ = ٤٠

---

(٤٤) ∵ $ح_٩ = ح_{١٠}$ ∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_٩} = ١$

∴ $\frac{ن-٩+١}{٩} \times \frac{\frac{٣}{س^٢}}{\frac{٢س}{١}} = ١$ ، $\frac{(ن-٨)}{٩} \times \frac{٣}{س^٢ \times ٢س} = ١$

(ن-٨) = ٦ $س^٣$ .... (١) ، ∵ $\frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{١٥}{٨}$

∴ $\frac{ن-٦+١}{٦} \times \frac{\frac{٣}{س^٢}}{\frac{٢س}{١}} = \frac{١٥}{٨}$ ، $\frac{ن-٥}{٦} \times \frac{٣}{٢س^٣} = \frac{١٥}{٨}$

٢(ن-٥) = ١٥ $س^٣$ .... (٢)

بقسمة (١) على (٢) $\frac{(ن-٨)}{٢(ن-٥)} = \frac{٢}{٥}$

∴ ٥ن - ٤٠ = ٤ن - ٢٠ ∴ ن = ٢٠

∴ المفكوك هو $\left(٢س + \frac{٣}{س^٢}\right)^{٢٠}$

نفرض أن الحد الخالي من س هو $ح_{ر+١}$

$\because \text{ح}_{ر+١} = {}^{٢٠}\text{ق}_{ر} \left(\frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)^{ر} (٢\text{س})^{٢٠-ر}$

يحتوى $\text{س}^{-٢ر+٢٠-ر} = \text{س}^{\text{صفر}}$

$٢٠ - ٣ر = ٠ \quad \therefore ر = ٦\frac{٢}{٣} \notin ط$

∴ هذا المفكوك مرفوض لا يحتوى حداً خالى من س.

(٤٥) نفرض أن الحد المحتوى $\text{س}^{١٠}$ هو $\text{ح}_{ر+١}$

$\because \text{ح}_{ر+١} = {}^{١٥}\text{ق}_{ر} \left(\frac{ج}{\text{س}^{٣}}\right)^{ر} (\text{س}^{٢})^{١٥-ر}$

يحتوى $\text{س}^{-٣ر+٣٠-٢ر} = \text{س}^{١٠}$ ، $٣٠ - ٥ر = ١٠$ $\quad ر = ٤$

معامل $\text{س}^{١٠} = {}^{١٥}\text{ق}_{٤}\, ج^{٤}$ .... (١)

نفرض أن الحد المحتوى $\text{س}^{١٥}$ هو $\text{ح}_{ر+١}$

يحتوى $\text{س}^{٣٠-٥ر} = \text{س}^{١٥}$ $\quad \therefore ٣٠ - ٥ر = ١٥ \quad \therefore ر = ٣$

∴ معامل $\text{س}^{١٥} = {}^{١٥}\text{ق}_{٣}\, ج^{٣}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) $\quad \therefore {}^{١٥}\text{ق}_{٤}\, ج^{٤} = ٢\, {}^{١٥}\text{ق}_{٣}\, ج^{٣}$

$ج = \frac{٢ \times {}^{١٥}\text{ق}_{٣}}{{}^{١٥}\text{ق}_{٤}} = \frac{٢}{٣} \qquad \therefore ج = \frac{٢}{٣}$

(٤٦) نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{ر+١}$

$\because \text{ح}_{ر+١} = {}^{١٥}\text{ق}_{ر} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{ر} (\text{س}^{٢})^{١٥-ر}$

يحتوى $\text{س}^{-ر+٣٠-٢ر} = \text{س}^{\text{صفر}}$

$٣٠ - ٣ر = ٠ \qquad \therefore ر = ١٠$

الحد الخالى من س $= \text{ح}_{١١} = {}^{١٥}\text{ق}_{١٠}$ .... (١)

رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٥+١}{٢} = ٨$

رتبة الحد وسط الثانى = ٩

معامل $\text{ح}_{٨}$ + معامل $\text{ح}_{٩} = {}^{١٥}\text{ق}_{٧} + {}^{١٥}\text{ق}_{٨} = {}^{١٦}\text{ق}_{٨}$

النسبة $= \frac{{}^{١٥}\text{ق}_{١٠}}{{}^{١٦}\text{ق}_{٨}} = \frac{\lfloor ١٥}{\lfloor ٥ \lfloor ١٠} \times \frac{\lfloor ٨ \lfloor ٨}{\lfloor ١٦}$

$= \frac{\lfloor ١٥ \times \lfloor ٨ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times \lfloor ٥}{١٠ \times ٩ \times \lfloor ٨ \times \lfloor ٥ \times ١٦ \lfloor ١٥} = \frac{٧}{٣٠}$

(٤٧) (أ) نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{ر+١}$

$\because \text{ح}_{ر+١} = {}^{٨}\text{ق}_{ر} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{ر} \times (\text{س}^{ك})^{٨-ر}$

يحتوى $\text{س}^{-ر+٨ك-كر} = \text{س}^{\text{صفر}}$

$٨ك - كر = ر \qquad ك(٨-ر) = ر$

$\therefore ك = \frac{ر}{٨-ر}$ ، $ر \leq ٨$ ، $ر \geq ٠$.

بوضع ر = ٠ $\quad \therefore ك = ٠$ مرفوض

بوضع ر = ١ $\quad \therefore ك = \frac{١}{٧}$ مرفوض

بوضع ر = ٢ $\quad \therefore ك = \frac{١}{٣}$ مرفوض

بوضع ر = ٣ $\quad \therefore ك = \frac{٣}{٥}$ مرفوض

بوضع ر = ٤ $\quad \therefore ك = ١$

بوضع ر = ٥ $\quad \therefore ك = \frac{٥}{٣}$ مرفوض

بوضع ر = ٦ $\quad \therefore ك = ٣$

بوضع ر = ٧ $\quad \therefore ك = ٧$

قيم ك التى تجعل للمفكوك حد خالى من س هى ١ ، ٣ ، ٧

(ب) عندما ك = ٧ $\quad \therefore ر = ٧$

الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{٨} = {}^{٨}\text{ق}_{٧} = ٨$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٨+٢}{٢} = ٥$

معامل الحد الأوسط $= {}^{٨}\text{ق}_{٤} \times ١ \times ١ = ٧٠$

النسبة هى $= \frac{٨}{٧٠} = \frac{٤}{٣٥}$

(٤٨) الأيمن (أ) $\frac{أ_{١}}{١} + \frac{٢ \times أ_{٢}}{أ_{١}} + \frac{٣ \times أ_{٣}}{أ_{٢}} + \dots + \frac{ن \times أ_{ن}}{أ_{ن-١}}$

$= \frac{ن-١+١}{١} + ٢ \times \frac{ن-٢+١}{٢} + ٣ \times \frac{(ن-٣+١)}{٣}$

$+ \dots\dots\dots\dots + ن + \frac{ن-ن+١}{ن}$

$= ن + (ن-١) + (ن-٢) + ... + ١ = \frac{ن(ن+١)}{٢} =$ الأيسر

(ب) ∴ $(١+س)^{ن} = أ_{٠} + أ_{١}س + ... + أ_{ن}س^{ن}$ بوضع س = ٢

فى الطرفين ∴ $أ_{٠} + ٢أ_{١} + ٤أ_{٢} + ٨أ_{٣} + ... + ٢^{ن}أ_{ن} = ٣^{ن}$.

---

(٤٩) $ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢} \left(\frac{١}{ص^{٢}}\right)^{٢} (٢س)^{ن-٢}$

يحتوى $س^{-١+ن-٢} = س^{٠}$ ∴ ن = ٦ ، $ح_{٣} = {}^{٦}ق_{٢} = ١٥$

$ح_{٢}$ من مفكوك $(١ + ص^{٢})^{٣٠} = {}^{٣٠}ق_{١} ص^{٢} = ١٥$

∴ $٣٠ ص^{٢} = ١٥$ ∴ $ص^{٢} = \frac{١}{٢}$ ، $ص = \frac{١}{\sqrt[٢]{٢}}$

---

(٥٠) رتبة الحد الأوسط = $\frac{٨ + ٢}{٢} = ٥$

معامل الحد الأوسط = $ {}^{٨}ق_{٤} (١)^{٤} \left(\frac{١}{أ}\right)^{٤} = ٧٠ أ^{-٤}$ ....(٢)

نفرض أن الحد المحتوى $س^{١٠}$ هو $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \left(\frac{١}{أس}\right)^{ر} (س ٢)^{٨-ر}$

يحتوى $س^{-ر+١٦-٢ر} = س^{١٠}$

$١٦ - ٣ر = ١٠$ ر = ٢

∴ معامل $ح_{٣} = {}^{٨}ق_{٢} \left(\frac{١}{أ}\right)^{٢} = ٢٨ أ^{-٢}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{٧٠}{أ^{٤}} = \frac{٢٨}{أ^{٢}}$

$أ^{٢} = \frac{٧٠}{٢٨} = \frac{٥}{٢} = \frac{١٠}{٤}$ ، $أ = \pm \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$

---

(٥١) نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+١}$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{١٤}ق_{ر} \left(-\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{٢})^{١٤-ر}$

يحتوى $س^{-ر+٢٨-٢ر} = س^{٠}$

∴ $٢٨ - ٣ر = ٠$ ∴ $ر = ٩\frac{١}{٣} \notin ط$ مرفوضة

∴ لا يوجد حد خالى من س فى هذا المفكوك

$\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{١٤-٦+١}{٦} \times \frac{-\frac{١}{س}}{س^{٢}}$ عند س = -١

$= \frac{٩}{٦} \times \frac{١}{١} = \frac{٣}{٢}$

---

(٥٢) نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+١}$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \left(-\frac{١}{٣س}\right)^{ر} (٩س^{٢})^{٩-ر}$

يحتوى $س^{-ر+١٨-٢ر} = س^{٠}$

∴ $١٨ - ٣ر = ٠$ ∴ ر = ٦

الحد هو $ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٦} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٦} (٩)^{٣} = \frac{٩\times٨\times٧}{٣\times٢\times١} = ٨٤$

رتبة الحد الأوسط الأول = $\frac{٩+١}{٢} = ٥$

رتبة الحد الثانى = ٦

$\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{٩-٥+١}{٥} \times \frac{-\frac{١}{٣س}}{٩س^{٢}}$ عند س = $\frac{١}{٣}$ $= \frac{٥}{٥} \times \frac{١}{١} = ١$

∴ الحدان الأوسطان متساويان عند س = $\frac{١}{٣}$.

---

(٥٣) نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+١}$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{٢})^{٩-ر}$

يحتوى $س^{-ر+١٨-٢ر} = س^{٠}$ ∴ ر = ٦

∴ الحد هو $ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٦} = ٨٤$ ∴ $\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{٩}{٤}$

$\frac{٩-٦+١}{٦} \times \frac{\frac{١}{س}}{س^{٢}} = \frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٤}{٦} \times \frac{١}{س^{٣}} = \frac{٩}{٤}$

$٢٧ س^{٣} = ٨$ ∴ $س = \frac{٢}{٣}$

---

(٥٤) نفرض أن الحد المحتوى $س^{٣ن}$ هو $ح_{ر+١}$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{٢})^{٣ن-ر}$

يحتوى $س^{-ر+٦ن-٢ر} = س^{٣ن}$ $ن - ٣ر = ٣ن$

∴ ر = ن   معامل $س^{٣ن} = {}^{٣ن}ق_{ن}$

عند ن = ٦ المفكوك هو $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٨}$

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٨+٢}{٢} = ١٠$

معامل الحد الأوسط = ${}^{١٨}ق_{٩}$

∴ $\frac{\text{معامل } س^{٣ن}}{\text{معامل الحد الأوسط}} = \frac{{}^{١٨}ق_{٦}}{{}^{١٨}ق_{٩}} = \frac{٢١}{٥٥}$

(1) ∵ معامل $ح_{ر+1}$ = معامل $ح_{2ر+3}$

$^{17}ق_{ر}\,(1)^{ر} = {}^{17}ق_{2ر+2} \times (1)^{3ر+2}$

∴ $^{17}ق_{ر} = {}^{17}ق_{2ر+2}$ ∴ $ر + 2ر + 2 = 17$

$5ر = 15$ $ر = 3$ الجواب (أ)

---

(2) رتبة الحد الأوسط الأول = $\frac{27+1}{2} = 14$

رتبة الحد الأوسط الثانى = 15

$\frac{ح_{15}}{ح_{14}} = \frac{27-14+1}{14} \times \frac{س}{1} = \frac{1}{3}$ ، $س = \frac{1}{3}$

الجواب (جـ)

---

(3) $2\,(ح_2 + ح_4 + ح_6)$

$=2\left[{}^{5}ق_{1} \times (1) \times (1)^{1} \times (\sqrt{2})^{4} + {}^{5}ق_{3}\,(1)^{3}\,(\sqrt{2})^{2} + {}^{5}ق_{5}\,(1)^{0}\right]$

$=2\left[5 \times 1 \times 4 + 10 \times 2 + 1\right] = 2 \times 41 = 82$

الجواب (ب)

---

(4) $ح_4 = {}^{6}ق_{3} \left(\frac{س}{3}\right)^{3} \left(\frac{س}{3}\right)^{3} = 20$ الجواب (جـ)

---

(5) $(2-س)^{5}\,(2+س)^{5} = (4-س^{2})^{5}$

الحد الأخير = $ح_6 = {}^{5}ق_{5}\,(-س^{2})^{5} = -س^{10}$ الجواب (جـ)

---

(6) الأيمن = $\frac{{}^{ن}ق_{ر} \times س^{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1} \times س^{ر-1}}$ ، $\frac{ن-ر+1}{ر} \times س$

∵ معامل $ح_{13}$ = معامل $ح_{14}$ ∴ $^{ن}ق_{12} \times 1 = {}^{ن}ق_{13} \times 1$

∴ $ن = 12 + 13 = 25$ ∴ المفكوك هو $(1 + س)^{25}$

∵ $\frac{ح_7}{ح_5} = \frac{7}{8}$ ∴ $\frac{ح_7}{ح_6} \times \frac{ح_6}{ح_5} = \frac{7}{8}$

$\frac{25-6+1}{6} \times \frac{س}{1} \times \frac{25-5+1}{5} \times \frac{س}{1} = \frac{7}{8}$

$\frac{20}{6} \times \frac{21}{5} س^{2} = \frac{7}{8}$ ∴ $س^{2} = \frac{1}{16}$ ∴ $س = \pm \frac{1}{4}$

---

(7) (أ) $^{ن+1}ق_{3} = (ن+1)\,(ن+5)$

∴ $\frac{(ن+1) \times ن \times (ن-1)}{6} = (ن+1)(ن+5)$

∴ $ن^{2} - ن = 6ن + 30$ ، $ن^{2} - 7ن - 30 = 0$

$(ن - 10)\,(ن + 3) = 0$ ∴ $ن = 10$ أ، $ن = -3$ مرفوض

(ب) نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+1}$

∴ $ح_{ر+1} = \frac{1}{س^{2}} \times {}^{10}ق_{ر} \left(\frac{1}{س^{3}}\right)^{ر} (س)^{10-ر}$

يحتوى $س^{-2+10-4ر} = س^{صفر}$

∴ $8 - 4ر = 0$ ∴ $ر = 2$

∴ الحد الخالى من س = $ح_3$ = $\frac{1}{1} \times {}^{10}ق_{2} \times 1 = 45$

---

(8) $ح_2 = -\frac{1}{4}س$ ∴ $^{ن}ق_{1}\,(-م\,س) = -\frac{1}{4}س$

∴ $-ن\,م\,س = -\frac{1}{4}\,س$ ، $4ن\,م = 1$ .... (1)

، $ح_3 = \frac{3}{100}س^{2}$ ∴ $^{ن}ق_{2}\,(-م\,س)^{2} = \frac{3}{100}س^{2}$

∴ $\frac{ن(ن-1)}{2 \times 1} \times م^{2}س^{2} = \frac{3}{100}س^{2}$

$50ن\,(ن-1)\,م^{2} = 3$ .... (2)

بتربيع الطرفين فى (1) ∴ $16ن^{2}م^{2} = 1$ ....(3)

بقسمة 2 على 3 $\frac{50ن(ن-1)م^{2}}{16ن^{2}م^{2}} = \frac{3}{1}$

$50ن - 50 = 48ن$ ، $2ن = 50$ ∴ $ن = 25$

من (1) $4 \times 25\,م = 1$ ∴ $م = 0.01$

---

(9) العدد الأقل من 400 لابد أن رقم المئات أقل من 4 أى من بين 1، 2، 3

أولاً: عدد الأعداد = $5 + 5 \times 5 + 3 \times 5 \times 5 = 105$

ثانياً: عدد الأعداد = $5 + 20 + 3 \times 4 \times 3 = 61$ عدداً

(١٠) $\because \frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٦}=\frac{١١}{٢٤}$ $\therefore \frac{\text{ن}-٦+١}{٦}\times\frac{\frac{٢}{٣\text{س}}}{\frac{٣\text{س}}{٢}}=\frac{١١}{٢٤}$

$(\text{ن}-٥)\times\frac{٢}{٣\text{س}}\times\frac{٢}{٣\text{س}}=\frac{١١}{٤}$

$١٦(\text{ن}-٥)=٩٩\text{س}^٢$ .... (١)

، $\because \frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٥}=\frac{٢٤}{٤٠}=\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{\text{ن}-٥+١}{٥}\times\frac{٢}{٣\text{س}}\times\frac{٢}{٣\text{س}}=\frac{٣}{٥}$

$٤(\text{ن}-٤)=٢٧\text{س}^٢$ .... (٢)

بقسمة (٢) على (١) $\frac{٤(\text{ن}-٤)}{١٦(\text{ن}-٥)}=\frac{٢٧\text{س}^٢}{٩٩\text{س}^٢}$

$١٢\text{ن}-٦٠=١١\text{ن}-٤٤$ ، $\text{ن}=١٦$ من (٢)

$٤\times١٢=٢٧\text{س}^٢$ ، $\text{س}^٢=\frac{٤\times١٢}{٢٧}=\frac{١٦}{٩}$ ، $\text{س}=\pm\frac{٤}{٣}$

المجموعة الرابعه :

(١) $\text{ح}_٣={}^{\text{ن}}\text{ق}_٢\left(-\frac{١}{٢}\right)^٢\text{س}^{\text{ن}-٢}$ بوضع س=١

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_٢\times\frac{١}{٤}=٧$ $\quad {}^{\text{ن}}\text{ق}_٢=٢٨$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_٢=٥٦=٨\times٧={}^{٨}\text{ل}_٢$ $\therefore \text{ن}=٨$ ، رتبة الحد الأوسط $=\frac{٨+٢}{٢}=٥$

$\therefore \text{ح}_٥={}^{٨}\text{ق}_٤\left(\frac{١}{٢}\right)^٤\text{س}^٤=\frac{٣٥}{٨}\text{س}^٤$

(٢) نفرض أن الحد الخالى من س هو

$\text{ح}_{\text{ر}+١}={}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}}\left(-\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}\times(\text{س}^٢)^{١٤-\text{ر}}$

يحتوى $\text{س}^{-\text{ر}+٢٨-٢\text{ر}}=\text{س}^{\text{صفر}}$ فرضاً لأن الحد خالى من س فرضاً

$\therefore ٢٨-٣\text{ر}=٠$ $\quad \text{ر}=٩\frac{١}{٣}\notin$ ط مرفوض

$\therefore$ هذا المفكوك لا يحتوى حد خالى من س.

$\frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٦}=\frac{١٤-٦+١}{٦}\times\frac{\frac{-١}{\text{س}}}{\text{س}^٢}$ $\therefore$ عند س = ١

$\frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٦}=\frac{٩}{٦}\times\frac{-١}{-١}=\frac{٣}{٢}$

(٣) نفرضأن الحد المحتوى $\text{س}^{١٦}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+١}={}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}(\text{س}^٣)^{٨-\text{ر}}$

يحتوى $\text{س}^{-\text{ر}+٢٤-٣\text{ر}}=\text{س}^{١٦}$ $\therefore ٢٤-٤\text{ر}=١٦$ $\therefore \text{ر}=٢$

معامل $\text{س}^{١٦}={}^{٨}\text{ق}_٢\times\text{أ}^٢\times١^٦=\frac{٨\times٧}{٢\times١}\text{أ}^٢=٢٨\text{أ}^٢$

نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يحتوى $\text{س}^{٢٤-٤\text{ر}}=\text{س}^٠$

$\therefore \text{ر}=٦$

الحد الخالى من س $={}^{٨}\text{ق}_٦\times\text{أ}^٦\times١^٢=٢٨\text{أ}^٦$

$\therefore ٢٨\text{أ}^٦=٢٨\text{أ}^٢$ $\therefore \text{أ}^٤=١$ $\therefore \text{أ}=\pm١$

(٤) أولاً : نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١}={}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}(\text{س}^٢)^{٩-\text{ر}}$

يحتوى $\text{س}^{-\text{ر}+١٨-٢\text{ر}}=\text{س}^{\text{صفر}}$ $\therefore ١٨-٣\text{ر}=٠$

$\therefore \text{ر}=٦$ الحد هو $\text{ح}_٧={}^{٩}\text{ق}_٦(١)^٦(١)^٣$

$={}^{٩}\text{ق}_٣=\frac{٩\times٨\times٧}{٣\times٢\times١}=٨٤$

ثانياً: $\because \frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٦}=\frac{٢}{٣}$ $\therefore \frac{٩-٦+١}{٦}\times\frac{\frac{١}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^٢}{١}}=\frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{٢}{٣}\times\frac{١}{\text{س}}\times\frac{١}{\text{س}^٢}=\frac{٢}{٣}$ $\therefore \text{س}^٣=١$ $\therefore \text{س}=١$

(٥) نفرض أن الحد المشتمل على $\text{س}^٤$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+١}={}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{-١}{\text{س}^٢}\right)^{\text{ر}}(\text{س}^٢)^{١٢-\text{ر}}$

يحتوى $\text{س}^{-٢\text{ر}+٢٤-٢\text{ر}}=\text{س}^٤$ $\therefore ٢٤-٤\text{ر}=٤$ $\therefore ٤\text{ر}=٢٠$

$\text{ر}=٥$ الحد هو $\text{ح}_٦={}^{١٢}\text{ق}_٥\left(\frac{-١}{\text{س}^٢}\right)^٥(\text{س}^٢)^٧=-٧٩٢\text{س}^٤$

رتبة الحد الأوسط $=\frac{١٢+٢}{٢}=٧$

$\therefore \frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٧}=\frac{٦}{١٢-٦+١}\times\frac{\text{س}^٢}{\frac{-١}{\text{س}^٢}}$

$\frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٧}=\frac{٦}{٧}\times\frac{١}{-١}=-\frac{٦}{٧}$

(٦) $\text{ح}_٤={}^{٨}\text{ق}_٣\text{س}^٣=٧$ $\therefore \frac{٨\times٧\times٦}{٣\times٢\times١}\text{س}^٣=٧$

$\therefore \text{س}^٣=\frac{١}{٨}$ $\therefore \text{س}=\frac{١}{٢}$

رتبة الحد الأوسط $=\frac{٨+٢}{٢}=٥$ $\therefore \frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٥}=\frac{٨-٥+١}{٥}\times\frac{\text{س}}{١}$

عند س $=\frac{١}{٢}$ $\therefore \frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٥}=\frac{٤}{٥}\times\frac{١}{٢}=\frac{٢}{٥}$.

(٧) $ح_٥ = {}^{ن}ق_٤ \left(\frac{١}{س^٢}\right)^٤ (س)^{ن-٤}$ يحتوى $س^{-٨+ن-٤} = س^٠$ لأنه خالى من س

∴ ن − ١٢ = ٠ ∴ ن = ١٢

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢+٢}{٢} = ٧$

الحد الأوسط = $ح_٧ = {}^{١٢}ق_٦ \left(\frac{١}{س^٢}\right)^٦ (س)^٦$ عند س = ١

∴ معامل الحد الأوسط =

$${}^{١٢}ق_٦ = \frac{١٢×١١×١٠×٩×٨×٧}{٦×٥×٤×٢×١} = ٩٢٤$$

(٨) نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+١}$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \left(\frac{١}{ب س}\right)^ر (أ س)^{١٠-ر}$

يحتوى $س^{-ر+١٠-ر} = س^٠$ ∴ ر = ٥

∴ الحد هو $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \left(\frac{١}{ب}\right)^٥ (أ)^٥$

∴ الحد الخالى من س = ٢٥٢ $\left(\frac{أ^٥}{ب^٥}\right)$

الحد السابع $ح_٧ = {}^{١٠}ق_٦ \left(\frac{١}{٧س}\right)^٦ (أ س)^٤$

بوضع س=١ ∴ معامل $ح_٧ = ٢١٠ × \frac{أ^٤}{ب^٦}$

∴ $\frac{٢٥٢ أ^٥}{ب^٥} = \frac{٢١٠ أ^٤}{ب^٦}$ ∴ ٦أ ب = ٥

(٩) أولاً: رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢+٢}{٢} = ٧$

∴ $ح_٧ = {}^{١٢}ق_٦ \left(\frac{٢}{٢س}\right)^٦ (س)^٦$

بوضع س = ١ ∴ معامل الحد الأوسط = ${}^{١٢}ق_٦ × ٢^٦ = ٥٩١٣٦$

ثانياً: نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \left(\frac{٢}{س^٢}\right)^ر (س)^{١٢-ر}$

يحتوى $س^{-٢ر+١٢-ر} = س^٠$

∴ ١٢ − ٣ر = ٠ ر = ٤

الحد الخالى من س =

$ح_٥ = {}^{١٢}ق_٤ \left(\frac{٢}{س^٢}\right)^٤ (س)^٨ = {}^{١٢}ق_٤ × ٢^٤ = ٧٩٢٠$

(١٠) نفرض أن الحدود هى $ح_ر$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_ر} = \frac{٢١}{٣٥}$ ∴ $\frac{ن-ر+١}{ر} × \frac{١}{١} = \frac{٣}{٥}$

∴ ٥ن − ٥ر + ٥ = ٣ر ∴ ٥ن = ٨ر − ٥ .... (١)

، ∵ $\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}} = \frac{٧}{٢١}$ ∴ $\frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} × \frac{١}{١} = \frac{١}{٣}$

∴ ٣ن − ٣ر = ر + ١ ∴ ٣ن = ٤ر + ١ .... (٢)

بضرب (٢) × ٢

٦ن = ٨ر + ٢

٥ن = ٨ر − ٥ بالطرح ن = ٧

من (٢) ٢١ = ٤ر + ١ ٤ر = ٢٠ ر = ٥

رتب الحدود هى ٥ ، ٦ ، ٧

(١١) أولاً: نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+١}$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_ر \left(\frac{٢}{س}\right)^ر (س^٢)^{٦-ر}$

يحتوى $س^{-ر+١٢-٢ر} = س^٠$ ∴ ١٢ − ٣ر = ٠ ر = ٤

الحد الخالى من س هو $ح_٥ = {}^{٦}ق_٤ (٢)^٤ = ٢٤٠$

ثانياً: رتبة الحد الأوسط = $\frac{٦+٢}{٢} = ٤$

عند س = ١ = $\frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{٦-٤+١}{٤} × \frac{٢}{١} = \frac{٣}{٤} × ٢ = \frac{٣}{٢}$

(١٢) أولاً: نفرض أن الحد المحتوى $س^{-١}$ هو $ح_{ر+١}$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{١٣}ق_ر \left(\frac{١}{٢س}\right)^ر (س)^{١٣-ر}$

يحتوى $س^{-ر+١٣-ر} = س^{-١}$

∴ ١٣ − ٢ر = −١ ∴ ٢ر = ١٤ ∴ ر = ٧

∴ الحد هو $ح_٨ = {}^{١٣}ق_٧ \left(\frac{١}{٢س}\right)^٧ (س)^٦$ بوضع س = ١

∴ معامل $س^{-١}$ = ${}^{١٣}ق_٦ \left(\frac{١}{٢}\right)^٧ = {}^{١٣}ق_٦ (٢)^{-٧}$

ثانياً: رتبة الحد الأوسط الأول = $\frac{١٣+١}{٢} = ٧$ ، رتبة الحد الأوسط الثانى = ٨

∴ $ح_٨ = ح_٧$ ∴ $\frac{ح_٨}{ح_٧} = ١$

∴ $\frac{١٣-٧+١}{٧} × \frac{\frac{١}{٢س}}{س} = ١$ ∴ $\frac{١}{٢س^٢} = ١$

∴ $س^٢ = \frac{١}{٢}$ ∴ $س = ± \frac{١}{\sqrt{٢}}$

(١٣) $\because$ المفكوك = $\text{أ}^{١٤} - {}^{١٤}\text{ق}_{١}\,\text{أ}^{١٣}\text{س} + {}^{١٤}\text{ق}_{٢}\,\text{أ}^{١٢}\text{س}^{٢}$
$- {}^{١٤}\text{ق}_{٣}\,\text{أ}^{١١}\text{س}^{٣} + {}^{١٤}\text{ق}_{٤}\,\text{أ}^{١٠}\text{س}^{٤} - \ldots\ldots$

، $٥٠_{١}$ = معامل س ، $\text{ج}_{٢}$ = معامل $\text{س}^{٢}$ ، $\text{ج}_{٣}$ = معامل $\text{س}^{٣}$ ،

$\text{ج}_{٤}$ = معامل $\text{س}^{٤}$

$$٤ \times {}^{١٤}\text{ق}_{٤}\,\text{أ}^{١٠} + ١١\left({}^{١٤}\text{ق}_{٢}\,\text{أ}^{١٢} - {}^{١٤}\text{ق}_{٣}\,\text{أ}^{١١}\right) = ٠$$

بالقسم على $\text{أ}^{١٠}$

$$\frac{٤\times١٤\times١٣\times١٢\times١١}{٤\times٣\times٢\times١} + \frac{١١\times١٤\times١٣}{٢\times١}\text{أ}^{٢}$$

$$-\frac{١١\times١٤\times١٣\times١٢}{٣\times٢\times١}\text{أ}$$ = صفر بالقسم على ١٤ × ١٣ × ١١

والضرب × ٣ × ٢ $\therefore$ $١٢ + ٣\text{أ}^{٢} - ١٢\text{أ} = ٠$ ÷ ٣

$\text{أ}^{٢} - ٤\text{أ} + ٤ = ٠$ $\therefore$ $(\text{أ}-٢)^{٢} = ٠$ $\therefore$ أ = ٢

---

(١٤) أولاً: نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٦}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}\left(\text{س}^{\text{ك}}\right)^{٦-\text{ر}}$ يحتوى $\text{س}^{-\text{ر}+٦\text{ك}-\text{ك}\text{ر}} = \text{س}^{٠}$

$\therefore$ ٦ك - ك ر - ر = ٠ $\therefore$ ك (٦-ر) = ر

$\text{ك} = \frac{\text{ر}}{٦-\text{ر}}$ بوضع ر = ٠ $\therefore$ ك = ٠ مرفوض

بوضع ر = ١ $\therefore \text{ك} = \frac{١}{٥}$ مرفوض بوضع ر = ٢

$\therefore \text{ك} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ مرفوض

بوضع ر = ٣ $\therefore \text{ك} = \frac{٣}{٣} = ١$ تقبل ، بوضع ر = ٤

$\therefore \text{ك} = \frac{٤}{٢} = ٢$ تقبل

بوضع ر = ٥ $\therefore \text{ك} = \frac{٥}{١} = ٥$ تقبل ،

$\therefore$ ر ≤ ٦ ، ر ≠ ٦ $\therefore$ أكبر ر = ٥ $\therefore$ قيم ك هى ١ ، ٢ ، ٥

ثانياً: عند أكبر قيمة لـ ك $\therefore$ ك = ٥ $\therefore$ ر = ٥

الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{٦} = {}^{٦}\text{ق}_{٥} \times ١ \times ١ = ٦$

رتبة الحد الأوسط = $\frac{٦+٢}{٢} = ٤$ ، بوضع س = ١

معامل الحد الأوسط = معامل $\text{ح}_{٤} = {}^{٦}\text{ق}_{٣} \times ١ \times ١$ =

$\frac{٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١} = ٢٠$ النسبة المطلوبة = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{١٠}$.

---

(١٥) أولاً: نفرض أن الحد المحتوى $\text{س}^{٥}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{-٤}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} \times \left(\frac{\text{س}^{٣}}{٢}\right)^{١١-\text{ر}}$

يحتوى $\text{س}^{-\text{ر}+٣٣-٣\text{ر}} = \text{س}^{٥}$

$\therefore$ ٣٣ - ٤ر = ٥ $\therefore$ ٤ر = ٢٨ $\therefore$ ر = ٧ ، بوضع س = ١

$\therefore$ معامل $\text{س}^{٥}$ = معامل $\text{ح}_{٨} = {}^{١١}\text{ق}_{٧}(-٤)^{٧} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

= ${}^{١١}\text{ق}_{٤}$ × -١٠٢٤ (-٣٣٧٩٢٠)

ثانياً: رتبة الحد الأوسط الأول = $\frac{١١+١}{٢} = ٦$ ،

رتبة الحد الأوسط الثانى= ٧

$\because \text{ح}_{٧} + \text{ح}_{٦} = ٠$ $\therefore \text{ح}_{٧} = -\text{ح}_{٦}$

$\therefore \frac{\text{ح}_{٧}}{\text{ح}_{٦}} = -١$ $\therefore \frac{١١-٦+١}{٦} \times \frac{\frac{-٤}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^{٣}}{٢}} = -١$

$\therefore \text{س}^{٤} = ٨$ $\therefore$ س = $\pm\sqrt[٤]{٨}$

---

(١٦) أولاً: سبق حلها في(١٥) أولاً ، ثانياً : سبق حلها في ١٥ ثانياً.

---

(١٧) $\text{ح}_{٧} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦}\left(\frac{٥}{\text{س}}\right)^{٦}\left(\text{س}^{٣}\right)^{\text{ن}-٦}$ يحتوى $\text{س}^{-٦+٣\text{ن}-١٨} = \text{س}^{٠}$

معطى $\therefore$ ٣ن = ٢٤ $\therefore$ ن = ٨

رتبة الحد الأوسط = $\frac{٨+٢}{٢} = ٥$ $\therefore$ عند س = -٢

$$\frac{\text{ح}_{٦}}{\text{ح}_{٥}} = \frac{٨-٥+١}{٥} \times \frac{\frac{٥}{-٢}}{(-٢)^{٣}} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{-٢} \times \frac{١}{-٨} = \frac{١}{٤}$$

---

(١٨) نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\because \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}\left(\text{س}^{٢}\right)^{\text{ن}-\text{ر}}$

يحتوى $\text{س}^{-\text{ر}+٢\text{ن}-٢\text{ر}} = \text{س}^{٠}$ $\therefore$ ٢ن - ٣ر = ٠ $\therefore \text{ر} = \frac{٢}{٣}\text{ن}$ ∈ ط

وهذا لا يمكن إلا إذا كانت ن مضاعفاً للعدد ٣ .

عند ن = ١٢ $\therefore \text{ر} = \frac{٢\times١٢}{٣} = ٨$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{٩}$ ، $\therefore$ الحد الخالى من س =

$\text{ح}_{٩} = {}^{١٢}\text{ق}_{٨} \times ١ \times ١ = {}^{١٢}\text{ق}_{٤} = ٤٩٥$

---

(١٩) أولاً: نفرض أن الحد المحتوى $\text{س}^{٣}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{١}{٢\text{س}}\right)^{\text{ر}}\left(\text{س}^{٢}\right)^{١٥-\text{ر}}$

يحتوى $\text{س}^{-\text{ر}+٣٠-٢\text{ر}} = \text{س}^{٣}$ $\therefore$ ٣٠-٣ر=٣

$\therefore$ ٣ر = ٢٧ $\therefore$ ر = ٩ ، بوضع س=١

$\therefore$ معامل الحد هو = ${}^{١٥}\text{ق}_{٩}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٩} = {}^{١٥}\text{ق}_{٦} \times ٢^{-٩}$

نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يحتوى $\text{س}^{٣٠-٣\text{ر}} = \text{س}^{٠}$

$\therefore$ ر = ١٠ الحد هو $\text{ح}_{١١} = {}^{١٥}\text{ق}_{١٠} \times ٢^{-١٠}$

النسبة = $\frac{{}^{١٥}\text{ق}_{٦}}{{}^{١٥}\text{ق}_{٥}} \times ٢ = \frac{١٥-٦+١}{٦} \times ٢ = \frac{١٠}{٣}$

(٢٠) $\because ح_{10} = ح_{9}$ $\therefore \frac{ح_{10}}{ح_{9}} = 1$

$\therefore \frac{20-9+1}{9} \times \frac{\frac{3}{س^2}}{2س} = 1$ $\therefore \frac{12}{9} \times \frac{3}{س^2} \times \frac{1}{2س} = 1$

$\therefore س^3 = 2$ $\therefore س = \sqrt[3]{2}$

نفرض أن الحدين هما $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+1}$ $\therefore \frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{15}{8}$

$\therefore \frac{20-ر+1}{ر} \times \frac{\frac{3}{س^2}}{\frac{2س}{1}} = \frac{15}{8}$

$\therefore \frac{20-ر}{ر} \times \frac{3}{س^2} \times \frac{1}{2س} = \frac{15}{8}$ $\therefore س = \sqrt[3]{2}$

$\therefore \frac{21-ر}{ر} \times \frac{3}{2 \times 2} = \frac{15}{8}$ $\therefore \frac{21-ر}{ر} = \frac{5}{2}$

$\therefore 5ر = 42 - 2ر$

$\therefore 7ر = 42$ $\therefore ر = 6$ الحدان هما $ح_6$ ، $ح_7$.

(٢١) (i) رتبة الحد الأوسط $= \frac{8+2}{2} = 5$

$\therefore ح_5 = {}^8ن_4 (س)^4 \left(\frac{5}{س}\right)^4 = {}^8ن_4 \times 5^4$

$\therefore$ الحد الأوسط هو الحد الخالى من س = ٤٣٧٥٠

(ii) $\frac{ح_3}{ح_7} = \frac{1}{16}$ $\therefore \frac{{}^8ن_2 \times س \times س^2 \times \left(\frac{5}{س}\right)^6}{{}^8ن_6 \times س^6 \times \left(\frac{5}{س}\right)^2} = \frac{1}{16}$

$\therefore \frac{{}^8ن_2 \times س^2 \times 5^6 \times س^{-6}}{{}^8ن_2 \times س^6 \times 5^2 \times س^{-2}} = \frac{1}{16}$

$\therefore \frac{س^{-4}}{س^4} = \frac{1}{16} \times \frac{5^2}{5^6}$ $\therefore س^{-8} = 10^{-4}$

$س^8 = 10^4$ $\therefore س = \pm\sqrt{10}$

(٢٢) (i) نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+1}$

$\therefore ح_{ر+1} = {}^{15}ن_ر (س^2)^ر \left(\frac{1}{س}\right)^{15-ر}$

يحتوى $س^{2ر-15+ر} = س^0$ $\therefore 3ر - 15 = 0$ $\therefore ر = 5$

الحد الخالى من س $= {}^{15}ن_5 \times 1 \times 1 = 3003$

(ii) رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{15+1}{2} = 8$ ،

رتبة الحد الأوسط الثانى = ٩

$\because ح_9 = ح_8$ $\therefore \frac{ح_9}{ح_8} = 1$ $\therefore \frac{15-8+1}{8} \times \frac{س^2}{س^1} = 1$

$\therefore س^3 = 1$ $\therefore س = 1$

(٢٣) (i) نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+1}$

$\therefore ح_{ر+1} = {}^9ن_ر \left(\frac{-1}{س^2}\right)^ر (س)^{9-ر}$

يحتوى $س^{-2ر+9-ر} = س^0$ $\therefore 9 - 3ر = 0$ $\therefore ر = 3$

الحد هو $ح_4 = {}^9ن_3 (-1)^3 (1)^6 = -{}^9ن_3 = -84$

(ii) رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{9+1}{2} = 5$ ،

رتبة الحد الأوسط الثانى = ٦

$\because ح_6 + ح_5 = 0$ $\therefore ح_6 = -ح_5$ $\therefore \frac{ح_6}{ح_5} = -1$

$\therefore \frac{9-5+1}{5} \times \frac{\frac{-1}{س^2}}{س} = -1$ $\therefore س^3 = 1$

$\therefore س = 1$

اختبارات كتاب لامي على نظرية ذات الحدين

الاختبار الأول

[١] (أ) (١) رتبة الحد الأوسط $= \frac{12+2}{2} = 7$ ، س = ١

$\therefore$ معامل الحد الأوسط =

${}^{12}ن_6 \left(-\frac{3}{2}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = {}^{12}ن_6 = 924$.

(٢) $\frac{ح_6}{ح_5} = \frac{12-5+1}{5} \times \frac{\frac{-3}{2س}}{\frac{2س^2}{3}}$

$= \frac{8}{5} \times \frac{-3}{2س} \times \frac{3}{2س^2} = \frac{-18}{5} س^{-3}$

(ب) (١) معامل $س^{10}$ =

${}^{12}ن_{10} = {}^{12}ن_2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$ الجواب (ب)

(٢) $\frac{ح_5}{ح_4} = \frac{12-4+1}{4} \times \frac{س}{1} = \frac{9}{4} س$ الجواب (أ)

[٢] (أ) $ح_1 = س^8$ ، رتبة الحد الأوسط $= \frac{8+2}{2} = 5$

$\therefore ح_5 = {}^8ن_4 \times 2^4 س^4 = 1120 س^4$

$ح_9 = {}^8ن_8 \times 2^8 = 256$

$\because ح_1 + ح_5 + ح_9 = 1377$ $\therefore س^8 + 1120 س^4 + 256 = 1377$

$\therefore س^8 + 1120 س^4 - 1121 = 0$ ، $(س^4 + 1121)(س^4 - 1) = 0$

$\therefore س^4 = -1121$ مرفوض ، $س^4 = 1$ $\therefore س = \pm 1$

(ب) (١) بوضع س = ١ فى طرفى المفكوك

$\therefore$ أ + ب + جـ + د + هـ + و $= (1-3)^5 = -32$

(٢) بوضع س = ٢ فى طرفى المفكوك

$\therefore$ أ + ٢ب + ٤جـ + ٨د + ١٦هـ + ٣٢و $= (2-3)^5 = -1$

[٣] (أ) نفرض أن الحد المحتوى $س^{٧}$ هو $ح_{ر+١}$

$$\because ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{١}{جس}\right)^{ر} \left(مس^{٢}\right)^{١١-ر}$$

يحتوى $س^{-ر+٢٢-٢ر} = س^{٧}$ $\therefore ٢٢-٣ر = ٧$ $\therefore ر=٥$

$\therefore$ معامل $س^{٧} = {}^{١١}ق_{٥} \left(\frac{١}{ج}\right)^{٥} (م)^{٦}$ .... (١)

نفرض أن الحد المحتوى $س^{٤}$ هو $ح_{ر+١}$

$\therefore$ يحتوى $س^{٢٢-٣ر} = س^{٤}$ $\therefore ٢٢-٣ر = ٤$ $\therefore ر = ٦$

$\therefore$ معامل $س^{٤} = {}^{١١}ق_{٦} \left(\frac{١}{ج}\right)^{٦} (م)^{٥}$ .... (٢)

من (١)، (٢) $\therefore {}^{١١}ق_{٥} \left(\frac{١}{ج}\right)^{٥} (م)^{٦} = {}^{١١}ق_{٥} \left(\frac{١}{ج}\right)^{٦} (م)^{٥}$

$\therefore م = \frac{١}{ج}$ $\therefore جم = ١$

(ب) نفرض أن الحد المشتمل على $س^{١١}$ فى المفكوك هو $ح_{ر+١}$

$$\because ح_{ر+١} = س^{٧} \times {}^{١٢}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} \left(س^{٣}\right)^{١٢-ر}$$

يحتوى $س^{٧-ر+٣٦-٣ر} = س^{١١}$ $\therefore ٤٣ - ٤ر = ١١$

$\therefore ٤ر = ٣٢$ $\therefore ر = ٨$

الحد هو $ح_{٩} = س^{٧} \times {}^{١٢}ق_{٨} \times \frac{١}{س^{٨}} \times س^{١٢}$

$= {}^{١٢}ق_{٤} س^{١١} = ٤٩٥ س^{١١}$

الاختبار الثانى

[١] (أ) (١) $ح_{٥} = {}^{١١}ق_{٤} \left(\frac{١}{٢س}\right)^{٤} \left(٢س^{٢}\right)^{٧}$ يوضع س = ١

$\therefore$ معامل $ح_{٥} = {}^{١١}ق_{٤} \times \frac{١}{٢^{٤}} \times ٢^{٧}$

$= {}^{١١}ق_{٤} \times ٨ = ٢٦٤٠$

(٢) $\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{١١-٦+١}{٦} \times \frac{\frac{١}{٢س}}{\frac{٢س^{٢}}{١}}$

$= ١ \times \frac{١}{٢س} \times \frac{١}{٢س^{٢}} = \frac{١}{٤س^{٣}}$

(ب) (١) يوضع س = ١

$\therefore$ مجموع معاملات جميع الحدود $= (١-١)^{١٤} =$ صفر   الجواب (ب)

(٢) $\because \frac{ح_{٩}}{ح_{٨}} = \frac{١٤}{٨}$ $\therefore \frac{١٤-٨+١}{٨} \times \frac{-س}{١} = \frac{١٤}{٨}$

$\therefore -٧س = ١٤$ $\therefore س = -٢$ الجواب (د)

[٢] (أ) $\because ح_{٥} = {}^{ن}ق_{٤} \left(\frac{-١}{س^{٢}}\right)^{٤} (س)^{ن-٤}$

يحتوى $س^{-٨+ن-٤} = س^{٠}$ $\therefore ن - ١٢ = ٠$ $\therefore ن = ١٢$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٢+٢}{٢} = ٧$ ويوضع س = ١

$\therefore$ معامل $ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦} \left(\frac{-١}{١}\right)^{٦} (١)^{٦} = {}^{١٢}ق_{٦} = ٩٢٤$

(ب) $\because$ رتبة الحد الأوسط الحد الأوسط الأول

$= \frac{١٢+٢}{٢} = ٧$ ، رتبة الحد الأوسط الثانى = ٨

$\because ح_{٨} + ح_{٧} = ٠$ $\therefore ح_{٨} = -ح_{٧}$ $\therefore \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = -١$

$\therefore \frac{١٣-٧+١}{٧} \times \frac{-\frac{١}{٨س}}{\frac{س^{٢}}{١}} = -١$ $\therefore -\frac{١}{٨س} \times \frac{١}{س^{٢}} = -١$

$\therefore ٨س^{٣} = ١$ $\therefore س^{٣} = \frac{١}{٨}$ $\therefore س = \frac{١}{٢}$

[٣] نفرض أن الحد الخالى من س هو $ح_{ر+١}$

$$\because ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} \left(س^{٢}\right)^{٩-ر}$$

يحتوى $س^{-ر+١٨-٢ر} = س^{٠}$

$\therefore ١٨-٣ر = ٠$ $ر = ٦$

الحد الخالى من س هو

$ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٦} (١)^{٦} (١)^{٣} = {}^{٩}ق_{٣} = ٨٤$

نفرض أن الحد المحتوى $س^{٥}$ هو $ح_{ر+١}$

يحتوى $س^{١٨-٣ر} = س^{٥}$ $\therefore ١٨-٣ر = ٥$

$\therefore ٣ر = ١٣$ $\therefore ر = ٤\frac{١}{٣} \notin$ ط مرفوض

$\therefore$ هذا المفكوك لا يحتوى $س^{٥}$

ثانياً: $\because \frac{\text{الحد الخالى من س}}{\text{الحد السادس}} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{٢}{٣}$ $\therefore \frac{٩-٦+١}{٦} \times \frac{\frac{١}{س}}{\frac{س^{٢}}{١}} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{٤}{٦} \times \frac{١}{س^{٣}} = \frac{٢}{٣}$ $\therefore س^{٣} = ١$ $\therefore س = ١$

إجابـات الوحدة الثانية

الأعداد المركبة

تمارين (٣) الأعداد المركبة

المجموعة الأولى :

أ) أكمل ما يأ . :

١) - ٥

٢) ٣

٣) ٢ ت

٤) - ٧ ت

٥) ١

٦) ٨ - ٦ = ٢ ٢ - ١

٧) ٣

٨) ١٥ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

٩) ١٦ + ١٤ = ٣٠°

١٠) ٢١٨ - ٣٨ = ١٨٠° = π

١١) ٢ × ٣ × ٤ = ٢٤

١٢) ٢ (جتا $\frac{٥ط}{٦}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٦}$)

١٣) $\left(-\omega^{٢}\right)^{٣} = -\omega^{٦} = -١$

١٤) $\left(-٢\omega^{٢}+٥\omega^{٢}\right)^{٣} = \left(٣\omega^{٢}\right)^{٣} = ٢٧\omega^{٦} = ٢٧$

١٥) جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°

١٦) العدد = جتا ٦٠٠ + ت جا ٦٠٠

سعته الأساسية هى ٦٠٠ - ٣٦٠ = ٢٤٠°

١٧) = $-\omega$

١٨) = $\frac{١}{-١} = -١$

١٩) = $\sqrt{\omega^{٤}} = \pm\omega^{٢}$

٢٠) = $\left(-\omega^{٢}\right)^{٢٠} = \omega^{٤٠} = \omega$

ب) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) $|ع| = \sqrt{٩+١٦} = ٥$

٢) $|ع| = \sqrt{١+٣} = ٢$

، ظا θ = - $\sqrt{٣}$ فى الربع الثانى

∴ θ = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠°

∴ = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∴ الجواب هو ع = ٢هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

٣) جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠ = هـ$^{\frac{٤}{٣}ط}$

٤) ٢٧٠° + ٦٠° = ٣٣٠° = $\frac{١١}{٦}$ط

٥) ٩٠° - ٦٠° = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$

٦) ٣

٧) ١٣٥ × ٧ = ٩٤٥ ، ٩٤٥ - ٧٢٠ = ٢٢٥ = $\frac{٥\pi}{٤}$

٨) $\left(\pm \sqrt{٣}\ ت\right)^{٤} = ٩$

٩) ٥ + $\omega^{٢}$

١٠) $= ٢٧ + ٢٩\omega + ٩\omega^{٢} = ٢٧ - ٢٩ = -٢$

١١) ١ + ٦ + ١٦ = ٦ω + $\omega^{٢}$

١٢) ω

١٣) $\omega^{٢}$

١٤) $\sqrt{\omega} = \sqrt{\omega^{٤}} = \pm\omega^{٢}$

المجموعة الثانية :

إجابات الصورة الجبرية

(١) ع^{٢} = ٩ - ٦ ت + ت^{٢} = ٨ - ٦ ت ،

ع^{٣} = (٣ - ت) (٨ - ٦ ت) = ١٨ - ٢٦ ت

∴ المقدار = ١٨ - ٢٦ ت - ٧ (٨ - ٦ ت)

+ ١٦ (٣ - ت) - ١٠ = ١٨ - ٢٦ ت - ٥٦ + ٤٢ ت + ٤٨ - ١٦ ت

- ١٠ = صفر

(٢) ل^{٢} = ١ + ٤ ت + ٤ ت^{٢} = - ٣ + ٤ ت ،

م^{٢} = ٤ + ٤ ت + ت^{٢} = ٣ + ٤ ت ،

ل م = ٢ + ٥ ت + ٢ ت^{٢} = ٥ ت

(أولاً) ل م (م^{٢} + ل^{٢}) = ٥ ت (٨ ت) = - ٤٠

(ثانياً) ل^{٣} = (١ + ٢ ت) (-٣ + ٤ ت) = - ١١ - ٢ ت

، م^{٣} = (٢ + ت) (٣ + ٤ ت) = ٢ + ١١ ت

∴ ل^{٣} + م^{٣} = -٩ + ٩ ت = ٩ (ت - ١)

(٣) (أ) الأيمن = $(١ + ت - ١)^{٤ن} = ت^{٤ن} = ١$

(ب) $(١ + ت)^{٤ن} = (١ + ٢ت + ت^٢)^{٢ن}$

$= (٤ت^٢)^{ن} = (-٤)^{ن}$ (١)

، $(١ - ت)^{٤ن} = (-٢ت)^{٢ن} = (-٤)^{ن}$ (٢)

بالطرح ∴ الأيمن = $(-٤)^{ن} - (-٤)^{ن}$ = صفر

(جـ) الأيمن = $[ت^{٤ن+٢} - ت^{٤ن+٢}]^٤$

$= (ت^٢ - ت^٢)^٤ = [(-ت + ١)^٢]^٢$

$= (ت^٢ - ٢ت + ١)^٢ = ٤ت^٢ = -٤$

(٤) (أولاً) عندما $ن = ٤م$ ، $م ∈ ص^+$ فإن

المقدار = $١ + ت^{٤م} + ت^{٨م} + ت^{١٢م} = ٤$

(ثانياً) عندما $ن = ٤م + ١$ ، $م ∈ ص^+$

المقدار = $١ + ت + ت^٢ + ت^٣$ = صفر

(ثالثاً) ، عندما $ن = ٤م + ٢$ ، $م ∈ ص^+$

المقدار = $١ + ت^٢ + ت^٤ + ت^٦$ = صفر

(رابعاً) عندما $ن = ٤م + ٣$ ، $م ∈ ص^+$

∴ المقدار = $١ + ت^٣ + ت^٦ + ت^٩$ = صفر ∴ المقدار = ٤ أ، صفر

(٥) الطرف الأيمن = $(١ + ت)^{٢٠} = (١ + ٢ت + ت^٢)^{١٠} = (٢ت)^{١٠}$

$= ١٠٢٤ × ت^٢ = -١٠٢٤$

(٦) (i) $ع_١ + ع_٢ = ٣ + ٢ت + ٣ - ٢ت = ٦ ∈ ح$

(ii) $ع_١ ع_٢ = (٣ + ٢ت)(٣ - ٢ت) = ٩ - ٤ت^٢ = ١٣ ∈ ح$

(iii) $ع_١ + \bar{ع_٢} = ٦ = ٦$ ، $\bar{ع_١} + ع_٢ = ٣ - ٢ت + ٣ + ٢ت = ٦$

(iv) $ع_١ ع_٢ = ٣ + ١١ت - ٦ = -٣ + ١١ت$ ∴ $\overline{ع_١ ع_٢} = -٣ - ١١ت$ (١) ،

$\bar{ع_١}\,\bar{ع_٢} = (٣ - ٢ت)(١ - ٣ت) = ٣ - ١١ت - ٦ = -٣ - ١١ت = \overline{ع_١ ع_٢}$

(v) $(\bar{ع_١})^٢ = (٣ - ٢ت)^٢ = ٩ - ١٢ت + ٤ت^٢ = ٥ - ١٢ت$

، $ع_١^٢ = ٩ + ١٢ت + ٤ت^٢ = ٥ + ١٢ت$ ∴ $\overline{ع_١^٢} = ٥ - ١٢ت = (\bar{ع_١})^٢$

(٧) $ل = \frac{٢ + ت}{١ + ت} × \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{٣ - ت}{٢} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}ت$

، $م = \frac{١ + ٢ت}{١ + ت} × \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{٣ + ت}{٢} = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢}ت$

∴ ل ، م مترافقان ، $ل^٢ = \frac{٩}{٤} - \frac{٣}{٢}ت + \frac{ت^٢}{٤} = ٢ - \frac{٣}{٢}ت$

∴ $م^٢ = ٢ + \frac{٣}{٢}ت$ ، $ل م = \frac{٩}{٤} - \frac{١}{٤}ت^٢ = \frac{٥}{٢}$

∴ المقدار = $\frac{١٥(٢ - \frac{٣}{٢}ت + ٢ + \frac{٣}{٢}ت)}{٨٠ × \frac{٥}{٢}(١,٥ - ٠,٥ت + ١,٥ + ٠,٥ت)} = ١$

(٨) ∵ المعادلة من الدرجة الثانية ومعاملاتها حقيقية

∴ مجموع الجذرين = عدد حقيقى وحصل ضرب الجذرين = عدد حقيقى

∵ أحد الجذرين = $\frac{١ + ٥\sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} + ٤(-ت)} = \frac{١ + ٥\sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} - ٤ت} × \frac{\sqrt{٣} + ٤ت}{\sqrt{٣} + ٤ت}$

$= \frac{\sqrt{٣} - ٢٠\sqrt{٣} + ١٩ت}{١٩} = \frac{١٩(-\sqrt{٣} + ت)}{١٩} = -\sqrt{٣} + ت$

∴ الجذر الآخر هو مرافق الأول = $-\sqrt{٣} - ت$

∴ مجموع الجذرين = $-٢\sqrt{٣}$ ، حاصل ضرب الجذرين = ٤

، ∵ المعادلة هى $س^٢$ - مجموع الجذرين × س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة هى $س^٢ + ٢\sqrt{٣}س + ٤ = ٠$

(٩) (أ) ∵ $أ + ب ث = [(١ + ث)^٢]^٨ (١ + ث)$

$= (٢ث)^٨ (١ + ث) = ٢٥٦ + ٢٥٦ث$ ∴ أ = ٢٥٦ ، ب = ٢٥٦

(ب) ∵ $أ + ب ت = \sqrt{٤ × ٢ت} = \sqrt{٤(١ + ت)^٢} = ±٢(١ + ت)$

∴ أ = ±٢ ، ب = ±٢

(جـ) ∵ $أ + ب ت = \sqrt{\frac{١}{٤} × (-٢ت)} = \sqrt{\frac{١}{٤}(١ - ت)^٢} = ±\frac{١}{٢}(١ - ت)$

∴ $أ = ±\frac{١}{٢}$ ، $ب = ∓\frac{١}{٢}$

(١٠) $ع = \frac{-٤ ± \sqrt{١٦ - ٤ × ١ × ١٣}}{٢ × ١} = \frac{-٤ ± ٦ت}{٢}$

$= -٢ + ٣ت$ أ، $-٢ - ٣ت$

(١١) $ع = \frac{(٢ - ت) ± \sqrt{٤ - ٤ت + ت^٢ - ٤(٣ - ت)}}{٢ × ١}$

$= \frac{(٢ - ت) ± \sqrt{-٩}}{٢} = \frac{٢ - ت ± ٣ت}{٢}$

$= ١ + ت$ أ، $١ - ٢ت$

إجابات الصورة المثلثية للعدد المركب

(١) (أ) ع$_١$ = ٨ (حتا صفر + ت حا صفر)

(ب) ع$_٢$ = ٥ (حتا ط + ت حا ط)

(حـ) ع$_٣$ = ٤ (حتا $\frac{ط}{٢}$ + ت حا $\frac{ط}{٢}$)

(د) ع$_٤$ = ٣ (حتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت حا $\frac{٣ط}{٢}$)

(٢) (أ) | ع$_١$ | = $\sqrt{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ = ر

حتا ى = | $\frac{س}{ر}$ | = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ٦٠°

، ع$_١$ = (٢ ، ٢$\sqrt{٣}$) ∈ للربع الأول ∴ سه(ع$_١$) = ٦٠°

∴ ع$_١$ = ٤ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)

(ب) | ع$_٢$ | = $\sqrt{(-٣)^٢ + (\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{٩+٣}$ = ٢$\sqrt{٣}$

حتا ى = | $\frac{-٣}{٢\sqrt{٣}}$ | = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ى = ٣٠°

، ع$_٢$ = (-٣ ، $\sqrt{٣}$) ∈ الربع الثاني ∴ سه(ع$_٢$) = ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°

∴ ع$_٢$ = ٢$\sqrt{٣}$ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°)

(حـ) | ع$_٣$ | = $\sqrt{(-٢)^٢ + (-٢)^٢}$ = ٢$\sqrt{٢}$

حتا ى = | $\frac{-٢}{٢\sqrt{٢}}$ | = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ى = ٤٥°

، ع$_٣$ = (-٢ ، -٢) ∈ الربع الثالث

∴ سه(ع$_٣$) = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

∴ ع$_٣$ = ٢$\sqrt{٢}$ (حتا ٢٢٥° + ت حا ٢٢٥°)

(د) | ع$_٤$ | = $\sqrt{(\sqrt{٣})^٢ + (-١)^٢}$ = ٢

حتا ى = | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | ∴ ى = ٣٠° ، ع$_٤$ = ($\sqrt{٣}$ ، -١)

أي ∈ للربع الرابع ∴ سه(ع$_٤$) = ٣٦٠° - ٣٠° = ٣٣٠°

∴ ع$_٤$ = ٢ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°)

(٣) كما في (٢) ع$_١$ = ٣$\sqrt{٢}$ (حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°)

، ع$_٢$ = ٤ (حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°) ،

ع$_٣$ = ٤ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) ،

ع$_٤$ = ٤$\sqrt{٣}$ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

(٤) (أ) | ع$_١$ | = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ θ = ٥٣°

∴ ع$_١$ = ٥ (حتا ٥٣° + ت حا ٥٣°)

(ب) | ع$_٢$ | = $\sqrt{٢٥+١٤٤}$ = ١٣ ، ظا θ = $\frac{١٢}{-٥}$

∴ θ = ١٨٠° - ٦٧° = ١١٣° ∴ ع$_٢$ = ١٣ (حتا ١١٣° + ت حا ١١٣°)

(حـ) | ع$_٣$ | = $\sqrt{٤٩+٥٧٦}$ = ٢٥ ، ظا θ = $\frac{-٢٤}{-٧}$

∴ θ = ١٨٠° + ٧٤° = ٢٥٤°

∴ ع$_٣$ = ٢٥ (حتا ٢٥٤° + ت حا ٢٥٤°)

(د) | ع$_٤$ | = $\sqrt{٢٢٥+٦٤}$ = ١٧ ، ظا θ = $\frac{-٨}{-١٥}$

∴ θ = ٣٦٠° - ٢٨° = ٣٣٢°

∴ ع$_٤$ = ١٧ (حتا ٣٣٢° + ت حا ٣٣٢°)

(٥) (أ) ع$_١$ = ٣ (حتا ط + ت حا ط) = ٣ (-١ + ت × ٠) = -٣

(ب) ع$_٢$ = ٥ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) = ٥ (٠ + ت × ١) = ٥ت

(حـ) ع$_٣$ = ٤ (حتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت حا $\frac{٣ط}{٢}$)

= ٤ × ٠ + ٤ ت × -١ = -٤ ت

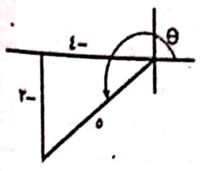
(د) ع$_٤$ = ٦ (- $\frac{١}{٢}$ + ت × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = -٣ + ٣$\sqrt{٣}$ ت

(٦) (أ) ع$_١$ = ٢$\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{٥ط}{٤}$ + ت حا $\frac{٥ط}{٤}$)

= ٢$\sqrt{٢}$ (- $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) = -٢ -٢ ت

(ب) ع$_٢$ = ٢ (حتا $\frac{٥}{٣}$ ط + ت حا $\frac{٥}{٣}$ ط)

= ٢ ($\frac{١}{٢}$ + ت × - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ١ - $\sqrt{٣}$ ت



(حـ) ع$_٣$ = ١٠ (حتا θ + ت حا θ)

= ١٠ (- $\frac{٤}{٥}$ - $\frac{٣}{٥}$ ت) = -٨ -٦ ت

(٧) بالضرب × مرافق المقام ∴ ع = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت

| ع | = ٤ ، حتا هـ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٦٠°

(٨) ع = $\frac{٥-ت}{٣+٢ت}$ × $\frac{٣-٢ت}{٣-٢ت}$ = ١ - ت

∴ | ع | = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$ ، حتا ى = | $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ |

∴ ى = ٤٥°، ع = (١ ، -١) أي في الربع الرابع

∴ سـ(ع) = ٣٦٠° - ٤٥° = ٣١٥° = $\frac{\text{٧}}{\text{٤}}$ ط

(٩) ع = $\frac{\text{٣(٣ + ٧ت)}}{\text{٢ - ٥ت}} \times \frac{\text{٢ + ٥ت}}{\text{٢ + ٥ت}}$

= $\frac{\text{٣(-٢٩ + ٢٩ت)}}{\text{٢٩}}$ = -٣ + ٣ ت

|ع| = $\sqrt{\text{(-٣)}^{\text{٢}} + \text{(٣)}^{\text{٢}}}$ ، حتا ى = | $\frac{\text{-٣}}{\text{٣}\sqrt{\text{٢}}}$ | = $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$

، ع في الربع الثاني ∴ سـ(ع) = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°

(١٠) ع = $\frac{\text{٢ + }\sqrt{\text{٥}}\text{ت}}{\sqrt{\text{٥}}\text{ - ٢ت}} \times \frac{\sqrt{\text{٥}}\text{ + ٢ت}}{\sqrt{\text{٥}}\text{ + ٢ت}}$ = $\frac{\text{٩ت}}{\text{٩}}$ = ت

∴ |ع| = ١ ، سـ(ع) = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

(١١) ع = $\frac{\text{١ + ٥}\sqrt{\text{٣}}\text{ت}}{\sqrt{\text{٣}}\text{ - ٤ت}} \times \frac{\sqrt{\text{٣}}\text{ + ٤ت}}{\sqrt{\text{٣}}\text{ + ٤ت}}$

= $\frac{\text{-١٩}\sqrt{\text{٣}}\text{ + ١٩ت}}{\text{١٩}}$ = - $\sqrt{\text{٣}}$ + ت

|ع| = $\sqrt{\text{(-}\sqrt{\text{٣}}\text{)}^{\text{٢}}\text{ + ١}}$ = ٢ ، حتا ى = | $\frac{\text{-}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ |

∴ ى = ٣٠° ، ع ∋ الربع الثاني ∴ سـ(ع) = ١٨٠ - ٣٠°

(١٢) ع = $\frac{\text{(٢ + ت)(١ - ت) - (٢ - ت)(١ + ت)}}{\text{١ - ت}^{\text{٢}}}$ = $\frac{\text{-٢ت}}{\text{٢}}$

∴ -ت = (حتا $\frac{\text{٣ط}}{\text{٢}}$ + ت حا $\frac{\text{٣ط}}{\text{٢}}$) لأن | ع | = ١

(١٣) |ع| = ٤ ، طا θ = ١ ∴ سـ(ع) = ٤٥°

∴ ع = ٤(حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)، - ع

= ٤(حتا ٢٢٥° + ت حا ٢٢٥°)

، ع = ٤(حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°)، $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ (حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°)

، (ع)$^{\text{-١}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)

(١٤) |ع| = ٢ ، سـ(ع) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

∴ ع = ٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

، -ع = ٢ (حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠°)

، ع = ٢ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

، $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

، (ع)$^{\text{-١}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

(١٥) | ع | = ٤ ، سـ(ع) = ٣٦٠° - ٣٠° = ٣٣٠

∴ ع = ٤ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°)

∴ -ع = ٤ (حتا ٥١٠° + ت حا ٥١٠°) = ٤ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°)

، ع = ٤ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

، $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

(ع)$^{\text{-١}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°)

(١٦) ع$_{\text{١}}$ = ٢ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°) ∴ سـ(ع$_{\text{١}}$) = ٦٠°

ع$_{\text{٢}}$ = ٤ (- حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)

= ٤ [حتا (١٨٠° - ٤٥°) + ت حا (١٨٠° - ٤٥°)]

(١٧) ، ع$_{\text{٢}}$ = ٦ [- حتا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ - ت حا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$]

= ٦ [حتا (ط + $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$) + ت حا (ط + $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$)]

، ع$_{\text{٤}}$ = $\sqrt{\text{٢}}$ [حتا (٢ط - $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$) + ت حا (٢ط - $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$)]

(١٨) (أ) ع$_{\text{١}}$ = ٣ (حتا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ - ت حا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$) حيث $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ - $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$

= ٣ [حتا (٢ط - $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$) + ت حا (٢ط - $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$)]

(ب) ع$_{\text{٢}}$ = ٨ [- حتا ٤٥° - ت حا ٤٥°] حيث ٤٥° = ٩٠° - ٤٥°

= [حتا (١٨٠° + ٤٥°) + ت حا (١٨٠° + ٤٥°)]

(١٩) (أ) ع$_{\text{١}}$ = ٦ [- حتا ٦٠° - ت حا ٦٠°]

= ٦ [حتا (١٨٠° + ٦٠°) + ت حا (١٨٠° + ٦٠°)]

(ب) ع$_{\text{٢}}$ = ٢ [- حا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ - ت حتا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$] ($\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ - $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ = $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$)

= ٢ [- حتا $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$ - ت حا $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$]

= ٢ [حتا (ط + $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$) + ت حا (ط + $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$)]

حاصل ضرب وخارج قسمة عددين مركبين بالصورة المثلثية :

(٢٠) (أ) = ١٠ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°) لأن ٢٩° + ١٦° = ٤٥°

(ب) = ٢٨ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°) لأن ٣٧° + ٢٣° = ٦٠°

(حـ) = ٦ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) لأن ٦٩° + ٥١° = ١٢٠°

(د) = ١٨ (حتا ٢٢٥° + ت حا ٢٢٥°) لأن ١١٧° + ١٠٨° = ٢٢٥°

(هـ) = ٢٤ (حتا ١٣٩° + ت حا ١٣٩°) لأن ٩٢° + ٤٧° = ١٣٩°

(٢١) (أ) = ٦ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°) = ٦ ($\frac{١}{٢}$ + ت × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

= ٣ + ٣ $\sqrt{٣}$ ت

(ب) = ٢٨ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°) = ٢٨ (- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ت × $\frac{١}{٢}$)

= - ١٤ $\sqrt{٣}$ + ١٤ ت

(حـ) ١٠ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°) = ١٠ (٠ + ت × - ١) = - ١٠ ت

(د) = ٦ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) = ٦ (- $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)

= -٣ + ٣ $\sqrt{٣}$ ت

(هـ) ٦ (حا ١٦° + ت حتا ١٦°) × $\frac{٥}{٣}$ (- حتا ١٤° + ت حا ١٤°)

= ٦ (حتا ٧٤° + ت حا ٧٤°) × $\frac{٥}{٣}$ (حتا ١٦٦° + ت حا ١٦٦°)

= ١٠ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

= ١٠ (- $\frac{١}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = -٥ -٥ $\sqrt{٣}$ ت

(٢٢) (أ) = $\frac{٣}{٢}$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°) لأن ٨٤° - ٣٩° = ٤٥°

(ب) = ٣ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) لأن ٢١٧° - ٣٧° = ١٨٠°

(حـ) = ٣ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) لأن ١٥٣° - ٣٣° = ١٢٠°

(د) = $\frac{٢(\text{حتا } ١٧٩° + \text{ت جا } ١٧٩°)}{(\text{حتا } ٤٤° + \text{ت جا } ٤٤°)}$ = ٢ (حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°)

(٢٣) (أ) = $\frac{١٢}{٣}$ [حتا (٧٢° - ٢٧°) + ت حا (٧٢° - ٢٧°)]

= ٤ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°) = ٤ ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ت) = ٢ $\sqrt{٢}$ + ٢ $\sqrt{٢}$ ت

(ب) = $\frac{٢٨(\text{حتا } ٨٥° + \text{ت جا } ٨٥°)}{٧(\text{حتا } ٢٥° + \text{ت جا } ٢٥°)}$ = ٤ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)

= ٤ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

(حـ) $\frac{١٨(\text{حتا } ١٨٣° + \text{ت جا } ١٨٣°)}{٩(\text{حتا } ٣٣° + \text{ت جا } ٣٣°)}$

= ٢(حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°) = ٢ (- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت) = - $\sqrt{٣}$ + ت

(د) = $\frac{٣٤(\text{حتا } ٢٨٧° + \text{ت جا } ٢٨٧°)}{١٧(\text{حتا } ٤٧° + \text{ت جا } ٤٧°)}$ = ٢ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

= ٢ (- $\frac{١}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = - ١ - $\sqrt{٣}$ ت

(٢٤) (أ) = $\frac{٤ \times ٥}{١٠}$ [حتا (١٤١° + ٩٨° - ١١٩°) + ت حا بنفس القياس)] = ٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

(ب) = $\frac{٣٠}{٥ \times ٣}$ [حتا (١٥٣° - ٣٨° - ٨٥°) + ت حا نفس القياس]

= ٢ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

(٢٥) | ع١ ع٢ ع٣ | = $\frac{٣}{٢}$ × ٨ × $\frac{٥}{٤}$ = ١٥

، س(ع١ ع٢ ع٣) = ٢٩° + ٥٣° + ٣٨° = ١٢٠°

∴ ع١ ع٢ ع٣ = ١٥ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

= - $\frac{١٥}{٢}$ + $\frac{١٥}{٢}$ $\sqrt{٣}$ ت

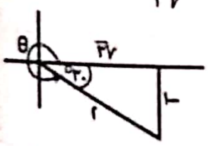
(٢٦) | $\frac{ع١ \times ع٢}{ع٣}$ | = $\frac{١٠ \times ٢١}{٤٢}$ = ٥

، س($\frac{ع١ \times ع٢}{ع٣}$) = ٢٤٩° + ١٧٠° - ١٠٤° = ٣١٥°

∴ $\frac{ع١ \times ع٢}{ع٣}$ = ٥ (حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°)

= ٥ ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ - ت $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$) = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ - $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ ت

(٢٧) | ع١ | = $\sqrt{٢٧ + ٩}$ = ٦ ، ظا θ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$



∴ θ = ٣٣٠° ∴ ع١

= ٦ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°)

∴ ع١ ع٢ = ٦ × ٣ [حتا (٣٣٠° + ١٢٠°) + ت حا نفس القياس)

= ١٨ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) = ١٨ ت

، ع١ / ع٢ = $\frac{٦}{٣}$ [حتا (٣٣٠° - ١٢٠°) ت حا نفس القياس)

= ٢ (حتا ٢١٠° + ت حا ٢١٠°) = - $\sqrt{٣}$ - ت

(٢٨) ع٢ = -٦ ت = ٦ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°)

| ع١ | = $\sqrt{٢}$ ، ظا θ = ١ ∴ = ٤٥°

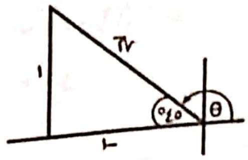
∴ ع١ = $\sqrt{٢}$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)

∴ $\frac{ع١ \times ع٢}{ع٣}$ = $\frac{٦ \times \sqrt{٢}}{٢}$ [حتا (٢٧٠° + ٤٥° - ٧٥°) + ت حا ....

= ٣ $\sqrt{٢}$ [حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°]

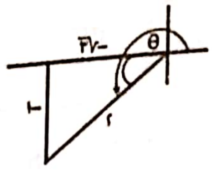
= ٣ $\sqrt{٢}$ [- $\frac{١}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت] = - $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{٢}$ - $\frac{٣\sqrt{٦}}{٢}$ ت

(٢٩) |ع١| = √٢ ، ظا θ = ١/−١



∴ θ = ١٣٥° ∴ ع١ = √٢ (حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°)

|ع٢| = ٢ ، ظا θ = −١/−√٣ ∴ = ٢١٠°



∴ ع٢ = ٢ (حتا ٢١٠° + ت حا ٢١٠°)

∴ ع١ / (ع٢ × ع٣) = ٨ / (√٢ × ٢) [حتا (١٠٥° − ١٣٥° − ٢١٠°) + ت حا نفس المقياس)]

= ٢√٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) = ٢√٢ (−١/٢ + √٣/٢ ت)

(٣٠) ع١ = (√٣ + ٧ت)/(١ − ٢√٣ ت) × (١ + ٢√٣ ت)/(١ + ٢√٣ ت) = ١٣(−√٣ + ت)/١٣

∴ |ع١| = ٢ ، ظا θ = ١/−√٣ ∴ θ = ١٥٠°

∴ ع١ = ٢ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°) ،

ع٢ = (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

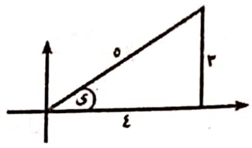
∴ ع١ ع٢ = ٢ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) = −٢ ،

ع١/ع٢ = ٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) = ٢ (−١/٢ + √٣/٢ ت)

(٣١) العدد = (جتا ٢ي + ت جا ٢ي) (جتا ٣ي + ت جا ٣ي) / (جتا ٤ي + ت جا ٤ي)

= [حتا (٢ى + ٣ى − ٤ى)

+ ت حا (نفس القياس)]

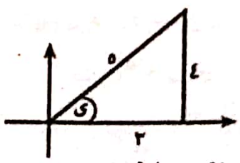


= حتا ى + ت حا ى = ٤/٥ + ٣/٥ ت

(٣٢) ع١ = ١٠ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°)

∴ ع١ ع٢ = ١٠ × ٢٫٥ [حتا (٩٠° + ى) + ت حا (٩٠° + ى)]

= ٢٥ (− حا ى + ت حتا ى)

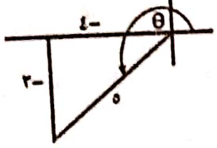


= ٢٥ (− ٤/٥ + ٣/٥ ت) = − ٢٠ + ١٥ ت ،

ع١/ع٢ = ١٠/٢٫٥ [حتا (٩٠° − ى) + ت حا (٩٠° − ى)]

= ٤ (حا ى + ت حتا ى) = ٤ (٤/٥ + ٣/٥ ت) = ٣٫٢ + ٢٫٤ ت

(٣٣) ع٢ = ٢ [− حتا θ + ت حا θ]



= ٢ [حتا (ط − θ) + ت حا (ط − θ)]

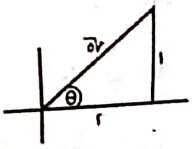
∴ ع١ ع٢ = ٥ × ٢ [حتا (٢θ + ط − θ) + ت حا نفس القياس]

= ١٠ (حتا (ط + θ) + ت حا (ط + θ)

= ١٠ (− حتا θ − ت حا θ) = ١٠ (٤/٥ + ٣/٥ ت) = ٨ + ٦ ت

(٣٤) ع١ = ٥ [حتا (ط/٢ − θ) + ت حا (ط/٢ − θ)]

، ع٢ = √٥ (− حتا ٢θ + ت حا ٢θ)



= √٥ (حتا (ط − ٢θ) + ت حا

(ط − ٢θ)]

ع١/ع٢ = ٥/√٥ [حتا (ط/٢ − θ − ط + ٢θ) + ت حا نفس القياس]

= √٥ [حتا (٣ط/٢ + θ) + ت حا (٣ط/٢ + θ)]

= √٥ [حا θ − ت حتا θ] = √٥ (١/√٥ − ت × ٢/√٥)

= ١ − ٢ ت

إجابات نظرية ديموافر

(١) (أ) ع١ = (√٢)^٥ [حتا ٢٤° × ٥ + ت حا ٢٤° × ٥]

= ٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) = ٢ (− ١/٢ + √٣/٢ ت)

(ب) ع٢ = (√٢)^٧ [حتا ٢١ط/٤ + ت حا ٢١ط/٤]

= (√٢)^٧ [حتا ٢٢٥° + ت حا ٢٢٥°] = ٨√٢ [− ١/√٢ − ١/√٢ ت)

(٢) (iii) ع٣ = (حتا ١٥° + ت حا ١٥°)^٩

= حتا (٩ × ١٥°) + ت حا (٩ × ١٥°) = حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°

= − ١/√٢ + ١/√٢ ت = √٢/٢ (−١ + ت) ،

(iv) ع٤ = [٢ (حتا ١١ط/٦ + ت حا ١١ط/٦)]^٤

= ١٦ [حتا ٤٤/٦ ط + ت حا ٤٤/٦ ط] = ١٦ (حتا ٤ط/٣ + ت حا ٤ط/٣)

= ١٦ (− ١/٢ − √٣/٢ ت) = −٨ (١ + √٣ ت)

(٣) $|ع| = \sqrt{٢}$ ، ظا θ = ١ ∴ θ = ٤٥°

∴ ع = $\sqrt{٢}$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)

$|ع^{٢}| = (\sqrt{٢})^{٢} = ٢$ ، سعة($ع^{٢}$) = ٤٥° × ٢ = ٩٠°

∴ $ع^{٢}$ = ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) = ٢ ت ،

$ع^{٧} = (\sqrt{٢})^{٧}$ [حتا ٤٥° × ٧ + ت حا ٤٥° × ٧]

= ٨ $\sqrt{٢}$ [حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°]

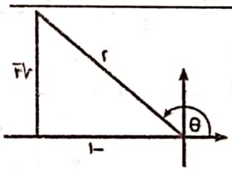
= ٨ $\sqrt{٢}$ [$\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت] = ٨ - ٨ ت ،

$ع^{-٣} = (\sqrt{٢})^{-٣}$ [حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°]

∴ $ع^{-٣} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ [حتا (٣٦٠° + ١٣٥°) ت حا (٣٦٠° - ١٣٥°)]

= $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ [- $\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) = - $\frac{١}{٤}$ (١ + ت)

(٤) $|ع|$ = ٢ ، ظا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{-١}$ ∴ θ = ١٢٠°



∴ ع = ٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

(i) $ع^{٣} = ٢^{٣}$ [حتا ٣ × ١٢٠° + ت حا ٣ × ١٢٠°]

= ٨ [١ + ٠] = ٨ ، ع̄ = ٢ [حتا (٣٦٠° - ١٢٠°) + ت حا ....

∴ $(ع̄)^{٣} = ٢^{٣}$ [حتا ٣ × ٢٤٠° + ت حا ٣ × ٢٤٠°]

= ٨ (١ + ٠) = ٨

(ii) $ع^{٢} = ٢^{٢}$ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°) ،

$ع^{٥} = ٢^{٥}$ (حتا ٦٠٠° + ت حا ٦٠٠°)

= ٣٢ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°) = ٨ $ع^{٢}$

(٥) (أ) = (حتا ١٥٦° + ت حا ١٥٦°) (حتا ١٥٩° + ت حا ١٥٩°)

= حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت

(ب) = (حتا $\frac{٥ط}{٦}$ + ت حا $\frac{٥ط}{٦}$) (حتا $\frac{٤ط}{٣}$ + ت حا $\frac{٤ط}{٣}$)

= حتا $\frac{١٣ط}{٦}$ + ت حا $\frac{١٣ط}{٦}$ = حتا $\frac{ط}{٦}$ + ت حا $\frac{ط}{٦}$.

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت = $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ + ت)

(حـ) = $(\sqrt{٢})^{٨}$ [حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°] × [حتا $\frac{١٢ط}{٨}$ + ت حا $\frac{١٢ط}{٨}$]

= ١٦ (حتا ٣٩٠° + ت حا ٣٩٠°) = ١٦ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

= ١٦ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت) = ٨ ($\sqrt{٣}$ + ت)

(٦) (أ) = $\frac{جتا ١٤٠° + ت جا ١٤٠°}{جتا ٩٥° + ت جا ٩٥°}$ = حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°

= $\frac{١}{٢}\sqrt{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ ت

(ب) = $\frac{جتا ٢٢٥° + ت جا ٢٢٥°}{(جتا ٦٥° + ت جا ٦٥°)^{٣}}$ = $\frac{جتا ٢٢٥° + ت جا ٢٢٥°}{جتا ١٩٥° + ت جا ١٩٥°}$

= حتا ٣٠° + ت حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}\sqrt{٣} + \frac{١}{٢}$ ت

(٧) العدد =

$\frac{(جتا ٢٥٢° + ت جا ٢٥٢°)(جتا ١١٤° + ت جا ١١٤°)}{جتا ٣٣٦° + ت جا ٣٣٦°}$

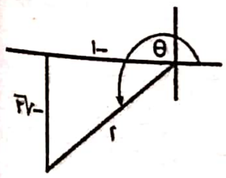
= حتا (٢٥٢° + ١١٤° - ٣٣٦°) + ت حا (٢٥٢° + ١١٤° - ٣٣٦°)

= حتا ٣٠° + ت حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}\sqrt{٣} + \frac{١}{٢}$ ت .

(٨) ع = $\frac{٢ - ٢\sqrt{٣}ت}{١ + \sqrt{٣}ت} \times \frac{١ - \sqrt{٣}ت}{١ - \sqrt{٣}ت} = \frac{-٤ - ٤\sqrt{٣}ت}{٤}$

= -١ - $\sqrt{٣}$ ت ∴ $|ع|$ = ٢ ، ظا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{-١}$

∴ θ = ٢٤٠°



∴ ع = ٢ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

∴ -ع = ٢ [(حتا ٢٤٠° + ١٨٠°) + ت حا (٢٤٠° + ١٨٠°)]

= ٢ (حتا ٤٢٠° + ت حا ٤٢٠°)

= ٢ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)

، ع̄ = ٢ [حتا (٣٦٠° - ٢٤٠°) + ت حا (٣٦٠° - ٢٤٠°)]

، ع' = [حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°] لأن ٣٦٠° - ٢٤٠° = ١٢٠°

، $ع^{٤} = ٢^{٤}$ (حتا ٩٦٠° + ت حا ٩٦٠°)

= ١٦ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°) = ٨ ع

(٩) ع١ = ٢√٢ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°) ،

ع٢ = ٢ (حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠°) ∴ $ع_1^4 \times ع_2^3$ =

= $(٢\sqrt{٢})^4$ (حتا ٤ × ٤٥° + ت حا ٤ × ٤٥°) × ٢^3

(حتا ٩٠٠° + ت حا ٩٠٠°)

= ٣٢ (حتا ١٠٨٠° + ت حا ١٠٨٠°) = ٣٢ + صفر

(١٠) ع١ = √٢ (حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°) ،

ع٢ = ٢√٣ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°) ∴ $\left(\frac{ع_2}{ع_1}\right)^4$

= $\left[\frac{٢\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right.$ (حتا ١٥° + ت حا ١٥°) $]^4$ = ٣٦ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)

= ٣٦ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = ١٨ (١ + √٣ ت)

، $\frac{ع_2^3}{ع_1^2}$ = $\frac{(٢\sqrt{٣})^3 (\text{حتا } ٩٩٠° + \text{ت حا } ٩٩٠°)}{(\sqrt{٢})^2 (\text{حتا } ٦٣٠° + \text{ت حا } ٦٣٠°)}$

= ١٢√٣ (حتا ٣٦٠° + ت حا ٣٦٠°) = ١٢√٣

(١١) ع١ = ٢√٢ (حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°) ،

ع٢ = ٢ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°) ، ع٣ = ٢ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°)

∴ $\frac{ع_1^4 \times ع_2^2}{ع_3^3}$ =

= $\frac{٦٤(\text{حتا } ٥٤٠° + \text{ت حا } ٥٤٠°)(\text{حتا } ٤٨٠° + \text{ت حا } ٤٨٠°)}{٨(\text{حتا } ٩٩٠° + \text{ت حا } ٩٩٠°)}$

= ٣٢ (حتا (٥٤٠° + ٤٨٠° - ٩٩٠°) + ت حا نفس القياس)

= ٣٢ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°) = ٣٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت)

(١٢) ع١ = ٢ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°) ∴ $\frac{ع_1^3 ع_2^5}{ع_3^4}$ =

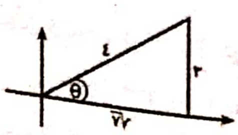
= $\frac{٨(\text{حتا } ٤٥٠° + \text{ت حا } ٤٥٠°)(\text{حتا } ٦٠٠° + \text{ت حا } ٦٠٠°)}{\text{حتا } ٥٤٠° + \text{ت حا } ٥٤٠°}$

= ٨ (حتا (٤٥٠° + ٦٠٠° - ٥٤٠°) + ت حا نفس القياس)

= ٨ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°) = ٨ (- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت)

(١٣) ع٢ = ٢ [حتا (٢ط - θ) + ت حا (٢ط - θ)]

∴ $ع_1^2 \times ع_2^3$ =



$(\text{حتا } ٢θ + \text{ت حا } ٢θ)^2$

× ٨ [حتا (٢ط - θ) + ت حا (٢ط - θ)$]^3$

= ٨ (حتا ٤θ + ت حا ٤θ) [حتا (٦ط - ٣θ) + ت حا (٦ط - ٣θ)]

= [حتا (٤θ + ٦ط - ٣θ) + ت حا نفس القياس] × ٨

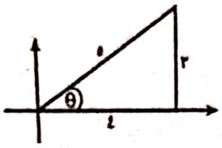
= ٨ [حتا θ + ت حا θ]

= ٨ [$\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ ت] = ٢√٧ + ٦ ت

(١٤) ع١ = √٥ [حتا (٢ط - θ) + ت حا (٢ط - θ)]

، ع٢ = ٢ [حتا ($\frac{ط}{٢}$ - θ) + ت حا ($\frac{ط}{٢}$ - θ)]

∴ $\frac{٨ع_1^4}{ع_2^3}$ =



$\frac{٨(\sqrt{٥})^4 [\text{حتا}(٨ط - ٤θ) + \text{ت حا}(٨ط - ٤θ)]}{(٢)^3 [\text{حتا}(\frac{٣ط}{٢} - ٣θ) + \text{ت حا}(\frac{٣ط}{٢} - ٣θ)]}$

= ٢٥ [حتا ($\frac{ط}{٢}$ - θ) + ت حا ($\frac{ط}{٢}$ - θ)]

= ٢٥ (حا θ + ت حتا θ) = ٢٥ ($\frac{٣}{٥}$ + $\frac{٤}{٥}$ ت)

(١٥) $(\text{حتا } θ + \text{ت حا } θ)^2$ = حتا ٢θ + ت حا ٢θ .. (١)

= ($\text{حتا}^2 θ - \text{حا}^2 θ$) + ٢ حتا θ حا θ ت .. (٢)

من (١) ، (٢) ∴ حتا ٢θ = $\text{حتا}^2 θ - \text{حا}^2 θ$ ،

حا ٢θ = ٢ حا θ حتا θ وأيضاً $(\text{حتا } θ + \text{ت حا } θ)^3$

= حتا ٣θ + ت حا ٣θ .. (٣)

= ($\text{حتا}^3 θ$ - ٣ حتا θ $\text{حا}^2 θ$) + (٣ $\text{حتا}^2 θ$ حا θ - $\text{حا}^3 θ$) ت (٤)

من (٣) ، (٤) ∴ حتا ٣θ = $\text{حتا}^3 θ$ - ٣ حتا θ $\text{حا}^2 θ$

= $\text{حتا}^3 θ$ - ٣ حتا θ (١ - $\text{حتا}^2 θ$) = ٤ $\text{حتا}^3 θ$ - ٣ حتا θ ،

حا ٣θ = ٣ $\text{حتا}^2 θ$ حا θ - $\text{حا}^3 θ$ = ٣ (١ - $\text{حا}^2 θ$) حا θ - $\text{حا}^3 θ$

= ٣ حا θ - ٤ $\text{حا}^3 θ$

إجابات جذور العدد المركب

(١) (أ) |ع| = ٤ ، ظا θ = √٣ ∴ س(ع) = ٦٠°

∴ جذرا ع هما ٢ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°) ، ٢ (حتا ٢١٠° + ت حا ٢١٠°) أي √٣ + ت ، -√٣ - ت

(ب) ع = ٩ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) ∴ جذرا ع هما

٢ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°) ، ٣ (حتا ٢٢٥° + ت حا ٢٢٥°)

أي $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ (١ + ت) ، - $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ (١ + ت)

(حـ) | ع | = ٤ ، ظا θ = $\frac{١}{-\sqrt{٣}}$ ∴ سه(ع) = ١٥٠°

∴ جذرا ع هما ٢ (حتا ٧٥° + ت حا ٧٥°) ، ٧٥° + ١٨٠° = ٢٥٥°

٢ (حتا ٢٥٥° + ت حا ٢٥٥°)

(د) ع = ٤ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°)

∴ جذرا ع هما ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) ، ٢ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°) أي ٢ ت ، -٢ ت

(هـ) ع = ٤ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°) ∴ جذرا ع هما

٢ (حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°) ، ٢ (حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°)

أي $\sqrt{٢}$ (-١ + ت) ، $\sqrt{٢}$ (١ - ت)

(و) | ع | = ٤ ، ظا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{١}$ ∴ سه(ع) = ٣٠٠°

∴ جذرا ع هما ٢ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°) ،

٢ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°) أي $-\sqrt{٣}$ + ت ، $\sqrt{٣}$ - ت

(٢) (أ) س^٢ - ص^٢ = ٨ .. (١) ، ٢ س ص = ٨ $\sqrt{٣}$ (٢)

∴ س^٢ + ص^٢ = ١٦ .. (٣) ∴ س = ∓ ٢ $\sqrt{٣}$ ،

ص = ± ٢ ، ع = ١٦ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)

∴ $\sqrt{ع}$ = ٤ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°) أو ٤ (حتا ٢١٠° + ت حا ٢١٠°)

(ب) س^٢ - ص^٢ = ٠ ∴ ص = ± س ، ٢ س ص = ٢

∴ س٢ = ١ أي س ± ١ ∴ ص = ∓ ١ ،

ع = ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°)

∴ $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)

= ١ + ت أو $\sqrt{٢}$ (حتا ٢٢٥° + ت حا ٢٢٥°) = -١ - ت

(حـ) س^٢ - ص^٢ = -٤ .. (١) ، ٢ س ص = -٤ $\sqrt{٣}$ (٢)

∴ س^٢ + ص^٢ = ٨ .. (٣) ∴ س = ∓ $\sqrt{٢}$ ،

ص = ∓ $\sqrt{٦}$ ، أيضاً ع = ٨ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

∴ $\sqrt{ع}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) = $-\sqrt{٢}$ + ت $\sqrt{٦}$ أو

٢ $\sqrt{٢}$ (حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠°) = $\sqrt{٢}$ - ت $\sqrt{٦}$

(٣) ع = $\frac{[٢(\text{جتا } ٣٣٠° + \text{ت جا } ٣٣٠°)]^{٦}}{[\sqrt{٢}(\text{جتا } ١٣٥° + \text{ت جا } ١٣٥°)]^{٨}}$

= $\frac{٦٤(\text{جتا } ١٩٨٠° + \text{ت جا } ١٩٨٠°)}{١٦(\text{جتا } ١٠٨٠° + \text{ت جا } ١٠٨٠°)}$

= ٤ (حتا ٩٠٠° + ت حا ٩٠٠°)

= ٤ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°)

∴ $\sqrt{ع}$ = ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) = ٢ ت أو

$\sqrt{ع}$ = ٢ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°) = -٢ ت

(٤) ع =

$\frac{[\sqrt{٢}(\text{جتا } ٤٥° + \text{ت جا } ٤٥°)]^{١٠}[٢(\text{جتا } ١٥٠° + \text{ت جا } ١٥٠°)]^{٤}}{١٢٨(\text{جتا } ٢٧٠° + \text{ت جا } ٢٧٠°)}$

= $\frac{٣٢(\text{جتا } ٤٥٠° + \text{ت جا } ٤٥٠°) \times ١٦[(\text{جتا } ٦٠٠° + \text{ت جا } ٦٠٠°)]}{[١٢٨(\text{جتا } ٢٧٠° + \text{ت جا } ٢٧٠°)]}$

∴ ع = $\frac{٣٢ \times ١٦}{١٢٨}$ [حتا (٤٥٠ + ٦٠٠ - ٢٧٠) + ت حا نفس القياس)]

= ٤ [حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°] وجذراه هما

٢ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°) = $\sqrt{٣}$ + ت أو

٢ (حتا ٢١٠° + ت حا ٢١٠°) = $-\sqrt{٣}$ - ت

(٥) ع = ٢٧ (حتا صفر + ت حا صفر)

∴ $\sqrt[٣]{ع}$ = $(٢٧)^{\frac{١}{٣}}$ [حتا $\frac{٠ + ٢ك\text{ط}}{٣}$ + ت حا $\frac{٠ + ٢ك\text{ط}}{٣}$]

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ∴ الجذور هي :

الأول = ٣ (حتا ٠ + ت حا ٠) = ٣

، الثاني = ٣ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) = - $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ت

، الثالث = ٣ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°) = - $\frac{٣}{٢}$ - $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(٦) ع^٣ = - ٦٤ ت = ٦٤ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°)

∴ ع = $(٦٤)^{\frac{١}{٣}}$ (حتا $\frac{٢٧٠° + ٢ك\text{ط}}{٣}$ + ت حا $\frac{٢٧٠° + ٢ك\text{ط}}{٣}$)

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ∴ الحلول هي :

ع = ٤ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) = ٤ ت أو

ع = ٤ (حتا ٢١٠° + ت حا ٢١٠°) = -٢ $\sqrt{٣}$ - ٢ ت أو

ع = ٤ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°) = ٢ $\sqrt{٣}$ - ٢ ت

(٧) ع^٣ + ٨ = ٠ ∴ ع^٣ = -٨ = ٨ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°)

∴ ع = $٨^{\frac{١}{٣}}$ (حتا $\frac{\text{١٨٠° + ٢ك ط}}{٣}$ + ت حا $\frac{\text{١٨٠° + ٢ك ط}}{٣}$)

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ∴ الحلول هي

∴ ع = ٢ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°) = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

أ، ع = ٢ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) = -٢

أ، ع = ٢ (حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠°) = ١ - $\sqrt{٣}$ ت

(٨) ع^٤ = ٢٥٦ (حتا ٠ + ت حا ٠)

∴ ع = $(٢٥٦)^{\frac{١}{٤}}$ (حتا $\frac{\text{٠ + ٢ك ط}}{٤}$ + ت حا $\frac{\text{٠ + ٢ك ط}}{٤}$)

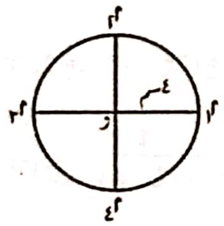
حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ∴ الجذور هي :

الأول = ٤ (حتا ٠ + ت حا ٠) = ٤

الثاني = ٤ (حتا $\frac{ط}{٢}$ + ت حا $\frac{ط}{٢}$) = ٤ ت

الثالث = ٤ (حتا ط + ت حا ط) = -٤

الرابع = ٤ (حتا $\frac{\text{٣ط}}{٢}$ + ت حا $\frac{\text{٣ط}}{٢}$) = -٤ت وتمثل هذه الجذور



النقط م١، م٢، م٣، م٤ من دائرة طول نصف قطرها = ٤سم كما في الشكل

(٩) ع^٤ = -٨ + ٨ $\sqrt{٣}$ ت = ١٦ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

∴ ع = $(١٦)^{\frac{١}{٤}}$ (حتا $\frac{\text{١٢٠° + ٢ك ط}}{٤}$ + ت حا $\frac{\text{١٢٠° + ٢ك ط}}{٤}$)

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ∴ الجذور هي

ع = ٤ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°) = ٢ $\sqrt{٣}$ + ٢ ت أ،

ع = ٤ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°) = -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت أ،

ع = ٤ (حتا ٢١٠° + ت حا ٢١٠°) = -٢ $\sqrt{٣}$ -٢ ت أ،

ع = ٤ (حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠°) = ٢ - ٢ $\sqrt{٣}$ ت

(١٠) ع^٤ = -٨١ ت = ٨١ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°)

∴ ع = $(٨١)^{\frac{١}{٤}}$ (حتا $\frac{\text{٢٧٠° + ٢ك ط}}{٤}$ + ت حا $\frac{\text{٢٧٠° + ٢ك ط}}{٤}$)

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ∴ الحلول هي :

ع = ٣ (حتا ٧٦.٥° + ت حا ٦٧.٥°) أ،

ع = ٣ (حتا ١٥٧.٥° + ت حا ١٥٧.٥°) أ،

ع = ٣ (حتا ٢٤٧.٥° + ت حا ٢٤٧.٥°) أ،

ع = ٣ (حتا ٣٣٧.٥° + ت حا ٣٣٧.٥°) أ،

(١١) ع^٥ = ٣٢ ت = ٣٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°)

∴ ع = $٣٢^{\frac{١}{٥}}$ (حتا $\frac{\text{٩٠° + ٢ك ط}}{٥}$ + ت حا $\frac{\text{٩٠° + ٢ك ط}}{٥}$)

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ∴ الحلول هي :

ع = ٢ (حتا ١٨° + ت حا ١٨°) أ،

ع = ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) أ،

ع = ٢ (حتا ١٦٢° + ت حا ١٦٢°) أ،

ع = ٢ (حتا ٢٣٤° + ت حا ٢٣٤°) أ،

ع = ٢ (حتا ٣٠٦° + ت حا ٣٠٦°)

(١٢) ع = $\frac{(\text{جتا}\frac{\text{٧ط}}{٤} + \text{ت جا}\frac{\text{٧ط}}{٤})^{٨}\ (\text{جتا}\frac{\text{٥ط}}{٣} + \text{ت جا}\frac{\text{٥ط}}{٣})^{٦}}{(\text{جتا}\frac{\text{٣ط}}{٤} + \text{ت جا}\frac{\text{٣ط}}{٤})^{١٢}}$

= $\frac{(\text{جتا ١٤ط + ت جا ١٤ط})(\text{جتا ١٠ط + ت جا ١٠ط})}{\text{جتا ٩ط + ت جا ٩ط}}$

= حتا (١٤ ط + ١٠ ط - ٩ ط) + ت حا نفس القياس

= حتا ط + ت حا ط

∴ ع $^{\frac{١}{٤}}$ = حتا $\frac{\text{ط + ٢ك ط}}{٤}$ + ت حا $\frac{\text{ط + ٢ك ط}}{٤}$

حيث ك = ٠ أ، ١ أ، ٢ أ، ٣

∴ ع $^{\frac{١}{٤}}$ = حتا $\frac{ط}{٤}$ + ت حا $\frac{ط}{٤}$ أ، حتا $\frac{\text{٣ط}}{٤}$ + ت حا $\frac{\text{٣ط}}{٤}$

أ، حتا $\frac{\text{٥ط}}{٤}$ + ت حا $\frac{\text{٥ط}}{٤}$ أ، حتا $\frac{\text{٧ط}}{٤}$ + ت حا $\frac{\text{٧ط}}{٤}$

(١٣) نفرض أن $(\text{٥ + ١٢ ت})^{\frac{١}{٢}}$ = س + ت ص

∴ س^٢ - ص^٢ = ٥ .. (١) ، ٢ س ص = ١٢ ∴ س^٢ + ص^٢ = ١٣ .. (٢)

بالجمع والطرح ∴ س = ∓ ٣ ، ص = ∓ ٢

∴ $(\text{٥ + ١٢ ت})^{\frac{٣}{٢}}$ = (٥ + ١٢ ت) × ± (٣ + ٢ ت) = ± (-٩ + ٤٦ ت)

(١٤) ١ + $\sqrt{٣}$ ت = ٢ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)

∴ (١ + $\sqrt{٣}$ ت)^٥ = ٣٢ (حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠°)

∴ $(\text{١ + } \sqrt{٣}\text{ ت})^{\frac{٥}{٢}}$ = $(٣٢)^{\frac{١}{٢}}$ (حتا $\frac{\text{٣٠٠° + ٢ك ط}}{٢}$ + ت حا $\frac{\text{٣٠٠° + ٢ك ط}}{٢}$) حيث ك = ٠ ، ١ ∴ قيم هذا العدد هي :

٤ $\sqrt{٢}$ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°) ،

٤ $\sqrt{٢}$ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°)

(١٥) ت - ١ = $\sqrt{٢}$ (حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°)

∴ (ت - ١)^{٤} = ٤ (حتا ٥٤٠° + ت حا ٥٤٠°)

= ٤ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°)

∴ (ت - ١)$^{\frac{٤}{٣}}$ = $\sqrt[٣]{٤}$ (حتا $\frac{١٨٠° + ٢ ك ط}{٣}$ + ت حا $\frac{١٨٠° + ٢ ك ط}{٣}$)

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ∴ قيم هذا العدد هي :

$\sqrt[٣]{٤}$ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°) أ،

$\sqrt[٣]{٤}$ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) أ،

$\sqrt[٣]{٤}$ (حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠°)

---

(١٦) ل = $\frac{١+ت}{١-ت} \times \frac{١+ت}{١+ت}$ = ت ، م = $\frac{١}{ت}$ = -ت

∴ ع = ٥ت^{١٣} - ٣ (-ت)^{٧} = ٥ ت - ٣ ت = ٢ ت

= ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) ∴ ع^{٣} = ٨ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°)

∴ ع$^{\frac{٣}{٢}}$ = (٨)$^{\frac{١}{٢}}$ [حتا $\frac{٢٧٠° + ٢ ك ط}{٢}$ + ت حا $\frac{٢٧٠° + ٢ ك ط}{٢}$] حيث ك = ٠ ، ١ ∴ ع$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ (حتا ١٣٥° + ت حا ١٣٥°) أ،

∴ ع$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ (حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°) = ± (٢ - ٢ ت)

إجابات الصورة الأسية للعدد المركب

(١) (أ) ع$_{١}$ = ٢ (حتا $\frac{٥ط}{٦}$ + ت حا $\frac{٥ط}{٦}$) = -$\sqrt{٣}$ + ت

(ب) ع$_{٢}$ = ٤ (حتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت حا $\frac{٢ط}{٣}$) = -٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت

(جـ) ع$_{٣}$ = ٣ (حتا $\frac{ط}{٢}$ + ت حا $\frac{ط}{٢}$) = ٠ + ٣ ت

---

(٢) (أ) ع$_{١}$ = حتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت حا $\frac{٣ط}{٢}$ = - ت

(ب) $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{٥ط}{٤}$ + ت حا $\frac{٥ط}{٤}$) = -١ - ت

(جـ) ع$_{٣}$ = ١٢ (حتا $\frac{٥ط}{٣}$ + ت حا $\frac{٥ط}{٣}$) = ٦ - ٦$\sqrt{٣}$ ت

---

(٣) (i) |ع$_{١}$| = ٣ ، سـ(ع$_{١}$) = ٠ ∴ ع$_{١}$ = ٣ هـ$^{(٠)ت}$

(ii) |ع$_{٢}$| = ٢ ، سـ(ع$_{٢}$) = $\frac{ط}{٢}$ ∴ ع$_{٢}$ = ٢ هـ$^{\frac{ط}{٢}ت}$

(iii) |ع$_{٣}$| = ٩ ، سـ(ع$_{٣}$) = $\frac{٣ط}{٢}$ ∴ ع$_{٣}$ = ٩ هـ$^{\frac{٣ط}{٢}ت}$

(iv) |ع$_{٤}$| = ٤ ، سـ(ع$_{٤}$) = ط ∴ ع$_{٤}$ = ٤ هـ$^{ط ت}$

---

(٤) (i) |ع$_{١}$| = ٤ ، سـ(ع$_{١}$) = $\frac{ط}{٦}$ ∴ ع$_{١}$ = ٤ هـ$^{\frac{ط}{٦}ت}$

(ii) |ع$_{٢}$| = ٢ ، سـ(ع$_{٢}$) = $\frac{٧ط}{٦}$ ∴ ع$_{٢}$ = ٢ هـ$^{\frac{٧ط}{٦}ت}$

(iii) |ع$_{٣}$| = ٢$\sqrt{٢}$ ، سـ(ع$_{٣}$) = $\frac{٧ط}{٤}$ ∴ ع$_{٣}$ = ٢$\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٧ط}{٤}ت}$

---

(٥) (i) |ع$_{١}$| = ٤ ، سـ(ع$_{١}$) = $\frac{٣ط}{٤}$ ∴ ع$_{١}$ = ٤ هـ$^{\frac{٣ط}{٤}ت}$

(ii) |ع$_{٢}$| = ٤ ، سـ(ع$_{٢}$) = $\frac{٥ط}{٦}$ ∴ ع$_{٢}$ = ٤ هـ$^{\frac{٥ط}{٦}ت}$

---

(٦) ع = $\frac{١٢}{١ + \sqrt{٣}ت} \times \frac{١ - \sqrt{٣}ت}{١ - \sqrt{٣}ت}$ = ٣ - ٣$\sqrt{٣}$ ت

∴ |ع| = ٦ ، سـ(ع) = $\frac{٥ط}{٣}$ ∴ ع = ٦ هـ$^{\frac{٥ط}{٣}ت}$

---

(٧) ع = $\frac{١ + ٥ت}{٢ - ٣ت} \times \frac{٢ + ٣ت}{٢ + ٣ت}$ = -١ + ت

∴ |ع| = $\sqrt{٢}$ ، سـ(ع) = $\frac{٣ط}{٤}$ ∴ ع = ٢$\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٣ط}{٤}ت}$

---

(٨) ع = $\frac{٢(٧ت - ٣)}{٢ + ٥ت} \times \frac{٢ - ٥ت}{٢ - ٥ت}$ = ٢ (١ + ت)

∴ |ع| = ٢$\sqrt{٢}$ ، سـ(ع) = $\frac{ط}{٤}$ ∴ ع = ٢$\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{ط}{٤}ت}$

---

(٩) ع $\frac{٦ - ٣\sqrt{٥}ت}{\sqrt{٥} + ٢ت} \times \frac{\sqrt{٥} - ٢ت}{\sqrt{٥} - ٢ت}$ = - ٣ ت

∴ |ع| = ٣ ، سـ(ع) = $\frac{٣ط}{٢}$ ∴ ع = ٣ هـ$^{\frac{٣ط}{٢}ت}$

---

(١٠) ع = $\frac{١ - ٥\sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} + ٤ت} \times \frac{\sqrt{٣} - ٤ت}{\sqrt{٣} - ٤ت}$ = -$\sqrt{٣}$ - ت

∴ |ع| = ٢ ، سـ(ع) = $\frac{٧ط}{٦}$ ∴ ع = ٢ هـ$^{\frac{٧ط}{٦}ت}$

---

(١١) ع = ٣ × ٢ هـ$^{(\frac{٥ط}{٦} + \frac{٢ط}{٣})ت}$ = ٦ هـ$^{\frac{٣ط}{٢}}$

= ٦ (حتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت حا $\frac{٣ط}{٢}$)

(١٢) $\text{ع} = \sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٢} \times \sqrt{٣}\,\text{هـ}^{\left(\frac{\text{ط}}{٢}+\frac{٧\text{ط}}{١٢}+\frac{\text{ط}}{٤}\right)\text{ت}}$

$= ٤\sqrt{٣}\,\text{هـ}^{\frac{٤\text{ط}}{٣}} = ٤\sqrt{٣}\left(\text{حتا}\,\frac{٤\text{ط}}{٣} + \text{ت حا}\,\frac{٤\text{ط}}{٣}\right)$

(١٣) $\text{ع} = \frac{٦}{٢\sqrt{٣}}\,\text{هـ}^{\left(\frac{٧\text{ط}}{٣}-\frac{١١\text{ط}}{٦}\right)\text{ت}} = \sqrt{٣}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ط}}{٢}\text{ت}}$

$= \sqrt{٣}\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٢}\right)$

(١٤) $\text{ع} = \frac{٢\sqrt{٣}\times\sqrt{٣}}{٣}\,\text{هـ}^{\left(\frac{٥\text{ط}}{١٢}+\frac{٥\text{ط}}{٦}-\text{ط}\right)\text{ت}}$

$= ٢\,\text{هـ}^{\frac{\text{ط}}{٤}\text{ت}} = ٢\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٤} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٤}\right)$

(١٥) $\text{ع} = \frac{٣\sqrt{٢}\times\sqrt{٢}}{٢\times١}\,\text{هـ}^{\left(\frac{٨\text{ط}}{١٥}+\frac{٤\text{ط}}{٥}-\frac{\text{ط}}{٢}-\frac{٢\text{ط}}{٣}\right)\text{ت}}$

$= ٣\,\text{هـ}^{\frac{\text{ط}}{٦}\text{ت}} = ٣\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٦}\right)$

(١٦) $\text{ع}_١\,\text{ع}_٢ = \text{هـ}^{١+\frac{\text{ط}}{٢}\text{ت}-\frac{٣\text{ط}}{٢}\text{ت}} = \text{هـ} \times \text{هـ}^{-\text{ط ت}}$

$= \text{هـ}\left(\text{حتا}\,(-\text{ط}) + \text{ت حا}\,(-\text{ط})\right) = \text{هـ}\,(-١+٠) = -\text{هـ}$

، $\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \text{هـ}^{١+\frac{\text{ط}}{٢}\text{ت}+\frac{٣\text{ط}}{٢}\text{ت}} = \text{هـ} \times \text{هـ}^{٢\text{ط ت}}$

$= \text{هـ}\left(\text{حتا}\,٢\text{ط} + \text{ت حا}\,٢\text{ط}\right) = \text{هـ}\,(١+٠) = \text{هـ}$

(١٧) الأيمن $= \dfrac{\left(\text{هـ}^{\frac{٤\text{ط ت}}{٣}}\right)^{٣} \times \left(\text{هـ}^{\frac{٥\text{ط ت}}{٤}}\right)^{٤}}{\left(\text{هـ}^{\frac{١}{٢}(٣\text{ط ت}-٢)}\right)^{٢}}$

$= \text{هـ}^{٤\text{ط ت}+٥\text{ط ت}-٣\text{ط ت}+٢} = \text{هـ}^{٦\text{ط ت}} \times \text{هـ}^{٢}$

$= \text{هـ}^{٢}\left(\text{حتا}\,٦\text{ط} + \text{ت حا}\,٦\text{ط}\right) = \text{هـ}^{٢}\,(١+٠) = \text{هـ}^{٢}$

(١٨) $\text{ع} = ٦\,\text{هـ}^{\left(\frac{\text{ط}}{٤}+\frac{٣\text{ط}}{٢}\right)\text{ت}} = ٦\left(\text{حتا}\,\frac{٧\text{ط}}{٤} + \text{ت حا}\,\frac{٧\text{ط}}{٤}\right)$

$= ٦\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت}\right) = ٣\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢}\,\text{ت}$

(١٩) $\text{ع} = ٦\,\text{هـ}^{\left(\frac{٥\text{ط}}{٦}+\frac{\text{ط}}{٣}\right)\text{ت}} = ٦\left(\text{حتا}\,\frac{٧\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{٧\text{ط}}{٦}\right)$

$= ٦\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{ت}\right) = -٣\sqrt{٣} - ٣\,\text{ت}$

(٢٠) $\text{ع} = ٧\,\text{هـ}^{\left(-\frac{٤}{٦}\text{ط}+\frac{١١}{٦}\text{ط}\right)\text{ت}} = ٧\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٢}\right)$

$= ٧\,(٠+\text{ت}) = ٧\,\text{ت}$

(٢١) $\text{ع} = ٤\,\text{هـ}^{-\frac{٣}{٢}\text{ط ت}}\left(\text{حتا}\,\frac{٥\text{ط}}{٣} + \text{ت حا}\,\frac{٥\text{ط}}{٣}\right)$

$= ٤\,\text{هـ}^{\left(-\frac{٣}{٢}\text{ط}+\frac{٥\text{ط}}{٣}\right)\text{ت}} = ٤\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٦}\right)$

$= ٤\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{ت}\right) = ٢\sqrt{٣} + ٢\,\text{ت}$

(٢٢) (أ) $= ٩\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٢}\right)\left(\text{حتا}\,\frac{٣\text{ط}}{٤} + \text{ت حا}\,\frac{٣\text{ط}}{٤}\right)$

$= ٩\left(\text{حتا}\,\frac{٥\text{ط}}{٤} + \text{ت حا}\,\frac{٥\text{ط}}{٤}\right) = ٩\,\text{هـ}^{\frac{٥\text{ط}}{٤}\text{ت}}$

(ب) $= ٤\left(\text{حتا}\,\frac{٣\text{ط}}{٢} + \text{ت حا}\,\frac{٣\text{ط}}{٢}\right)\left(\text{حتا}\,\frac{٢\text{ط}}{٣} + \text{ت حا}\,\frac{٢\text{ط}}{٣}\right)$

$= ٤\left(\text{حتا}\,\frac{١٣\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{١٣\text{ط}}{٦}\right) = ٤\,\text{هـ}^{\frac{١٣\text{ط}}{٦}\text{ت}}$

(٢٣) (أ) $= ٤\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٦}\right)\left(\text{حتا}\,\frac{٥\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{٥\text{ط}}{٦}\right)$

$= ٤\left(\text{حتا ط} + \text{ت حا ط}\right) = ٤\,\text{هـ}^{\text{ط ت}}$

(ب) $= ٣\sqrt{٢}\left(\text{حتا}\,\frac{٣\text{ط}}{٤} + \text{ت حا}\,\frac{٣\text{ط}}{٤}\right)\left(\text{حتا}\,\frac{٧\text{ط}}{١٢} + \text{ت حا}\,\frac{٧\text{ط}}{١٢}\right)$

$= ٣\sqrt{٢}\left(\text{حتا}\,\frac{٤\text{ط}}{٣} + \text{ت حا}\,\frac{٤\text{ط}}{٣}\right) = ٣\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٤\text{ط}}{٣}\text{ت}}$

(٢٤) (أ) $= ٤\left(\text{حتا}\,\frac{٧\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{٧\text{ط}}{٦}\right)\left(\text{حتا}\left(\frac{-٥\text{ط}}{١٢}\right) + \text{ت حا}\left(\frac{-٥\text{ط}}{١٢}\right)\right)$

$= ٤\left(\text{حتا}\,\frac{٣\text{ط}}{٤} + \text{ت خا}\,\frac{٣\text{ط}}{٤}\right) = ٤\,\text{هـ}^{\frac{٣\text{ط}}{٤}\text{ت}}$

(ب) $٦\left(\text{حتا}\,\frac{٥\text{ط}}{٣} + \text{ت حا}\,\frac{٥\text{ط}}{٣}\right) \div \left(\text{حتا}\,\frac{٥\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{٥\text{ط}}{٦}\right)$

$= ٦\left(\text{حتا}\,\frac{٥\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{٥\text{ط}}{٦}\right) = ٦\,\text{هـ}^{\frac{٥\text{ط}}{٦}\text{ت}}$

(٢٥) (أ) $= ٢\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٢}\right)\left(\text{حتا}\,\frac{٢\text{ط}}{٣} + \text{ت حا}\,\frac{٢\text{ط}}{٣}\right)$

$= ٢\left(\text{حتا}\,\frac{٧\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{٧\text{ط}}{٦}\right) = -\sqrt{٣} - \text{ت}$

(ب) $= ٨\left(\text{حتا}\,\frac{٣\text{ط}}{٢} + \text{ت حا}\,\frac{٣\text{ط}}{٢}\right)\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{٦} + \text{ت حا}\,\frac{\text{ط}}{٦}\right)$

$= ٨\left(\text{حتا}\,\frac{٥\text{ط}}{٣} + \text{ت حا}\,\frac{٥\text{ط}}{٣}\right) = ٤ - ٤\sqrt{٣}\,\text{ت}$

(٢٦) (أ) $= ٢\left(\text{حتا }\frac{٥ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{٥ط}{٦}\right)\left(\text{حتا ط} + \text{ت حا ط}\right)$

$= ٢\left(\text{حتا }\frac{١١ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{١١ط}{٦}\right) = \sqrt{٣} - \text{ت}$

(ب) $= ٢\sqrt{٢}\left(\text{حتا }\frac{٥ط}{٤} + \text{ت حا }\frac{٥ط}{٤}\right)\left(\text{حتا }\frac{٥ط}{١٢} + \text{ت حا }\frac{٥ط}{١٢}\right)$

$= ٢\sqrt{٢}\left(\text{حتا }\frac{٥ط}{٣} + \text{ت حا }\frac{٥ط}{٣}\right) = \sqrt{٢} - \sqrt{٦}\,\text{ت}$

(٢٧) (أ) $= ٤\sqrt{٣}\left(\text{حتا }\frac{١١ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{١١ط}{٦}\right) + \left(\text{حتا }\frac{٢ط}{٣} + \text{ت حا }\frac{٢ط}{٣}\right)$

$= ٤\sqrt{٣}\left(\text{حتا }\frac{٧ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{٧ط}{٦}\right) = -٦ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$

(ب) $= ٤\left(\text{حتا }\frac{٧ط}{٤} + \text{ت حا }\frac{٧ط}{٤}\right) \div \left(\text{حتا }\frac{٧ط}{١٢} + \text{ت حا }\frac{٧ط}{١٢}\right)$

$= ٤\left(\text{حتا }\frac{٧ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{٧ط}{٦}\right) = -٢\sqrt{٣} - ٢\,\text{ت}$

(٢٨) $ع_١ = ٤\left(\text{حتا }\frac{١١ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{١١ط}{٦}\right)$

$\therefore ع_١ ع_٢ = ١٢\left[\text{حتا }\left(\frac{١١ط}{٦} + \frac{٥ط}{٦}\right) + \text{ت حا نفس القياس}\right]$

$= ١٢\left(\text{حتا }\frac{٢ط}{٣} + \text{ت حا }\frac{٢ط}{٣}\right) = ١٢\,\text{هـ}^{\frac{٢ط}{٣}\text{ت}}$ ،

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{٤}{٣}\left[\text{حتا }\left(\frac{١١ط}{٦} - \frac{٥ط}{٦}\right) + \text{ت حا نفس القياس}\right]$

$= \frac{٤}{٣}\left(\text{حتا ط} + \text{ت حا ط}\right) = \frac{٤}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ط ت}}$

(٢٩) $ع_١ = -٣ - ٣\text{ت} = ٣\sqrt{٢}\left(\text{حتا }\frac{٣ط}{٢} + \text{ت حا }\frac{٣ط}{٢}\right)$

، $ع_٢ = \sqrt{٣}\left(\text{حتا }\frac{٣ط}{٤} + \text{ت حا }\frac{٣ط}{٤}\right)$

$\therefore \frac{ع_١ \times ع_٢}{ع_٣} = \frac{٣\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}{٢}\left[\text{حتا }\left(\frac{٣ط}{٢} + \frac{٣ط}{٤} - \frac{٧ط}{١٢}\right) + \text{ت حا} \ldots\right]$

$= ٣\left(\text{حتا }\frac{٥ط}{٣} + \text{ت حا }\frac{٥ط}{٣}\right) = ٣\,\text{هـ}^{\frac{٥ط}{٣}\text{ت}}$

(٣٠) $ع_٢ = \sqrt{٢}\left(\text{حتا }\frac{ط}{٤} + \text{ت حا }\frac{ط}{٤}\right)$ ،

$ع_٣ = ٢\left(\text{حتا }\frac{١١ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{١١ط}{٦}\right)$

$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢ \times ع_٣} = \frac{٤}{\sqrt{٢} \times ٢}\left[\text{حتا }\left(\frac{٥ط}{١٢} - \frac{ط}{٤} - \frac{١١ط}{٦}\right) + \text{ت حا نفس القياس}\right]$

$= \sqrt{٢}\left[\text{حتا }\left(-\frac{٥ط}{٣}\right) + \text{ت حا }\left(-\frac{٥ط}{٣}\right)\right]$

$= \sqrt{٢}\left[\text{حتا }\frac{ط}{٣} + \text{ت حا }\frac{ط}{٣}\right] = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{ط}{٣}\text{ت}}$

(٣١) $ع_١ = ٣\sqrt{٢}\left(\text{حتا }\frac{٧ط}{٤} + \text{ت حا }\frac{٧ط}{٤}\right)$ ،

$ع_٢ = \sqrt{٢}\left(\text{حتا }\frac{٥ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{٥ط}{٦}\right)$ ، $\frac{٧ط}{٤} + \frac{٥ط}{٦} = \frac{٣١ط}{١٢}$

$\therefore ع_١ ع_٢ = ٦\left(\text{حتا }\frac{٣١ط}{١٢} + \text{ت حا }\frac{٣١ط}{١٢}\right) = ٦\,\text{هـ}^{\frac{١١}{١٢}\text{ط ت}}$

، $ع_١ / ع_٢ = ٣\left(\text{حتا }\frac{١١ط}{١٢} + \text{ت حا }\frac{١١ط}{١٢}\right) = ٣\,\text{هـ}^{\frac{١١}{١٢}\text{ط ت}}$

لأن $\frac{٧ط}{٤} - \frac{٥ط}{٦} = \frac{١١ط}{١٢}$

(٣٢) $ع_١ = ٢\sqrt{٢}\left(\text{حتا }\frac{٣ط}{٤} + \text{ت حا }\frac{٣ط}{٤}\right)$ ،

$ع_٢ = ٢\left(\text{حتا }\frac{٥ط}{٣} + \text{ت جا }\frac{٥ط}{٣}\right)$ ،

$ع_٣ = ٢\left(\text{حتا }\frac{٧ط}{٦} + \text{ت حا }\frac{٧ط}{٦}\right)$

$\therefore \frac{ع_١ \times ع_٢}{ع_٣} = \frac{٢\sqrt{٢} \times ٢}{٢}\left[\text{حتا }\left(\frac{٣ط}{٤} + \frac{٥ط}{٣} - \frac{٧ط}{٦}\right) + \text{ت حا} \ldots\right]$

$= ٢\sqrt{٢}\left(\text{حتا }\frac{٥ط}{٤} + \text{ت حا }\frac{٥ط}{٤}\right) = ٢\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٥}{٤}\text{ط ت}}$

(٣٣) $ع = ٢\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٣}{٤}\text{ط ت}}$ ، $\text{سعة}(-ع) = \frac{٣}{٤}\text{ط} + \text{ط} = \frac{٧}{٤}\text{ط}$

$\therefore -ع = ٢\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٧}{٤}\text{ط ت}}$ ، $\text{سعة}(ع) = ٢\text{ط} - \frac{٣ط}{٤} = \frac{٥ط}{٤}$

$\therefore ع = ٢\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٥ط}{٤}\text{ت}}$ ، $\text{سعة}\left(\frac{١}{ع}\right) = \frac{٥ط}{٤}$

$\therefore \frac{١}{ع} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}\,\text{هـ}^{\frac{٥ط}{٤}\text{ت}}$ ، $\text{سعة}(ع)^{-١} = ٢\text{ط} - \frac{٥ط}{٤} = \frac{٣ط}{٤}$

$\therefore (ع)^{-١} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}\,\text{هـ}^{\frac{٣ط}{٤}\text{ت}}$

(٣٤) $ع^{٢} = (\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٢ط ت}{٣}})^{٢} = ٢\,هـ^{\frac{٤ط ت}{٣}} = ٢\,(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)$

$= -١ - \sqrt{٣}\,ت$ ، $ع^{٦} = (\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٢ط ت}{٣}})^{٦} = ٨\,هـ^{٤ط ت}$

$= ٨\,(حتا\,٤ط + ت\,حا\,٤ط) = ٨ \times ١ = ٨$

$س(ع^{٢}) = ٢ط - \frac{٤ط}{٣} = \frac{٢ط}{٣}$ $\therefore$ $ع^{٢} = \frac{١}{٢}\,هـ^{\frac{٢ط}{٣}ت}$

$= \frac{١}{٢}\,(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت) = -\frac{١}{٤}\,(١ - \sqrt{٣}\,ت)$

---

(٣٥) $ع = \frac{٥ - \sqrt{٣}\,ت}{\sqrt{٣} - ٢ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ٢ت}{\sqrt{٣} + ٢ت} = \sqrt{٣} + ت$

(أولاً) - $ع = ٢\,هـ^{\frac{ط}{٦}ت}$ $= ٢\,هـ^{(\frac{ط}{٦}+ط)ت}$ $= ٢\,هـ^{\frac{٧ط}{٦}ت}$

، $ع = ٢\,هـ^{(٢ط - \frac{ط}{٦})ت}$ $= ٢\,هـ^{\frac{١١ط}{٦}ت}$ ، $ع' = \frac{١}{٢}\,هـ^{\frac{١١ط}{٦}ت}$

(ثانياً) $ع^{٢} = (٢\,هـ^{\frac{ط}{٦}ت})^{٢} = ٤\,هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$ ،

$ع^{-٢} = \frac{١}{٤}\,هـ^{(٢ط - \frac{ط}{٣})ت}$ $= \frac{١}{٤}\,هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت}$ ،

$ع^{٥} = (٢\,هـ^{\frac{ط}{٦}ت})^{٥} = ٣٢\,هـ^{\frac{٥ط}{٦}ت}$

---

(٣٦) $ع_{١} = ٤\,هـ^{\frac{٣ط}{٤}ت}$ ، $ع_{٢} = ٢\,هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$

$\therefore$ $(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}})^{٤} = (\frac{٤هـ^{\frac{٣ط ت}{٤}}}{٢هـ^{\frac{ط ت}{٣}}})^{٤} = (٢\,هـ^{\frac{٥ط}{١٢}ت})^{٤} = ١٦\,هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت}$

، $\frac{ع_{١}^{٢}}{ع_{٢}^{٣}} = \frac{١٦هـ^{\frac{٣ط}{٢}ت}}{٨هـ^{ط ت}} = ٢\,هـ^{\frac{ط}{٢}ت}$

---

(٣٧) $ع_{١} = ٢\,هـ^{\frac{٥ط}{٦}ت}$ ، $ع_{٢} = ٤\,هـ^{\frac{٤ط}{٣}ت}$ ، $ع_{٣} = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{ط}{٤}ت}$

$\therefore$ $\frac{ع_{١}^{٣} \times ع_{٢}^{٢}}{ع_{٣}^{٦}} = \frac{٨هـ^{\frac{٥ط}{٢}ت} \times ١٦هـ^{\frac{٨ط}{٣}ت}}{٨هـ^{\frac{٣ط}{٢}ت}}$

$= ١٦\,هـ^{(\frac{٥ط}{٢} + \frac{٨ط}{٣} - \frac{٣ط}{٢})ت}$ $= ١٦\,هـ^{\frac{١١ط}{٣}ت}$

$= ١٦\,هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت} = ١٦\,(حتا\,\frac{٥ط}{٣} + ت\,حا\,\frac{٥ط}{٣})$

$= ١٦\,(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت) = ٨ - ٨\sqrt{٣}\,ت$

إجابات جذور الصورة الأسية

(١) (أ) $\sqrt{ع} = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{ط}{٤}ت}$ أ، $\sqrt{٢}\,هـ^{(\frac{ط}{٤}+ط)ت} = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٥ط}{٤}ت}$

$= ١ + ت$ أ، $-(١ + ت)$

(ب) $\sqrt{ع} = ٢\,هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$ أ، $= ٢\,هـ^{(\frac{ط}{٣}+ط)ت} = ٢\,هـ^{\frac{٤ط}{٣}ت}$

$= ١ + \sqrt{٣}\,ت$ أ، $-(١ + \sqrt{٣}\,ت)$

---

(٢) (أ) $\sqrt{ع} = ٤\,هـ^{\frac{٥ط}{٦}ت}$ أ، $٤\,هـ^{(\frac{٥ط}{٦}+ط)ت} = ٤\,هـ^{\frac{١١ط}{٦}ت}$

$= -٢\sqrt{٣} + ٢ت$ أ، $٢\sqrt{٣} - ٢ت$

(ب) $\sqrt{ع} = ٢\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٣ط}{٤}ت}$ أ، $٢\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧ط}{٤}ت}$

$= -٢ + ٢ت$ أ، $٢ - ٢ت$

---

(٣) (أ) $ع = ٤\,هـ^{\frac{٤ط}{٣}ت}$

$\therefore$ $\sqrt{ع} = ٢\,هـ^{\frac{٢ط}{٣}ت}$ أ، $٢\,هـ^{(\frac{٢ط}{٣}+ط)ت} = ٢\,هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت}$

$= -١ + \sqrt{٣}\,ت$ أ، $١ - \sqrt{٣}\,ت$

(ب) $ع = ٨\,هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$ $\therefore$ $\sqrt{ع} = ٢\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{ط}{٦}ت}$

أ، $٢\sqrt{٢}\,هـ^{(\frac{ط}{٦}+ط)ت} = ٢\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧ط}{٦}ت}$

$= \sqrt{٦} + \sqrt{٢}\,ت$ أ، $-(\sqrt{٦} + \sqrt{٢}\,ت)$

---

(٤) $ع = ٤\,هـ^{\frac{٥ط}{٦}ت}$ $\therefore$ $\sqrt{ع} = ٢\,هـ^{\frac{٥ط}{١٢}ت}$ أ،

$\sqrt{ع} = ٢\,هـ^{(\frac{٥ط}{١٢}+ط)ت} = ٢\,هـ^{\frac{١٧ط}{١٢}ت}$

---

(٥) $ع = \frac{٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت}{١ + \sqrt{٣}\,ت} \times \frac{١ - \sqrt{٣}\,ت}{١ - \sqrt{٣}\,ت} = -١ - \sqrt{٣}\,ت$

$\therefore$ $ع = ٢\,هـ^{\frac{٤ط}{٣}ت}$

$\therefore$ $\sqrt{ع} = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٢ط}{٣}ت}$

أ، $\sqrt{ع} = \sqrt{٢}\,هـ^{(\frac{٢ط}{٣}+ط)ت} = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت}$

(٦) $ع = ٨ هـ^{\frac{٣ط}{٢}ت}$ ∴ $ع^{\frac{١}{٣}} = ٨^{\frac{١}{٣}} هـ^{\frac{\frac{٣ط}{٢}+٢كط}{٣}ت}$

حيث ك = ٠ ، ١ ، ٢ ∴ الجذور هي $\sqrt[٣]{ع} = ٢ هـ^{\frac{ط}{٢}ت}$ عندما ك = ٠

∴ $\sqrt[٣]{ع} = ٢ هـ^{\frac{٧ط}{٦}ت}$ ، ∴ $\sqrt[٣]{ع} = ٢ هـ^{\frac{١١ط}{٦}ت}$

---

(٧) $ع^{٣} = ٢٧ هـ^{صفر ت}$ ∴ $ع = ٣ هـ^{θت}$

حيث $θ = \frac{٠ + ٢كط}{٣}$ ، ك = ٠ ، ١ ، ٢

∴ $ع = ٣ هـ^{٠} = ٣$ أ، $ع = ٣ هـ^{\frac{٢ط}{٣}ت}$ أ، $ع = ٣ هـ^{\frac{٤ط}{٣}ت}$

---

(٨) $ع^{٤} = -١٦ = ١٦ هـ^{طت}$ ∴ $ع = ١٦^{\frac{١}{٤}} هـ^{θت}$

حيث $θ = \frac{ط + ٢كط}{٥}$.

ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ∴ $ع = ٢ هـ^{\frac{ط}{٤}ت}$

عندما ك = ٠ ، $ع = ٢ هـ^{\frac{٣ط}{٤}ت}$.

$ع = ٢ هـ^{\frac{٥ط}{٤}ت}$ ، $ع = ٢ هـ^{\frac{٧ط}{٤}ت}$

---

(٩) $ع^{٥} = -٢٤٣ = ٢٤٣ هـ^{طت}$ ∴ $ع = (٢٤٣)^{\frac{١}{٥}} هـ^{θت}$

حيث $θ = \frac{ط + ٢كط}{٥}$ ، ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

∴ $ع = ٣ هـ^{\frac{ط}{٥}ت}$ أ، $ع = ٣ هـ^{\frac{٣ط}{٥}ت}$ أ، $ع = ٣ هـ^{طت}$

أ، $ع = ٣ هـ^{\frac{٧ط}{٥}ت}$ أ، $ع = ٣ هـ^{\frac{٩ط}{٥}ت}$

---

(١٠) $١ + ت = \sqrt{٢} هـ^{\frac{ط}{٤}ت}$

∴ $(١ + ت)^{٤} = (\sqrt{٢} هـ^{\frac{ط}{٤}ت})^{٤} = ٤ هـ^{طت}$

∴ $(١ + ت)^{\frac{٤}{٣}} = \sqrt[٣]{٤} هـ^{\frac{ط + ٢كط}{٣}ت}$

حيث ك = ٠ أ، ١ أ، ٢ ∴ $ع = \sqrt[٣]{٤} هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$ أ، $= \sqrt[٣]{٤} هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$

أ، $ع = \sqrt[٣]{٤} هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت}$

إجابات خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

(١) (أ) الأيمن = $(٢ + ٢ω + ٢ω^{٢} + ٣ω)^{٣} = (٠ + ٣ω)^{٣} = ٢٧ω^{٣} = ٢٧$

(ب) الأيمن = $١ + \frac{ω^{٢} + ω}{٢ - ١} = ١ + \frac{-١}{١} =$ صفر

---

(٢) الأيمن = $(-ω - ٢ω)(-ω^{٢} - ٥ω^{٢}) = -٣ω \times -٦ω^{٢} = ١٨$

(ب) = $\left(\frac{١}{١ + ω^{٢}} - \frac{١}{١ + ω}\right)^{٢} = \left(\frac{١}{-ω} + \frac{١}{ω^{٢}}\right)^{٢}$

$= (-ω^{٢} + ω)^{٢} = (\sqrt{٣} ت)^{٢} = -٣$

---

(٣) (أ) الأيمن = $(-ω^{٢} - ω^{٢})^{٣}$ $-٨ω^{٦} = -٨$

، الأيسر = $(-ω - ω)^{٣} = -٨ω^{٣} = -٨$

(ب) = $\left(٢ + \frac{١}{ω}\right)^{٢} - \left(١ - \frac{١}{ω^{٢}}\right)^{٢}$

$= (٢ + ω^{٢})^{٢} - (١ - ω)^{٢} = ٤ + ٤ω^{٢} + ω^{٤} - ١ + ٢ω - ω^{٢}$

$= ٣ + ٣ω + ٣ω^{٢} =$ صفر

---

(٤) (أ) = $(٢ + ٢ω + ٢ω^{٢} + ٩ω)(٢ + ٢ω^{٢} + ٢ω + ٩ω^{٢})$

$= (٠ + ٩ω)(٠ + ٩ω^{٢}) = ٨١ω^{٣} = ٨١$

(ب) = $(-ω^{٢})(١ + ω^{٢})(-ω)(١ + ω)$

$= (-ω^{٢})(-ω)(-ω)(-ω^{٢}) = ω^{٦} = ١$

---

(٥) (أ) الأيمن = $[١ - ω^{٢} - ω + ω^{٢}]^{٣} = (٢ + ١)^{٣} = ٢٧$

(ب) الأيمن = $(١ - ٢ω + ω^{٢})(١ + ω - ٣ω^{٢})$

$= (-ω - ω^{٢})(-ω^{٢} - ٣ω^{٢}) = -٣ω \times -٤ω^{٢} = ١٢ω^{٣} = ١٢$

---

(٦) الأيمن = $(-ω - ω)(-ω^{٢} - ω^{٢})(-ω - ω) \times$

$(-ω^{٢} - ω^{٢}) = -٢ω \times -٢ω^{٢} \times -٢ω \times -٢ω^{٢} = ١٦ω^{٦} = ١٦$

---

(٧) الأيمن = $\frac{ω^{٢}(ω^{٣} - ω - ω^{٢} + ١)}{٢ω^{٣} + ٤ω + ω^{٢} + ٢} =$

$\frac{ω^{٢}(٢ + ١)}{٤ + ٤ω + ٤ω^{٢} - ٣ω^{٢}} = \frac{٣ω^{٢}}{-٣ω^{٢}} = -١$

---

(٨) الأيمن = $\frac{ω}{(٢ + ٢ω + ٢ω^{٢} + ٣ω)^{٢}} +$

$\frac{ω^{٢}}{(٢ + ٢ω + ٢ω^{٢} + ٣ω^{٢})^{٢}}$

$= \frac{ω}{(٠ + ٣ω)^{٢}} + \frac{ω^{٢}}{(٠ + ٣ω^{٢})^{٢}} = \frac{ω}{٩ω^{٢}} + \frac{ω^{٢}}{٩ω^{٤}}$

$= \frac{١}{٩}\left(\frac{١}{ω} + \frac{١}{ω^{٢}}\right) = \frac{١}{٩}(ω^{٢} + ω) = -\frac{١}{٩}$

(٩) الأيمن = $\frac{٤}{٣+٣\omega+٣\omega^٢-٢\omega^٢} + \frac{١+\omega+\omega^٢+٦\omega}{٩-٤(١+\omega+\omega^٢)} + \frac{٤\omega}{٣}$

$= \frac{٤}{-٢\omega^٢} + \frac{٦\omega}{٩} + \frac{٦\omega}{٣} = -٢\omega + ٢\omega =$ صفر

---

(١٠) الأيمن = $(٨ - ١٢\omega + ٦\omega^٢ - \omega^٣)$

$+ (٨ - ١٢\omega^٢ + ٦\omega^٤ - \omega^٦) = ١٦ - ١٢(\omega + \omega^٢)$

$+ ٦(\omega + \omega^٢) - ٢ = ١٦ + ١٢ - ٦ - ٢ = ٢٠$

---

(١١) الأيمن = $\frac{١-٢\omega^٢+١-٢\omega}{١-٢(\omega+\omega^٢)+٤\omega^٢}$

$= \frac{٢-٢(\omega^٢+\omega)}{١+٢+٤} = \frac{٢+٢}{٧} = \frac{٤}{٧}$

---

(١٢) الأيمن = $\frac{(٢+\omega)(١+٣\omega^٢)+(٢+\omega^٢)(١+٣\omega)}{(١+٣\omega)(١+٣\omega^٢)}$

$= \frac{٢+\omega+٦\omega^٢+٣\omega^٣+٢+\omega^٢+٦\omega+٣\omega^٣}{١+٣(\omega+\omega^٢)+٩\omega^٣}$

$= \frac{١٠+٧\omega+٧\omega^٢}{١-٣+٩} = \frac{١٠+٧(\omega+\omega)^٢}{٧} = \frac{١٠-٧}{٧} = \frac{٣}{٧}$

---

(١٣) الأيمن =

$= \sqrt{٣}\,\text{ت} \times \frac{(\omega-٣)(٤+٣\omega^٢)-(\omega^٢-٣)(٤+٣\omega)}{(٤+٣\omega)(٤+٣\omega^٢)}$

$= \sqrt{٣}\,\text{ت} \times$

$\frac{٤\omega+٣-١٢-٩\omega^٢-٤\omega^٢-٣+١٢+٩\omega}{١٦+١٢(\omega+\omega^٢)+٩\omega^٣}$

$= \sqrt{٣}\,\text{ت} \times \frac{١٣\omega-١٣\omega^٢}{٢٥-١٢} = \sqrt{٣}\,\text{ت} \times \frac{١٣(\sqrt{٣}\,\text{ت})}{١٣}$

$= ٣\text{ت}^٢ = -٣$

---

(١٤) الأيمن =

$\frac{١}{-\omega-\omega^٢+٣\omega-\omega^٢} + \frac{١}{-\omega-\omega^٢-\omega+٣\omega^٢} =$

$= \frac{١}{٢\omega-٢\omega^٢} + \frac{١}{٢\omega^٢-٢\omega} = ٠$

---

(١٥) الأيمن =

$\frac{١}{٢+٢\omega+٢\omega^٢+(٢+\omega)} + \frac{١}{٤+٤\omega+٤\omega^٢+١-\omega}$

$= \frac{١}{٢+\omega} + \frac{١}{١-\omega} = \frac{١-\omega+٢+\omega}{(٢+\omega)(١-\omega)}$

$= \frac{٣}{٢+\omega-٢\omega-\omega^٢} = \frac{٣}{٢-(\omega+\omega^٢)} = \frac{٣}{٣} = ١$

---

(١٦) الأيمن = $(٥ + \omega)$

$\left\{\frac{١}{٣+٣\omega+٣\omega^٢+(٢+\omega)} - \frac{١}{\omega+٢(\omega+\omega^٢)}\right\}$

$= (٥ + \omega)\left\{\frac{١}{٢+\omega} - \frac{١}{\omega-٢}\right\}$

$= (٥ + \omega) \times \frac{\omega-٢-\omega-٢}{\omega^٢-٤} = \frac{(٥+\omega)\times -٤}{-١-\omega-٤}$

$= \frac{-٤(٥+\omega)}{-(٥+\omega)} = ٤$

---

(١٧) الأيمن = $\frac{١}{٣-٢(\omega-\omega^٢)} + \frac{١}{٣+٢(\omega-\omega^٢)} =$

$= \frac{١}{٣-٢\sqrt{٣}\,\text{ت}} + \frac{١}{٣+٢\sqrt{٣}\,\text{ت}} =$

$\frac{٣+٢\sqrt{٣}\,\text{ت}+٣-٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٩+١٢}$

$= \frac{٦}{٢١} = \frac{٢}{٧}$

---

(١٨) $١ + ٢\omega^٢ = -\omega - \omega^٢ + ٢\omega^٢ = \omega^٢ - \omega = \sqrt{٣}\,\text{ت}$

$١ + ٢\omega = -\omega - \omega^٢ + ٢\omega = \omega - \omega^٢ = -\sqrt{٣}\,\text{ت}$

الأيمن = $\left(\frac{\omega}{\sqrt{٣}\,\text{ت}}\right)^٢ + \left(\frac{\omega^٢}{-\sqrt{٣}\,\text{ت}}\right)^٢ = \frac{\omega^٢}{٣\text{ت}^٢} + \frac{\omega^٤}{٣\text{ت}^٢}$

$= \frac{\omega+\omega^٢}{-٣} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

---

(١٩) كما في (١٨) : الطرف الأيمن :

$\left(\frac{١}{\sqrt{٣}\,\text{ت}} - \frac{١}{-\sqrt{٣}\,\text{ت}}\right)^٢ = \left(\frac{٢}{\sqrt{٣}\,\text{ت}}\right)^٢ = -\frac{٤}{٣}$

(٢٠) الطرف الأيمن =

$$\left[\frac{1+3\omega-1-3\omega^2}{(1+3\omega^2)(1+3\omega)}\right]^2 = \left[\frac{3(\omega-\omega^2)}{1+3(\omega+\omega^2)+9}\right]^2$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}\,\text{ت}}{1-3+9}\right)^2 = \frac{-27}{49}$$

(٢١) الأيمن = $\left[\dfrac{1}{1+2(\omega-\omega^2)} - \dfrac{1}{1-2(\omega-\omega^2)}\right]^2 =$

$$= \left(\frac{1}{1+2\sqrt{3}\,\text{ت}} - \frac{1}{1-2\sqrt{3}\,\text{ت}}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1-2\sqrt{3}\,\text{ت}-1-2\sqrt{3}\,\text{ت}}{1+12}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-4\sqrt{3}\,\text{ت}}{13}\right)^2 = \frac{-48}{169}$$

(٢٢) الأيمن = $\left(\dfrac{5\omega^3-3\omega^2}{5\omega-3} - \dfrac{2\omega^3-7\omega}{2\omega^2-7}\right)^4$

$$= \left(\frac{\omega^2(5\omega-3)}{5\omega-3} - \frac{\omega(2\omega^2-7)}{2\omega^2-7}\right)^4 = (\omega^2-\omega)^4$$

$$= (\sqrt{3}\,\text{ت})^4 = 9 \times 1 = 9$$

(٢٣) الأيمن = $\left[\dfrac{3\omega^2+2\omega+7}{3\omega^3+2\omega^2+7\omega} - \dfrac{5-8\omega}{5\omega^2-8\omega^3}\right]^8$

$$= \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right)^8 = (\omega^2-\omega)^8 = (\sqrt{3}\,\text{ت})^8 = 81$$

(٢٤) (أ) الأيمن = $\left(\dfrac{3\omega^3+5\omega+\omega^2}{3\omega^2+5+\omega}\right)^{3\text{ن}} = (\omega)^{3\text{ن}} = 1$

(ب) الطرف الأيمن =

$$= (3+3\omega+3\omega^2+2\omega)^{3\text{ن}} + (3+3\omega+3\omega^2+2\omega^2)^{3\text{ن}}$$

$$= (2\omega)^{3\text{ن}} + (2\omega^2)^{3\text{ن}}$$

$$= 2^{3\text{ن}} + 2^{3\text{ن}} = 2 \times 2^{3\text{ن}}$$

(٢٥) $= \dfrac{(1+\omega+\omega^2)+(3+\omega)}{(2+2\omega+2\omega^2)+(2+\omega)} +$

$$\frac{(1+\omega+\omega^2)+(3+\omega^2)}{(2+2\omega+2\omega^2)+(2+\omega^2)}$$

$$= \frac{(3+\omega)(2+\omega^2)+(3+\omega^2)(2+\omega)}{(2+\omega)(2+\omega^2)}$$

$$= \frac{6+3\omega^2+2\omega+\omega^3+6+2\omega^2+3\omega+\omega^3}{4+2(\omega+\omega^2)+\omega^3}$$

$$= \frac{14+3(\omega+\omega^2)+2(\omega+\omega^2)}{4+2(-1)+1}$$

$$= \frac{14-3-2}{3} = 3$$

(٢٦) الجذر هو نفسه وبالتعويض عن بـ ω

∴ طرفها الأيمن = $4\omega^{15} + 3\omega^{16} + 3\omega^{17} - 1$

$= 4 + 3\omega + 3\omega^2 - 1 = 3 + 3\omega + 3\omega^2 =$ صفر = الأيسر

∴ ω تحقق هذه المعادلة ∴ هي جذر لها.

(٢٧) الجذران هما $(-\omega^2-\omega^2)^3$ ، $(-\omega-\omega)^3$ أي ‎-٨ ، ‎-٨

، مجموعها = ‎-١٦ ، حاصل ضربهما = ٦٤

∴ المعادلة هي $\text{س}^2 + 16\text{س} + 64 = 0$

(٢٨) $\text{س}^3 + \text{ص}^3 = (\text{س} + \text{ص})(\text{س}^2 - \text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2)$

$= (\text{س} + \text{ص})(\text{س} + \omega\,\text{ص})(\text{س} + \omega^2\,\text{ص})$

(٢٩) (i) عندما $\text{ن} = 3\text{م}$ حيث م عدد صحيح موجب

∴ الطرف الأيمن = $1 + \omega^{3\text{م}} + \omega^{6\text{م}} = 1 + 1 + 1 = 3$

، (ii) عندما $\text{ن} = 3\text{م} + 1$

∴ الطرف الأيمن = $1 + \omega^{3\text{م}+1} + \omega^{6\text{م}+2} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$

، (iii) عندما $\text{ن} = 3\text{م} + 2$

∴ الطرف الأيمن = $1 + \omega^{3\text{م}+2} + \omega^{6\text{م}+4} = 1 + \omega^2 + \omega = 0$

إجابات مسائل الأعداد المركبة

(١) الأيمن = $[\text{ت}(\omega + \omega^2) + 1]^4 (1 + \omega^2)^2$

$= (-\text{ت} + 1)^4 \times (-\omega)^2 = (1 - 2\text{ت} + \text{ت}^2)^2 \times -1$

$= 4\text{ت} \times -1 = -4 \times -1 = 4$

(٢) الأيمن = $\dfrac{(-\omega^2)^2}{(1+2\text{ت}+\text{ت}^2)^2} + \dfrac{(-\omega)^2}{(1-2\text{ت}+\text{ت}^2)^2}$

$$= \frac{\omega^4}{4\text{ت}^2} + \frac{\omega^2}{4\text{ت}^2} = -\frac{1}{4}(\omega + \omega^2) = -\frac{1}{4} \times -1 = \frac{1}{4}$$

(٣) الأيسر = $\frac{\text{٣ + ت}}{\text{١ + ت}} \times \frac{\text{١ − ت}}{\text{١ − ت}}$ - (١ + ω + ١ + $\omega^{٢}$ - ٢ $\sqrt{\text{١} + \omega_{\text{٠}} + \omega^{\text{٢}} + \omega^{\text{٣}}}$

= ٢ - ت - (٢ - ١ - ٢ $\sqrt{\text{٦}}$) = ٣ - ت

∴ س + ص ت = ٣ - ت ∴ س = ٣ ، ص = -١

(٤) مجموع الجذرين = ٢ + ت (ω + $\omega^{٢}$) = ٢ - ت

حاصل ضربهما = ١ + ω ت + $\omega^{٢}$ ت + $\omega^{٣}$ ت^{٢}

= ١ + ت (ω + $\omega^{٢}$) + ١ × -١ = - ت

∴ المعادلة هي ع^{٢} - (٢ - ت) ع - ت = صفر

(٥) $\sqrt{\text{٣}}$ + ت = ٢ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

، $\sqrt{\text{٣}}$ - ت = ٢ (حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠°)

∴ الأيمن = ٢^{١٢} (حتا ٣٦٠° + ت حا ٣٦٠°) + ٢^{١٢}

(حتا ٣٩٦٠° + ت حا ٣٩٦٠°) = ٢^{١٢} (١ + ٠) + ٢^{١٢} (١ + ٠) =

٢^{١٢} × ٢ = ٢^{١٣}

(٦) ع = $\frac{[\sqrt{\text{٢}}(\text{جتا ١٥ ٣° + ت جا ١٥ ٣°})]^{\text{١٨}}}{[\text{٢(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)}]^{\text{٩}}}$ + $\frac{[\sqrt{\text{٢}}(\text{جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°})]^{\text{١٢}}}{[\text{٢(جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)}]^{\text{٦}}}$

= $\frac{\text{٢}^{\text{٩}}\text{(جتا ٥٦٧٠° + ت جا ٥٦٧٠°)}}{\text{٢}^{\text{٩}}\text{(جتا ٥٤٠° + ت جا ٥٤٠°)}}$ + $\frac{\text{٢}^{\text{٦}}\text{(جتا ٥٤٠° + ت جا ٥٤٠°)}}{\text{٢}^{\text{٦}}\text{(جتا ٧٢٠° + ت جا ٧٢٠°)}}$

= $\frac{\text{٠ − ت}}{\text{−١ + ٠}}$ + $\frac{\text{−١ + ٠}}{\text{١ + ٠}}$ = ت - ١

∴ ع = $\sqrt{\text{٢}}$ (حتا $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ط + ت حا $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ط)

∴ $\sqrt{\text{ع}}$ = $\sqrt[\text{٤}]{\text{٢}}$ (حتا $\frac{\text{٣}}{\text{٨}}$ ط + ت حا $\frac{\text{٣}}{\text{٨}}$ ط) أ،

$\sqrt{\text{ع}}$ = $\sqrt[\text{٤}]{\text{٢}}$ (حتا $\frac{\text{١١}}{\text{٨}}$ ط + ت حا $\frac{\text{١١}}{\text{٨}}$ ط)

(٧) |ع| = $\sqrt{\frac{\text{١}}{\text{٤}} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}}$ = ١ ∴ ع = حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°

∴ ع^{٤} = ٨١ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°) .. (١) ،

١ + ع = $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ + $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت ∴ |١ + ع| = $\sqrt{\frac{\text{٩}}{\text{٤}} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}}$ = $\sqrt{\text{٣}}$

، س (١ + ع) = ٣٠° ∴ ١ + ع = $\sqrt{\text{٣}}$ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

∴ (١ + ع)^{٨} = ٨١ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°) = (١)

(٨) ع = -١ + $\sqrt{\text{٣}}$ ت = ٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

∴ -ع = ٢ (حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠°)

، ع = ٢ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

، $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

، $\frac{\text{١}}{\bar{\text{ع}}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

، $\sqrt{\text{ع}}$ = $\sqrt{\text{٢}}$ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°) أ، $\sqrt{\text{٢}}$ (حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠°)

س (-ع) = ١٢٠° + ١٨٠° ، س ($\bar{\text{ع}}$) = ٣٦٠° - ١٢٠°

= س ($\frac{\text{١}}{\text{ع}}$) ، س ($\frac{\text{١}}{\bar{\text{ع}}}$) = ٣٦٠° - ٢٤٠°

(٩) ١ + $\omega^{٢}$ = - ω = - ($\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ + $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت) = - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ - $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت

، |١ + $\omega^{٢}$| = $\sqrt{\frac{\text{١}}{\text{٤}} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}}$ = ١ ، ظا θ = $\frac{-\sqrt{\text{٣}}}{\text{١}}$ ∴ θ = ٣٠٠°

∴ $\sqrt{\text{١} + \omega^{\text{٢}}}$ = حتا $\frac{\text{٣٠٠°}}{\text{٢}}$ + ت حا $\frac{\text{٣٠٠°}}{\text{٢}}$ = - $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ت

أ، = حتا ٣٣٠° + ت حا ٣٣٠° = $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ت

(ii) ١ + ω = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ + $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت = حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°

∴ (١ + ω)^{ن} = (حتا $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$ + ت حا $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$)^{ن} = حتا $\frac{\text{ن ط}}{\text{٣}}$ + ت حا $\frac{\text{ن ط}}{\text{٣}}$

(١٠) الأيمن = (١ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ + $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت)^{٦} = ($\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ + $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت)^{٦}

= [$\sqrt{\text{٣}}$ (حتا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ + ت حا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$)]^{٦} = ٢٧ (حتا ط + ت حا ط)

= ٢٧ (-١ + ٠) = -٢٧

(١١) (١ + ت)^{١٠} = ١ + ^{١٠}ق$_{١}$ ت + ^{١٠}ق$_{٢}$ ت^{٢} + ^{١٠}ق$_{٣}$ ت^{٣} + .. + ^{١٠}ق$_{١٠}$ ت^{١٠}

= (١ - ^{١٠}ق$_{٢}$ + ^{١٠}ق$_{٤}$ + ... - ^{١٠}ق$_{١٠}$) + ت(^{١٠}ق$_{١}$ - ^{١٠}ق$_{٣}$ + ..+ ^{١٠}ق$_{٩}$) ..(١) .

أيضاً (١ + ت)^{١٠} = [$\sqrt{\text{٢}}$ (حتا $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ + ت حا $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$)]^{١٠}

= ٢^{٥} [حتا $\frac{\text{٥ ط}}{\text{٢}}$ + ت حا $\frac{\text{٥ ط}}{\text{٢}}$] = ٣٢ (٠ + ت) ٣٢ ت (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ١ - ^{١٠}ق$_{٢}$ + ^{١٠}ق$_{٤}$ + ... - ^{١٠}ق$_{١٠}$ = ٠

، ^{١٠}ق$_{١}$ - ^{١٠}ق$_{٣}$ + ^{١٠}ق$_{٥}$ - ... + ^{١٠}ق$_{٩}$ = ٣٢

(١٢) ع = مفكوك $[٢\omega^٢ + ت - ٣ت^٢ + ٢ + ٢\omega]^٤$

$= [٢(\omega^٢ + \omega) + ت + ٣]^٤ = (-٢ + ت + ٣)^٤$

$= (١ + ت)^٤ = [\sqrt{٢}(حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)]^٤$

$= ١٦ (حتا ٣٦٠° + ت حا ٣٦٠°)$

$= ١٦ (حتا ٠ + ت حا ٠)$

∴ المقياس = ١٦ ، سعة(ع) = صفر°

(١٣) بتحليل الطرف الأيمن

∴ $[(٢ع + ١)^٢ - ١]^٢ =$ صفر ∴ $(٢ع + ١)^٢ = ١$

∴ ٢ع + ١ = ١ أ، ٢ع + ١ = ω أ، ٢ع + ١ = $\omega^٢$

∴ ع = ٠ أ، ع = $\frac{\omega - ١}{٢}$ أ، ع = $\frac{\omega^٢ - ١}{٢}$

(١٤) الطرف الأيمن =

$$= \left[\frac{(جاهـ + ت جتاهـ)(جاهـ - ت جتاهـ) + جاهـ + ت جتاهـ}{١ + جاهـ - ت جتاهـ}\right]^٨$$

$$= \frac{(جاهـ + ت جتاهـ)^٨ (جاهـ - ت جتاهـ + ١)^٨}{(١ + جاهـ - ت جتاهـ)^٨}$$

$= [حتا (\frac{ط}{٢} - هـ) + ت حا (\frac{ط}{٢} - هـ)]^٨$

$= [حتا (٤ط - ٨هـ) + ت حا (٤ط - ٨هـ)]$

= حتا ٨هـ - ت حا ٨هـ

(١٥) الطرف الأيمن =

حتا (هـ + ٢هـ + ٣هـ + .. + ١٥هـ) + ت حا (نفس القياس)

= حتا $\frac{١٥}{٢}$ [هـ + ١٥هـ] + ت حا نفس القياس = ١

∴ ١٢٠ هـ = ٢ن ط ∴ هـ = $\frac{ن ط}{٦٠}$ حيث ن ∈ ص

(١٦) ١ + ت = $\sqrt{٢}$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)،

١ - ت = $\sqrt{٢}$ (حتا ٣١٥° + ت حا ٣١٥°)

∴ الطرف الأيمن = $(\sqrt{٢})^د$ (حتا $\frac{د ط}{٤}$ + ت حا $\frac{د ط}{٤}$)

+ $(\sqrt{٢})^د$ (حتا $\frac{٧د ط}{٤}$ + ت حا $\frac{٧د ط}{٤}$)

= $(\sqrt{٢})^د$ [حتا $\frac{د ط}{٤}$ + حتا ($\frac{٨د ط}{٤} - \frac{د ط}{٤}$) + ت حا $\frac{د ط}{٤}$

+ ت حا (٨د $\frac{ط}{٤}$ - د $\frac{ط}{٤}$)]

= $(\sqrt{٢})^د$ [حتا $\frac{د ط}{٤}$ + حتا د $\frac{ط}{٤}$ + ت حا د $\frac{ط}{٤}$ - ت حا د $\frac{ط}{٤}$]

= $٢^{\frac{د}{٢}} \times ٢$ حتا د $\frac{ط}{٤}$ = $٢^{\frac{د}{٢}+١}$ حتا د $\frac{ط}{٤}$

(١٧) $ع = (\frac{جتا\theta}{جا\theta} + ت)^٤ = \frac{(جتا\theta + ت جا\theta)^٤}{جا^٤\theta}$

$= \frac{جتا٤\theta + ت جا٤\theta}{جا^٤\theta}$ ∴ $\bar{ع} = \frac{جتا٤\theta - ت جا٤\theta}{جا^٤\theta}$

∴ $ع + \bar{ع} = \frac{٢جتا٤\theta}{جا^٤\theta} = ٢$ حتا ٤θ قتا$^٤\theta$

(١٨) الطرف الأيمن =

$$\frac{١ - جتا\theta - ت جا\theta}{١ + جتا\theta + ت جا\theta} = \frac{٢جا^٢\frac{\theta}{٢} - ٢ت جا\frac{\theta}{٢} جتا\frac{\theta}{٢}}{٢جتا^٢\frac{\theta}{٢} + ٢ت جا\frac{\theta}{٢} جتا\frac{\theta}{٢}}$$

$$= \frac{٢جا\frac{\theta}{٢}(جا\frac{\theta}{٢} - ت جتا\frac{\theta}{٢})}{٢جتا\frac{\theta}{٢}(جتا\frac{\theta}{٢} + ت جا\frac{\theta}{٢})} = ظا \frac{\theta}{٢} \times$$

$$\frac{-ت(ت جا\frac{\theta}{٢} + جتا\frac{\theta}{٢})}{جتا\frac{\theta}{٢} + ت جا\frac{\theta}{٢}} = ت^٢ ظا \frac{\theta}{٢}$$

(١٩) $ع_١ = ٢ + ٣\omega + ٥\omega^٢$ .. (١) ،

$ع_٢ = ٢\omega^٢ + ٣ + ٥\omega = \omega^٢ (٢ + \frac{٣}{\omega^٢} + \frac{٥}{\omega})$

$= \omega^٢ (٢ + ٣\omega + ٥\omega^٢) = \omega^٢ ع_١$ .. (٢)

، $ع_٣ = ٢\omega + ٣\omega^٢ + ٥ = \omega(٢ + ٣\omega + ٥\omega^٢) = \omega ع_١$ .. (٣)

∴ (i) $\frac{ع_٢}{ع_١} = \omega^٢$ ، $\frac{ع_٣}{ع_٢} = \frac{\omega ع_١}{\omega^٢ ع_١} = \frac{١}{\omega} = \omega^٢$

(ii) $ع_١^٤ + ع_٢^٤ + ع_٣^٤ = ع_١^٤ + \omega^٢ ع_١^٤ + \omega ع_١^٤$

$= ع_١^٤ (١ + \omega^٢ + \omega) = ع_١^٤ \times$ صفر = صفر

لامى

المجموعة الثالثة

تمارين (٢ - ١) من الكتاب المدرسي

(١) أ (٣ ، -٤)

(٢) محور السينات

(٣) |ع| = ٥

(٤) ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت} = \frac{٣ - ٤ت}{٥} = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}$ت

|ع| = $\sqrt{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}} = \sqrt{١} = ١$

(٥) سعة ع̄ هي $(-\theta)$

(٦) |ع| = ١

(٧) |ع| = $\sqrt{٢}$ ، θ في الربع الثانى

ظا θ = -١ ∴ θ = ١٨٠ - ٤٥ = ٣٥

∴ $\theta = \frac{٣\pi}{٤}$ ∴ ع = $\sqrt{٢}$ × هـ$^{\frac{٣\pi ت}{٤}}$

(٨) سعة ع = ٦٠° ، |ع| = ٢

ع = ١٢ جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

ع^ = ٢^ (جتا ٤٨٠ + ت جا ٤٨٠) = ٢^ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

السعة الأساسية = $\frac{٢\pi}{٣}$

(٩) |ع| = $\sqrt{٤ + ١٢} = ٤$

(+ ، -) ربع رابع ظا $\theta = -\sqrt{٣}$

θ = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠ ،

ع = ٤ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠)

ع = ٤ (جتا $\left(\frac{-\pi}{٣}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-\pi}{٣}\right)$)

(١٠) سعة ٢ ع هى θ

(١١) ع = $\sqrt{٣}$ (جا ٣٠ + ت جتا ٣٠) = $\sqrt{٣}$ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

السعة الأساسية = ٦٠° الجواب (ب)

(١٢) ∵ |١ + $\sqrt{٣}$ ت| = ٢ والسعة ٦٠°

ع = ٢^{ن} (جتا ٦٠ ن + ت جا ٦٠ ن) ∴ |ع| = ٨ = ٢^{ن} ∴ ن = ٣

ع = ٨ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠)

∴ السعة الأساسية للعدد ع = ١٨٠ = π الجواب (د)

(١٣) ع$_١$ ع$_٢$ = ل$_١$ل$_٢$ (جتا π + ت حا π) = ل$_١$ل$_٢$ الجواب (أ)

(١٤) سعة العدد -٣ تساوى ١٨٠° ∴ الجواب (ج)

(١٥) ع̄ = -١ - $\sqrt{٣}$ ت ، |ع̄| = $\sqrt{١ + ٣}$ = ٢ الجواب (ج)

(١٦) ع = -١ -ت ∴ |ع| = $\sqrt{٢}$

السعة = ٢٢٥° = $\frac{٥\pi}{٤}$

ع = $\sqrt{٢}$ × هـ$^{\frac{٥}{٤}\pi ت}$ الجواب (ب)

(١٧) ع$_١$ + ع$_٢$ = -١ - $\sqrt{٣}$ ت

سعة ع$_١$ + ع$_٢$ هى = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠° الجواب (ب)

(١٨) س + ص ت = $\frac{١ + ب ت}{١ - ب ت} \times \frac{١ + ب ت}{١ + ب ت}$

س+ص ت = $\frac{١^٢ - ب^٢}{١^٢ + ب^٢} + \frac{٢ ا ب}{١^٢ + ب^٢}$ ت

س-ص ت = $\frac{١^٢ - ب^٢}{١^٢ + ب^٢} - \frac{٢ ا ب}{١^٢ + ب^٢}$ ت

بالضرب س^٢ + ص^٢ = $\frac{(١^٢ - ب^٢)^٢}{(١^٢ + ب^٢)^٢} + \frac{٤ ١^٢ ب^٢}{(١^٢ + ب^٢)^٢}$

= $\frac{(١^٢ + ب^٢)^٢}{(١^٢ + ب^٢)^٢} = ١$ ∴ س^٢ + ص^٢ = ١ الجواب (د)

الجواب (جـ)

(١٩) ع = ٣ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

(٢٠) $\frac{١}{ع}$ سعته - θ الجواب (ب)

(٢١) (أ) ع$_١$ = ٥ = ٥ (جتا ٠ + ت جا ٠)

(ب) ع$_٢$ = ٤ (جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠)

(ج) ع$_٣$ = $\sqrt{٢}$ (جتا (-٤٥) + ت جا (-٤٥))

(د) ع$_٤$ = -٣ + ٤ ت ∴ |ع$_٤$| = ٥

ظا $\theta = -\frac{٤}{٣}$ ، (-، +) ربع ثانى

θ = ١٨٠ - ٨′ ٥٣° = ٥٢′ ١٢٦°

ع$_٤$ = (جتا ٥٢′ ١٢٦° + ت جا ٥٢′ ١٢٦°)

(هـ) ع$_٥$ = ٤ (جتا ٤٠ - ت حا ٤٠) = ٤ (جتا ٣٢٠ + ت جا ٣٢٠)

(٢٢) (أ) ع$_١$ = -١ + ت ، |ع$_١$| = $\sqrt{٢}$

(- ، +) ربع ثاني ∴ θ = ١٣٥°

∴ المقياس = $\sqrt{٢}$ والسعة = $\frac{٣\pi}{٤}$

(ب) ع$_٢$ = $\frac{٤}{\sqrt{٣} - ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} + ت} = \frac{٤(\sqrt{٣} + ت)}{٤}$

= $\sqrt{٣}$ + ت

|ع$_٢$| = $\sqrt{٣ + ١}$ = ٢ المقياس = ٢ السعة = ٣٠°.

(ج) ع٢ ع١ = ٢٠ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)
= ٢ (جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥)
المقياس = ٢ والسعة = ٢٢٥°

(د) ع٢ ع١ = ١ + ت ظا ٢٠ = ١ + ت $\frac{\text{جا } ٢٠}{\text{جتا } ٢٠}$

= $\frac{\text{جتا } ٢٠ + \text{ت جا } ٢٠}{\text{جتا } ٢٠}$

= $\frac{١}{\text{جتا } ٢٠}$ (جتا ٢٠ + ت جا ٢٠)

المقياس = $\frac{١}{\text{جتا } ٢٠}$ والسعة = ٢٠°

(٢٣) ع١ = جتا ١١٤ + ت جا (١٨٠ − ١١٤)
= جتا ١١٤ + ت جا ١١٤
ع٢ = جتا ٤٢ + ت جا (١٨٠ − ٤٢) = جتا ٤٢ + ت جا ٤٢
ع٣ = جتا (٩٠ − ٦٦) + ت جا (١٨٠ − ٦٦) = جتا ٦٦ + ت جا ٦٦

$\frac{\text{ع}_١ \text{ع}_٢}{\text{ع}_٣} = \frac{\text{جتا}(١١٤+٤٢) + \text{ت جا}(١١٤+٤٢)}{\text{جتا } ٦٦ + \text{ت جا } ٦٦}$

= جتا ٩٠ + ت جا ٩٠ = ت

(٢٤) ع١ ع٢ = ٨ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) = ٨ × $\text{هـ}^{\frac{\pi}{٢}\text{ت}}$

$\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \frac{١}{٢}$ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) = $\frac{١}{٢}$ × $\text{هـ}^{\frac{\pi}{٣}\text{ت}}$

(٢٥) ع١ = ٢ (جتا ١٠٠ + ت جا ١٠٠)
، ع٢ = ٤ (جتا ١٩٠ + ت جا ١٩٠)

$\frac{\text{ع}_٢}{\text{ع}_١}$ = ٢ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) = ٢ × $\text{هـ}^{\frac{\pi}{٢}\text{ت}}$

(٢٦) (أ) ع١ = جتا ٦٠ + ت جا ٦٠ = $\frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(ب) ع٢ = ٢ (جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥) = $-\sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت

(ج) ع٣ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}$ ت

(٢٧) $\frac{١}{\text{ع}} = \frac{١}{٢}$ (جتا (−٦٠) + ت جا (−٦٠))

= $\frac{١}{٢}$ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠) = $\frac{١}{٢}$ × $\text{هـ}^{\frac{٥\pi}{٣}\text{ت}}$

(٢٨) |ع| = ٢ ، السعة θ = ٣٠°
ع = ٢ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)
ع^٦ = ٦٤ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) = ٦٤ (−١ + ٠) = −٦٤

(٢٩) $\text{ع} = \frac{(\text{ا}+\text{ب}) + \text{ت}(\text{ا}-\text{ب})}{(\text{ا}-\text{ب}) - \text{ت}(\text{ا}+\text{ب})} \times \frac{(\text{ا}-\text{ب}) + \text{ت}(\text{ا}+\text{ب})}{(\text{ا}-\text{ب}) + \text{ت}(\text{ا}+\text{ب})}$

$= \frac{(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}-\text{ب}) - (\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}+\text{ب})}{(\text{ا}-\text{ب})^٢ + (\text{ا}+\text{ب})^٢}$

$+ \frac{\text{ت}\left[(\text{ا}-\text{ب})^٢ + (\text{ا}+\text{ب})^٢\right]}{(\text{ا}-\text{ب})^٢ + (\text{ا}+\text{ب})^٢}$ = صفر + ت = ت ∴ |ع| = ١

(٣٠) ع١ + ع٢ = جتا ٧٥ + جتا ١٥ + ت (جا ٧٥ + جا ١٥)
∵ جتا ٧٥ + جتا ١٥ = جتا (٤٥ + ٣٠) + جتا (٤٥ − ٣٠)

= ٢ جتا ٤٥ جتا ٣٠ = ٢ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

∵ جا ٧٥ + جا ١٥ = جتا ١٥ + جتا ٧٥ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

∴ ع١ + ع٢ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢} + \frac{\sqrt{٦}}{٢}$ ت

∴ |ع١ + ع٢| = $\sqrt{\frac{٦}{٤} + \frac{٦}{٤}} = \sqrt{٣}$ ، θ = ٤٥°

∴ ع١ + ع٢ = $\sqrt{٣}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

(٣١) (أ) سعة (ع١³ ع٢²) ، $\pi + ٣\frac{\pi}{٢} = \frac{٥\pi}{٢}$

(ب) سعة (٢ع١ × ع٢) ، $\frac{\pi}{٣} + ٣\frac{\pi}{٤} = \frac{١٣}{١٢}\pi$

(ج) سعة $\left(\frac{\text{ع}_١\text{ع}_٢}{\text{ع}_٣}\right) = \frac{\pi}{٣} + \frac{٣\pi}{٤} - \frac{\pi}{٦} = \frac{١١}{١٢}\pi$

(د) سعة (ع٢^٦) = $\frac{\pi}{٢}$

(٣٢) ∵ جتا θ + ت جا θ = $\text{هـ}^{\theta\text{ت}}$ .... (١)
، جتا θ − ت جا θ = −θ ت
= جتا (−θ) + ت جا (−θ) $\text{هـ}^{-\theta\text{ت}}$
∴ جتا θ − ت جا θ = $\text{هـ}^{-\theta\text{ت}}$ .... (٢)
بجمع (١)، (٢) : ٢ جتا θ = $\text{هـ}^{\theta\text{ت}} + \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}$

∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}\left(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} + \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}\right)$

، بطرح (٢) من (١) : ٢ت جا θ = $\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}$

بالقسمة على ٢ ت : جا θ = $\frac{١}{٢\text{ت}}\left(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}\right)$

∵ ت⁴ = ١ ∴ $\frac{١}{\text{ت}}$ = ت³ = −ت

∴ جا θ = $\frac{-\text{ت}}{٢}\left(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}\right)$

تمارين (٢ - ٢) من الكتاب المدرسي

(١) (أ) نفرض أن ع = جتا θ + ت جا θ

ع^{٤} = جتا ٤ θ + ت جا ٤ ......(١)

، ع^{٤} = جتا^{٤} θ + ق$_{١}^{٤}$ (ت جا θ) جتا^{٣} θ

+ ق$_{٢}^{٤}$ (ت جا θ)^{٢} جتا^{٢} θ + ق$_{٣}^{٤}$ (ت جا θ)^{٣} جتا θ + (ت جا θ)^{٤}

= جتا^{٤} θ - ٦ جتا^{٢} θ جا^{٢} θ + جا^{٤} θ + ت (٤ جا θ جتا^{٣} θ

- ٤ جا^{٣} θ جتا θ) ....(٢)

من (١) ، (٢)

∴ جتا ٤ θ = جتا^{٤} θ - ٦ جتا^{٢} θ (١ - جتا^{٢} θ) + (١ - جتا^{٢} θ)^{٢}

= جتا^{٤} θ - ٦ جتا^{٢} θ + ٦ جتا^{٤} θ + ١ - ٢ جتا^{٢} θ + جتا^{٤} θ

= ٨ جتا^{٤} θ - ٨ جتا^{٢} θ + ١

ب) بالمثل ع^{٥} = جتا ٥ θ + ت جا ٥ θ........(١)

، ع^{٥} = جتا^{٥} θ + ق$_{١}^{٥}$ (ت جا θ) جتا^{٤} θ

+ ق$_{٢}^{٥}$ (ت جا θ)^{٢} جتا^{٣} θ + ق$_{٣}^{٥}$ (ت جا θ)^{٣}

× جتا^{٢} θ + ق$_{٤}^{٥}$ (ت جا θ)^{٤} جتا θ + (ت جا θ)^{٥}

= جتا^{٥} θ - ١٠ جا^{٢} θ جتا^{٣} θ + ٥ جا^{٤} θ جتا θ

+ ت (٥ جا θ جتا^{٤} θ - ١٠ جا^{٣} θ جتا^{٢} θ + جا^{٥} θ) .... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ جا^{٥} θ + ٥ جا θ (١ - ٢ جا^{٢} θ + جا^{٤} θ) - ١٠ جا^{٣} θ +

١٠ جا^{٥} θ = ١٦ جا ٥ θ - ٢٠ جا^{٣} θ + ٥ جا θ

---

(٢) (أ) ع^{٤} = ١٦ = ١٦ (جتا ٠ + ت جا ٠)

∴ ع = ٢ (جتا (٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (٠ + ٣٦٠ر)

= ٢ (جتا ٩٠ر + ت جا ٩٠ ر) حيث ر ∋ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

ع$_{١}$ = ٢ (جتا ٠ + ت جا ٠) = ٢

ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) = ٢ ت

ع$_{٣}$ = ٢ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) = -٢

ع$_{٤}$ = ٢ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧) = -٢ ت

(ب) ع^{٣} = -٨ = ٨ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠)

ع = ٢ (جتا ١٨٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (١٨٠ + ٣٦٠ر)$^{\frac{١}{٣}}$

= ٢ (جتا (٦٠ + ١٢٠ر) + ت جا (٦٠ + ١٢٠ر))

حيث ر ∋ ٠ ، ١ ، ٢

ع$_{١}$ = ٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) = - ٢

ع$_{٣}$ = ٢ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠) = ١ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(ج) ع^{٣} = -٨ ت = ٨ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠)

ع = ٢ (جتا ٢٧٠ + ٣٦٠ ر) + ت جا (٢٧٠ + ٣٦٠ر)$^{\frac{١}{٣}}$

= ٢ (جتا (٩٠ + ١٢٠ر) + ث جا (٩٠ + ١٢٠ر) حيث ر ∋ ٠ ، ١ ، ٢

ع$_{١}$ = ٢ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) = ٢ ت

ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠) = - $\sqrt{٣}$ - ت

ع$_{٣}$ = ٢ (جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠) = $\sqrt{٣}$ - ت

---

(٣) ع^{٥} = - ٢٤٣ ∴ ع^{٥} = ٢٤٣ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠)

∴ ع = ٣ [جتا (١٨٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (١٨٠ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{٨}{٥}}$

ع = ٣ (جتا (٣٦ + ٧٢ر) + ت جا (٣٦ + ٧٢ر))

حيث ر ∋ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

ع$_{١}$ = ٣ (جتا ٣٦ + ت جا ٣٦) ، ع$_{٢}$ = ٣ (جتا ١٠٨ + ت جا ١٠٨)

ع$_{٣}$ = ٣ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) ، ع$_{٤}$ = ٣ (جتا ٢٥٢ + ت جا ٢٥٢)

ع$_{٥}$ = ٣ (جتا ٣٢٤ + ت جا ٣٢٤)

---

(٤) ع^{٤} = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت ، |ع^{٤}| = ٤ ، θ = ٦٠°

ع^{٤} = ٤ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

ع = $\sqrt{٢}$ [جتا (٦٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (٦٠ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{١}{٤}}$

= $\sqrt{٢}$ (جتا (١٥ + ٩٠ر)) + ت جا (١٥ + ٩٠ر))

حيث ر ∋ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

ع$_{١}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ١٥ + ت جا ١٥) = $\sqrt{٢}$ × هـ$^{\frac{١}{١٢} ط ت}$

ع$_{٢}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ١٠٥ + ت جا ١٠٥) = $\sqrt{٢}$ × هـ$^{\frac{٧}{١٢} ط ت}$

ع$_{٣}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ١٩٥ + ت جا ١٩٥) = $\sqrt{٢}$ × هـ$^{\frac{١٣}{١٢} ط ت}$

ع$_{٤}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ٢٨٥ + ت جا ٢٨٥) = $\sqrt{٢}$ × هـ$^{\frac{١٩}{١٢} ط ت}$

---

(٥) (أ) ع = ٢ - ٢ $\sqrt{٣}$ ت ، |ع| = ٤ ، (+ ، -) ربع رابع

ظا θ = - $\sqrt{٣}$ ∴ θ = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠

ع = ٤ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠)

نفرض س = $\sqrt{ع}$ = ع$^{\frac{١}{٢}}$

∴ س = ٢ [جتا (٣٠٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (٣٠٠ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{١}{٢}}$

= ٢ (جتا (١٥٠ + ١٨٠ر) + ت جا (١٥٠ + ١٨٠ر))

حيث ر ∋ ٠ ، ١

س$_{١}$ = ١٢ (جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠)

س$_{٢}$ = ٢ (جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠)

(ب) ع = ١ - ت |ع| = $\sqrt{٢}$

+ ، - ربع رابع ، ظا θ = -١ ، θ = ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥

∴ ع = $\sqrt{٢}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥)

نفرض أن س = ع$^{\frac{١}{٢}}$

س = $\sqrt[٤]{٢}$ [جتا (٣١٥ + ٣٦٠ر)+ت جا (٣١٥ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt[٤]{ع}$

= $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا ٣٠َ ١٧٥° + ١٨٠ر) + ت جا(٣٠َ ١٧٥° + ١٨٠ر)

حيث ر ∈ ٠ ، ١

س$_١$ = $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا ٣٠َ ١٥٧° + ت جا ٣٠َ ١٥٧°)

س$_٢$ = $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا ٣٠َ ٣٣٧° + ت جا ٣٠َ ٣٣٧°)

(ج) ع = ٨ ت = ٤ × ٢ ت = ٤ (١ + ت)^٢

ع$^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{ع}$ = ± ٢ (١ + ت)

س$_١$ = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

س$_٢$ = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥)

(د) نفرض $\sqrt{٣ + ٤ت}$ = ± (س + ص ت)

بتربيع الطرفين حيث س، ص ∈ ح

∴ س^٢ - ص^٢ + ٢ س ص ت = ٣ + ٤ ت

∴ س^٢ - ص^٢ = ٣ .... (١)

٢ س ص = ٤ .... (٢)

بتربيع طرفى (١) ، (٢) والجمع والتحليل

∴ (س^٢ + ص^٢)^٢ = ٢٥ بأخذ الجذر

س^٢ + ص^٢ = ٥   ، ٣ س^٢ + ص^٢ = - ٥ مرفوض

بجمع (١) ، (٣)   ∴ ٢ س^٢ = ٨   ∴ س^٢ = ٤

س = ٢   من (٢) ص = ١

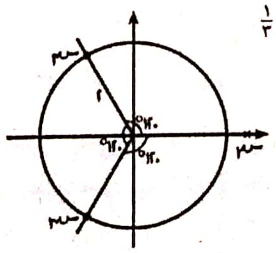
∴ $\sqrt{٣ + ٤ت}$ = ± (٢ + ت)

(هـ) $\sqrt{٥ - ١٢ت}$ = $\sqrt{٩ - ٤ - ١٢ت}$

= $\sqrt{٩ - ١٢ت + ٤ت^٢}$

= $\sqrt{(٣ - ٢ت)^٢}$ = ± (٣ -٢ت) ويمكن الحل كما سبق فى (د)

(٦) $\sqrt[٣]{٨}$ = س   ∴ س = [٨ (جتا ٠ + ت جا ٠)]$^{\frac{١}{٣}}$



= ٢ [جتا (٣٦٠ر) + ت جا (٣٦٠ر)]$^{\frac{١}{٣}}$

= ٢ (جتا ١٢٠ر + ت جا ١٢٠ر)

حيث ر ∈ ٠،١،٢

س$_١$ = ٢ (جتا ٠ + ت جا ٠) = ٢

س$_٢$ = ٢ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

س$_٣$ = ٢ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

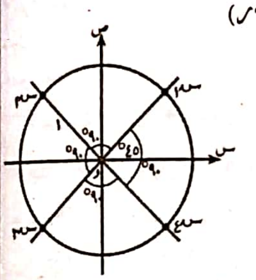
للتمثيل على شكل أرجاند ترسم دائرة مركزها و = (٠/٠) وطول نصف قطرها = |س| ∴ نصف القطر = ٢

س$_١$ ، س$_٢$، س$_٣$ تقسم الدائرة إلى ٣ أقسام متساوية كما بالشكل.

(٧) س = $\sqrt[٤]{-١}$ = (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠)$^{\frac{١}{٤}}$

= (جتا (١٨٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (١٨٠ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{١}{٤}}$

= جتا (٤٥ + ٩٠ر) + ت جا (٤٥ + ٩٠ر)



حيث ر ∈ ٠، ١، ٢، ٣

س$_١$ = جتا ٤٥ + ت جا ٤٥

س$_٢$ = جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥

س$_٣$ = جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥

س$_٤$ = جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥

التمثيل على شكل أرجاند نصف قطر الدائرة = ١

(٨) أ + ب ت = $\frac{٧ - ١١ت}{٤ + ت}$ × $\frac{٤ - ت}{٤ - ت}$ = $\frac{١٧ - ٥١ت}{١٧}$ = ١-٣ ت

∴ أ = ١ ، ب = -٣

نفرض ع = $\sqrt{-ب}$ + أت = $\sqrt{٣}$ + ت

ع = ٢ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠) ، ع^٣ = ٨ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

بفرض س = ع$^{\frac{٣}{٢}}$

س = $\sqrt{٨}$ [جتا (٩٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (٩٠ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{١}{٢}}$

س = $\sqrt{٨}$ (جتا (٤٥ + ١٨٠ر) + ت جا (٤٥ + ١٨٠ر)]

حيث ر = ٠، ١

س$_١$ = $\sqrt{٨}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥) = ٢ + ٢ت

س$_٢$ = $\sqrt{٨}$ (جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥) = -٢-٢ ت

(٩) ع = ٢ $\sqrt{٢}$ (١ + ت)

= ٢ $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

= ٤ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

نفرض س=ع$^{\frac{١}{٢}}$ =٢ [جتا (٤٥ + ٣٦٠ر) + ت جا (٤٥ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{١}{٢}}$

= ٢ (جتا ٢٢,٥ + ١٨٠ر) + ت جا ٢٢,٥١ + ١٨٠ر)]

حيث ر ∈ ٠، ١   ∴ س$_١$ = ٢ (جتا ٢٢,٥ + ت جا ٢٢,٥)

= ٢ × هـ$^{\frac{١}{٨}\pi ت}$ ، س$_٢$ = ٢ × هـ$^{\frac{٩}{٨}\pi ت}$

(١٠) ع = ٨ - ٦ ت = ٩ - ٦ ت + ت^٢

ع = (٣ - ت)^٢ ، ع$^{\frac{٣}{٢}}$ = [(٣ - ت)^٢]$^{\frac{٣}{٢}}$ = ± (٣ -ت)^٣

= ± (٣-ت) (٨ - ٦ ت) = ± (٢٦-٢٤ت - ٦) = ± (٢٦-١٨ ت)

(١١) من حل رقم (١) (أ) من نفس التمرين

$\text{جتا}^4\theta = 8\,\text{جتا}^4\theta - 8\,\text{جتا}^2\theta + 1$

$= 8\,\text{جتا}^4\theta - 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2\theta\right) + 1$

$\therefore 8\,\text{جتا}^4\theta = \text{جتا}\,4\theta + 4\,\text{جتا}\,2\theta + 1$

$\therefore \text{جتا}^4\theta = \frac{1}{8}\left(\text{جتا}\,4\theta + 4\,\text{جتا}\,2\theta + 1\right)$ هـ.ط ت

تمارين (٢ - ٣) من الكتاب المدرسي

(١) $(2+5\omega+2\omega^2)^2$

$= (2+2\omega+2\omega^2+3\omega)^2 = (0+3\omega)^2 = 9\omega^2$

(٢) $(\omega-\omega^2)^4 = (\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^4 = 9\,\text{ت}^4 = 9$

(٣) $\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2$

$= (\omega^2+\omega)^2(\omega+\omega^2)^2 = (-1)^2(-1)^2 = 1$

(٤) $\text{س} = \frac{-1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{ت}$

تعتبر س = ω ، $\omega^8+\omega^4 = \omega^8+\omega^4 = \omega^2+\omega = -1$

باعتبار س = ω^2 ، $\text{س}^8 + \text{س}^4 = \omega^{16}+\omega^8 = \omega+\omega^2 = -1$

(٥) $\left(\frac{1}{1+\omega}\right)\left(1+\omega-\frac{3}{\omega}\right) = \left(\frac{1}{-\omega^2}\right)(-\omega^2-3\omega^2)$

$= (-\omega)(-4\omega^2) = 4$

(٦) $1+3\omega+3\omega^2 = 1-3 = -2$

(٧) $\text{أ}^2+\text{ب}^2 = (2\omega-3\omega^2)^2 + (3+5\omega^2)^2$

$= 4\omega^2-12\omega^3+9\omega^4+9+30\omega^2+25\omega^4$

$= 34\omega^2+34\omega-3 = 34(\omega^2+\omega)-3 = -34-3 = -37$

(٨) $\sum_{\text{ر}=1}^{5}\omega^{\text{ر}} = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5$

$= -1+1+\omega+\omega^2 = -1$

الجواب (ب)

(٩) مرافق ω هو ω^2

(١٠) $\left(\omega^2+\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^2 = (\omega^2+\omega^2)(1+\omega)^2$

$= 2\omega^2(-\omega^2)(1+\omega)^2 = 2\omega^2\times\omega^4 = 2$ الجواب (أ)

(١١) $(\text{أ}+\text{ب}\,\omega+\text{ب}\,\omega^2)(\text{أ}+\text{ب}\,\omega^2+\text{أ}\,\omega^4)$

$= [\text{أ}(1+\omega^2)+\text{ب}\,\omega]\,[\text{أ}(1+\omega)+\text{ب}\,\omega^2]$

$= (-\text{أ}\,\omega+\text{ب}\,\omega)(-\text{أ}\,\omega^2+\text{ب}\,\omega^2)$

$= -\omega(\text{أ}-\text{ب}) \times -\omega^2(\text{أ}-\text{ب})$

$= \omega^3(\text{أ}-\text{ب})^2 = (\text{أ}-\text{ب})^2$ الجواب (جـ)

(١٢) $(1+2\omega^2+\omega)(1+2\omega+\omega^2)$

$= (\omega^2)(\omega) = \omega^3 = 1$ الجواب (ب)

(١٣) $\frac{\text{أ}\omega^3-\text{ء}\,\omega}{\text{أ}\omega^2-\text{ء}}-\omega^2 = \frac{\omega(\text{أ}\omega^2-\text{ء})}{(\text{أ}\omega^2-\text{ء})}-\omega^2$

$= \omega-\omega^2 = \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$ الجواب (ب)

(١٤) $\text{أ}+\text{ب}\,\omega = (1+\omega)^7$

$\therefore \text{أ}+\text{ب}\,\omega = (-\omega^2)^7 = -\omega^{14}$

$\text{أ}+\text{ب}\,\omega = -\omega^2 = 1+\omega$ ، أ = ١ ، ب = ω

$\therefore$ (أ ، ب) = (١ ، ١) الجواب (ب)

(١٥) $(1+\omega)^{\text{ن}} = (1+\omega^2)^{\text{ن}}$ $\therefore (-\omega^2)^{\text{ن}} = (-\omega)^{\text{ن}}$

$\therefore$ أقل قيمة لـ ن تحقق ذلك لابد انها عدد زوجى يقبل القسمة على ٣

$\therefore$ ن = ٦ الجواب (د)

(١٦) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\dots\dots+\omega^{100}$

$= \omega^{100} = \omega$ الجواب (ج)

(١٧) $\text{ع} = \omega^{\text{ن}} = (\sqrt[3]{1})^{\text{ن}} = (1)^{\frac{\text{ن}}{3}}$ ، $|\text{ع}| = 1$ الجواب (أ)

(١٨) $\sum_{\text{ر}=1}^{6}(1+\omega^{\text{ر}}) = 6+\omega+\omega^2+\omega^3$

$+\omega^4+\omega^5+\omega^6 = 6+0 = 6$ الجواب (ب)

(١٩) (أ) الأيمن = $(-\omega-\omega)(1-\omega^2+\omega)$

$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega) = 2^4\times\omega^6 = 2^4 =$ الأيسر

(ب) الأيمن = $\left(\frac{\omega^2}{1+4\omega+4\omega^2}\right) + \frac{1+4\omega^2+4\omega^4}{\omega^4}$

$= \frac{\omega^2}{-3}+\frac{-3}{\omega} = \frac{-10}{3}\omega^2 =$ الأيسر

(ج) الأيمن = $\left[\frac{1+\omega^2\text{ت}-\omega-\omega^2\text{ت}+\text{ت}+\omega}{(1+\omega\text{ت})(1+\omega^2\text{ت})}\right]^8$

$= \left[\frac{1-\text{ت}}{1+\text{ت}(\omega+\omega^2)-1}\right]^8 = \left[\frac{1-\text{ت}}{-\text{ت}}\right]^8$

$= \frac{(1-\text{ت})^8}{1} = \frac{(-2\text{ت})^4}{1} = 16 =$ الأيسر

(د) الأيمن = $\left[\frac{5\omega^3-3\omega^2}{5\omega-3}-\frac{2\omega^3-7\omega}{2\omega^2-7}\right]^2$

$$= \left[\frac{\omega^2(5\omega-3)}{(5\omega-3)} - \frac{\omega(2\omega^3-7\omega)}{(2\omega^2-7)}\right]^2$$

$= [\omega - \omega^2]^2 = (\pm\sqrt{3}\,ت)^2 = -3$ = الأيسر

(هـ) الأيمن = $(-\omega)^8 = \omega^8 = \omega^2$ = الأيسر

(و) الأيمن = $(-2\omega^2)^2 + (\text{صفر})^2 = 4\omega^4 = 4\omega$ = الأيسر

(٢٠) (أ) ٥ + ٣ (-١) = ٢

(ب) $(-\omega^2 + 2\omega^2)^2 + (-\omega + 2\omega)^2$

$= \omega^4 + \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

(ج) $\frac{\omega^2(\omega^3 - \omega - \omega^2 + 1)}{2\omega^3 + 4\omega + \omega^2 + 2} = \frac{\omega^2(2+1)}{4+4\omega+\omega^2}$

$= \frac{3\omega^2}{-4\omega^2 + \omega^2} = \frac{3\omega^2}{-3\omega^2} = -1$

(د) $\left[\frac{1+3\omega - 1 - 3\omega^2}{(1+3\omega^2)(1+3\omega)}\right]^2 = \left[\frac{3(\omega - \omega^2)}{1+3(\omega+\omega^2)+9\omega^3}\right]^2$

$= \frac{9[(\pm\sqrt{3}\,ت)^2]^2}{(1-3+9)^2} = \frac{-27}{49}$

(هـ) $(1+\omega^2+ت)(1+\omega+ت) = (-\omega + ت)(-\omega^2 + ت)$

$= \omega^3 - \omega\,ت - \omega^2\,ت - 1 = 1 - ت(\omega+\omega^2) - 1$

$= -ت \times -1 = ت$

(٢١) ∵ $س = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت$ ، اعتبر $س = \omega$

الأيمن = $1 + 6\omega^5 + 15\omega^4 + 20\omega^3 + 15\omega^2 + 6\omega$

$= 1 + 20 + 6(\omega^2+\omega) + 15(\omega^2+\omega)$

= ٢١ - ٦ - ١٥ = صفر = الأيسر

أو نعتبر $س = \omega^2$

الأيمن = $1 + 6\omega^{10} + 15\omega^8 + 20\omega^6 + 15\omega^4 + 6\omega^2$

$= 1 + 20 + 6(\omega+\omega^2) + 15(\omega+\omega^2)$

= ٢١ - ٦ - ١٥ = ٠ = الأيسر

أو نعتبر $ع = س = \omega^2$ ∴ $\sqrt{ع} = \sqrt{\omega^2} = \pm\omega$

(٢٢) $\frac{1}{1+\omega} = \frac{1}{-\omega^2} = -\omega$

$\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{-\omega} = -\omega^2$

مجموع الجذرين = $-\omega - \omega^2 = 1$

، حاصل ضرب الجذرين = $-\omega \times -\omega^2 = \omega^3 = 1$

∴ المعادلة هي :

$س^2$ - مجموع الجذرين ×س + حاصل ضرب الجذرين =٠

∴ هي: $\omega^2 - \omega + 1$ = صفر

(٢٣) $ع = 2[(\omega^2)^3 + ت(\omega + \omega^2) - 1]$

= ٢ [١ - ت - ١] = -٢ت = ٢ × - ت

= ٢ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠) = $2 \times هـ^{\frac{3\pi}{2}ت}$

نفرض أن $س = ع^{\frac{1}{2}}$

∴ $س = \sqrt{2}$ [جتا (٢٧٠ + ٣٦٠ ر) + ت جا (٢٧٠ + ٣٦٠ ر)$]^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2}$ (جتا (١٣٥ + ١٨٠ ر) + ت جا (١٣٥ + ١٨٠ ر))

حيث ر ∈ ٠ ، ١

$س_1 = \sqrt{2}$ (جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥)

$س_2 = \sqrt{2}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥)

(٢٤) $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^ن = (2 + 2\omega + 5\omega^2)^2$

∴ $(3\omega)^ن = (3\omega^2)^2$ ∴ ن لابد أن = ٣

(٢٥) (أ) $\sum_{ر=0}^{10} (\omega)^ر = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{10}$

$= \omega^9 + \omega^{10} = 1 + \omega$

(ب) $\sum_{ر=0}^{10} (1 + \omega^ر + \omega^{2ر})$ ، ر = ٠

$= (1 + 1 + 1) + (1 + \omega + \omega^2) + (1 + \omega + \omega^2) + \dots$ إلى ١٠

أقواس = ٣ + ٠ + ٠ + ٠ + ٠ = ٣

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة

(١) $ع = \frac{2+ت}{2-ت} \times \frac{2+ت}{2+ت}$

$= \frac{4+4ت-1}{4+1} = \frac{3+4ت}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}ت$

$|ع| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$

(٢) في الشكل ع = ٢ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

(٣) ع = جا θ - ت جتا θ = جتا (٢٧٠ + θ) + ت جا (٢٧٠ + θ)

∴ سعة ع = ٢٧٠ + θ

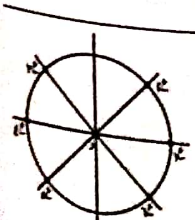
(٤) مرافق ت + $س^2$ هو - ت + س

(٥) ١ + ٢س + $٢س^2$ = ١ - ٢ = -١

(٦) $ع_ر\, ع_{ر+1}$

= قياس الزاوية بين

جذرين متتاليين = ٦٠°



(٧) سعة $ع_1 ع_2$ هي $\theta_1+\theta_2$ الجواب (أ)

(٨) ٢ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠) = -١ + $\sqrt{3}$ ت الجواب (ب)

(٩) $|ع| = \sqrt{3+(-1)^2} = 2$

ظا $\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، (-، +) ربع ثاني

$\theta = 180 - 30 = 150° = \frac{5\pi}{6}$

∴ القياس والسعة هما (٢ ، $\frac{5\pi}{6}$) الجواب (ب)

(١٠) ع = $\sqrt{2}$ (جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠)

الجزء الحقيقي = $\sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{6}}{2}$ الجواب (ب)

(١١) مرافق ١ + ω هو (١ + ω^2) الجواب (ج)

(١٢) خماسي منتظم الجواب (ج)

(١٣) $\frac{أ^3+ت}{أ^2+أت-1} = \frac{أ^3-ت^3}{أ^2+أت-1}$

$= \frac{(أ-ت)(أ^2+أت+ت^2)}{(أ^2+أت-1)}$

$= \frac{(أ-ت)(أ^2+أت-1)}{(أ^2+أت-1)} = أ - ت$

∴ المرافق هو أ + ت الجواب (ب)

(١٤) ع = $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)^ن$

∵ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ت = جتا ٦٠ + ت جا ٦٠

∴ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)^ن = ١

جتا ٦٠ن + ت جا ٦٠ن = ١ ∴ ن = ٦ الجواب (ب)

(١٥) نفرض أن ع = أ + ب ت ، ع - ٢ = أ - ٢ + ب ت

∵ $|ع| = |ع-2|$

∴ $\sqrt{(أ-2)^2+ب^2} = \sqrt{أ^2+ب^2}$

∵ $(أ-2)^2 = أ^2$ ∴ أ - ٢ = ± أ

أ - ٢ = أ ، أ - ٢ = - أ

ونفرض أ = ١ ∴ ٢أ = ٢

الجزء الحقيقي للعدد ع = ١ الجواب (أ)

(١٦) $هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت} = 2$جتا$\theta$ الجواب (ب)

(١٧) ∵ $|ع| = 10$ ، $|\bar{ع}| = 10$ ∴ $ع\bar{ع} = 100$ الجواب(ب)

(١٨) (أ) ع = جتا π + ت جا π = -١

(ب) ع = ٣ (جتا ١٥ + ت جا ١٥) × $\sqrt{2}$ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠)

= ٣ $\sqrt{2}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥) = ٣ - ٣ ت

(ج) ع = ٢ $\sqrt{2}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥) = ٢ + ٢ ت

(١٩) $|ع_1| = \sqrt{81+27} = 6\sqrt{3}$ ، (-، +)

ربع ثاني ، ∵ ظا$\theta = \frac{3\sqrt{3}}{-9} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = 180 - 30 = 150$

(أ) $ع_1$ = ٦ $\sqrt{3}$ (جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠)

(ب) $ع_2$ = $\sqrt{3}$ (جتا ١٠٥ + ت جا ١٠٥)

(ج) $ع_1ع_2$ = ١٨ (جتا ٢٥٥ + ت جا ٢٥٥)

(د) $\frac{ع_1}{ع_2}$ = ٦ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

(٢٠) (أ) $ع_1 = 7 = 7 \times هـ^0$

(ب) $ع_2$ = -٥ت = ٥ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠) = ٥ × $هـ^{\frac{3\pi}{2}\theta}$

(ج) $ع_3$ = $\frac{1}{2}$ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) = $\frac{1}{2} \times هـ^{\frac{\pi}{3}\theta}$

(د) $ع_4 = \frac{4}{1+\sqrt{3}ت} \times \frac{1-\sqrt{3}ت}{1-\sqrt{3}ت} = \frac{4(1-\sqrt{3}ت)}{4}$

$ع_4 = 1 - \sqrt{3}ت$ ، $|ع_4| = 2$ (+، -) ربع رابع

ظا$\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

$\theta = 360 - 60 = 300$

$ع_4$ = ٢ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠) = ٢ × $هـ^{\frac{5\pi}{3}\theta}$

(هـ) $ع_5$ = -٤ (جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠)

= ٤ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠) = ٤ × $هـ^{\frac{\pi}{6}\theta}$

(٢١) ع = ١ + جتا θ + ت جا θ

= ١ + ٢ جتا^2 $\frac{\theta}{2}$ - ١ + (٢ جا $\frac{\theta}{2}$ جتا $\frac{\theta}{2}$) ت

= ٢ جتا^2 $\frac{\theta}{2}$ + ٢ جا $\frac{\theta}{2}$ جتا $\frac{\theta}{2}$ ت

= ٢ جتا $\frac{\theta}{2}$ (جتا $\frac{\theta}{2}$ + ت جا $\frac{\theta}{2}$)

المقياس = ٢ جتا $\frac{\theta}{2}$ والسعة = $\frac{\theta}{2}$

(٢٢) ع = $\frac{٢ - ت + ٢ت + ١}{٣ + ت - ٣ت + ١} = \frac{٣ + ت}{٤ - ٢ت}$

= $\frac{(٣ + ت)}{٤ - ٢ت} \times \frac{٤ + ٢ت}{٤ + ٢ت}$

= $\frac{١٢ + ٦ت + ٤ت - ٢}{١٦ + ٤} = \frac{١٠ + ١٠ت}{٢٠}$

= $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$ت $|ع| = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}} = \sqrt{\frac{٢}{٤}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٢٣) ظا$^{-1}$ $(\sqrt{٣})$ = ٦٠° = سعة العدد ع مثلاً

ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ = ٣٠° = سعة العدد ع مثلاً

سعة ع$_1$ + سعة ع$_2$ = ٦٠ + ٣٠ = ٩٠ = $\frac{\pi}{٢}$

اختبار الكتاب المدرسي التراكمي على الوحدة

(١) (أ) الأول   (ب) الثالث   (ج) الرابع

(٢) مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}} = ٣$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = ١$

(٣) (أ) $|ع| = \sqrt{٣ + ١} = ٢$ ، (+ ، +) ربع أول ،

ظا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، θ = ٣٠° = السعة .

(ب) $|ع_2| = \sqrt{٢}$ ، (- ، +) ربع ثاني

ظا θ = -١ ∴ سعة ع$_2$ = ١٨٠ - ٤٥ = ١٣٥°

(ج) $|ع_3| = ٤$ ، سعة ع$_3$ = ٩٠°

(د) $|ع_4| = ٥$ ، سعة ع$_4$ = ١٨٠°

(هـ) $|ع_5| = ٥$ ، (+ ، -) ربع رابع

ظا $\theta = \frac{-٤}{٣}$ ∴ θ = ٣٦٠ - ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٤}{٣}\right)$

θ = ٥٢' ٣٠٦° = سعة ع$_5$

(٤) ع = $\frac{١ + ٤ت - ١}{٢ - ت + ٢ + ت} = \frac{٤ت}{٤}$ = ت

ع = جتا ٩٠ + ت جا ٩٠ ، نفرض س = $\sqrt{ع}$

س = [جتا (٩٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (٩٠ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{١}{٢}}$

س = جتا (٤٥ + ١٨٠ر) + ت جا (٤٥ + ١٨٠ر)

حيث ر ∈ ٠ ، ١

س$_1$ = جتا ٤٥ + ت جا ٤٥ ، س$_2$ = جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥

(٥) نفرض أن ع = أ + ب ت   ∴ $\bar{ع}$ = أ - ب ت

∴ ٢أ + ٢ب ت - ٣أ + ٣ب ت = ٥ + ١٠ت

-أ + ٥ب ت = ٥ + ١٠ت   ∴ أ = -٥ ، ب = ٢

∴ ع = -٥ + ٢ت ، م.ج = {-٥ + ٢ت}

(٦) ع = ٤ + ٤ $\sqrt{٣}$ ت

|ع| = ٨ ، (+ ، +) ربع أول

ظا$\theta = \sqrt{٣}$ ∴ θ = ٦٠ = $\frac{\pi}{٣}$ ∴ ع = ٨ × هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

ع = ١٨ جتا (٦٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (٦٠ + ٣٦٠ر)

نفرض س = ع$^{\frac{١}{٣}}$

س = ٢ [جتا (٢٠ + ١٢٠ر) + ت جا (٢٠ + ١٢٠ر)]

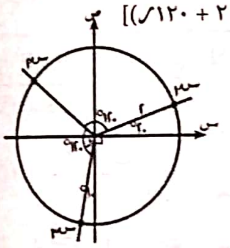
حيث ر ∈ ٠ ، ١ ، ٢

س$_1$ = ٢ (جتا ٢٠ + ت جا ٢٠)

س$_2$ = ٢ (جتا ١٤٠ + ت جا ١٤٠)

س$_3$ = ٢ (جتا ٢٦٠ + ت جا ٢٦٠)

التمثيل على شكل أرجاند



(٧) ع = $\frac{-\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} + ت}$

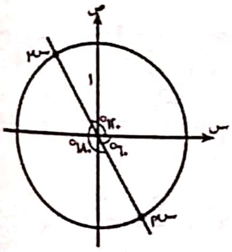
= $\frac{-٣ - ١ - ٢\sqrt{٣}ت}{٤} = \frac{-٢ - ٢\sqrt{٣}ت}{٤}$

ع = - $\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت

|ع| = ١ ، (- ، -) ربع ثالث

ظا$\theta = \sqrt{٣}$

θ = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠



ع = جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠ = هـ$^{\frac{٤}{٣}\pi ت}$ ، نفرض ان س = $\sqrt{ع}$

س + [جتا (٢٤٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (٢٤٠ + ٣٦٠ر)]

= جتا (١٢٠ + ١٨٠ر) + ت جا (١٢٠ + ١٨٠ر)

حيث ر ∈ {٠ ، ١}

س$_1$ = جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠ ، س$_2$ = جتا + ت جا ٣٠٠

طول نصف قطر الدائرة = ١

(٨) ع$_1$ = $\sqrt{٣}$ (جتا ٦٠ - ت جا ٦٠)

= $\sqrt{٣}$ (جتا ٣٠٠ - ت جا ٣٠٠)

ع$_2$ = ٢ (جتا ٦٠ - ت جا ٦٠)

ع$_1$ ع$_2$ = ٢ $\sqrt{٣}$ (جتا ٣٦٠ - ت جا ٣٦٠)

٢ $\sqrt{٣}$ × هـ$^{٢\pi ت}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ × هـ°

$ع = (ع_1 ع_2)^{\frac{1}{4}}$ = س مثلا $= \sqrt[4]{12}\,(\text{جتا } 360\,ر - ت \text{ جا } 360\,ر)^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt[4]{12}\,(\text{جتا } 90\,ر - ت \text{ جا } 90\,ر)$

حيث $ر \in ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣$

$س_1 = \sqrt[4]{12}\,(\text{جتا } 0 - ت \text{ جا } 0)$

$س_2 = \sqrt[4]{12}\,(\text{جتا } 90 - ت \text{ جا } 90)$

$س_3 = \sqrt[4]{12}\,(\text{جتا } 180 - ت \text{ جا } 180)$

$س_4 = \sqrt[4]{12}\,(\text{جتا } 270 - ت \text{ جا } 270)$

(٩) $ع = \frac{-4}{1-\sqrt{3}ت} \times \frac{1+\sqrt{3}ت}{1+\sqrt{3}ت} = -1 - \sqrt{3}ت$

$|ع| = 2$ ، $(1 ، 1)$ ربع ثالث

$\text{ظا } \theta = \sqrt{3}$ $\therefore \theta = 180 + 60 = 240$

$ع = 2\,(\text{جتا } 240 + ت \text{ جا } 240) = 2 \times هـ^{\frac{4}{3}\pi ت}$

(أ) $ع^6 = 64\,(\text{جتا } 1440 + ت \text{ جا } 1440)$

$= 64\,(\text{جتا } 0 + ت \text{ جا } 0) = 64$ = عدد حقيقي

(ب) $\frac{1}{ع} = \frac{1}{2} \times هـ^{-\frac{4}{3}\pi ت} = \frac{1}{2} \times هـ^{(2\pi - \frac{4}{3}\pi)ت} = \frac{1}{2} \times هـ^{\frac{2}{3}\pi ت}$

(١٠) $ع = \text{جتا } \theta + ت \text{ جا } \theta$

$1 + ع = 1 + \text{جتا } \theta + ت \text{ جا } \theta$

$= 1 + 2\text{جتا}^2 \frac{\theta}{2} - 1 + 2 \text{ جا } \frac{\theta}{2} \text{ جتا } \frac{\theta}{2}\, ت$

$= 2 \text{ جتا } \frac{\theta}{2} \left[\text{جتا } \frac{\theta}{2} + ت \text{ جا } \frac{\theta}{2}\right]$

$1 - ع = 1 - \text{جتا } \theta - ت \text{ جا } \theta = 1 - (1 - 2\text{جا}^2 \frac{\theta}{2})$

$- ت \times 2 \text{ جا } \frac{\theta}{2} \text{ جتا } \frac{\theta}{2} = 2 \text{ جا } \frac{\theta}{2} \left[\text{جا } \frac{\theta}{2} + ت \text{ جتا } \frac{\theta}{2}\right]$

$= 2 \text{ جا } \frac{\theta}{2} \left[(\text{جتا } (270 + \frac{\theta}{2}) + ت \text{ جا } (270 + \frac{\theta}{2})\right]$

$\therefore \frac{1+ع}{1-ع} = \text{ظتا } \frac{\theta}{2} \left[\text{جتا } (-270) + ت \text{ جا } (-270)\right]$

$= \text{ظتا } \frac{\theta}{2}\,(\text{جتا } 90 + ت \text{ جا } 90)$

$\therefore$ المقياس $= \text{ظتا } \frac{\theta}{2}$ والسعة $= 90° = \frac{\pi}{2}$

(١١) $ع = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} ت$

$ع_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت} \times \frac{2}{2} = \frac{1+\sqrt{3}ت}{3-\sqrt{3}ت} \times \frac{3+\sqrt{3}ت}{3+\sqrt{3}ت}$

$= \frac{3 - 3 + 4\sqrt{3}ت}{12} \times \frac{1}{\sqrt{3}}ت = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\text{جتا } 90 + ت \text{ جا } 90)$

نفرض $س = \sqrt{ع_1}$

$س = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \left[\text{جتا } (90 + 360\,ر) + ت \text{ جا } (90 + 360\,ر)\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \left[\text{جتا } (45 + 180\,ر) + ت \text{ جا } (45 + 180\,ر)\right]$

حيث $ر \in ٠ ، ١$ ، $س_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,(\text{جتا } 45 + ت \text{ جا } 45)$

$س_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,(\text{جتا } 225 + ت \text{ جا } 225)$

(١٢) (أ) الأيمن $= (-\omega - 2\omega)(-\omega^2 - 5\omega^2)$

$= (-3\omega)(-6\omega^2) = 18$ = الأيسر

(ب) الأيمن $= \frac{3 + 5\omega - 3 - 3\omega}{1 - 2\omega + س + 4\omega} + \frac{5\omega^2 - 3\omega^2}{1 - 2\omega + 4 + 4\omega^2}$

$= \frac{2\omega}{5 + 2\omega} + \frac{2\omega^2}{5 + 2\omega^2} = \frac{2\omega(5 + 2\omega^2) + 2\omega^2(5 + 2\omega)}{(5 + 2\omega)(5 + 2\omega^2)}$

$= \frac{10\omega + 4\omega^3 + 10\omega^2 + 4\omega^3}{25 + 10\omega + 10\omega^2 + 4\omega^3}$

$= \frac{-10 + 8}{25 - 10 + 4} = \frac{-2}{19}$ = الأيسر

المجموعة الرابعة:

[١] (أ) $ع = \left[\frac{1+ت}{1-ت} \times \frac{1+ت}{1+ت}\right]^5 = \left[\frac{2ت}{2}\right]^5 = ت$

$\therefore ع = \text{جتا } 90 + ت \text{ جا } 90 = \text{جتا } \frac{ط}{2} + ت \text{ جا } \frac{ط}{2}$

نفرض $س = \sqrt{ع} = ع^{\frac{1}{2}} = \left[\text{جتا}(90 + 2ر ط) + ت \text{ جا}(90 + 2ر ط)\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \text{جتا}(45 + ر ط) + ت \text{ جا}(45 + ر ط)$

حيث $ر \in \{0 ، 1\}$

$س_1 = \text{جتا}(45) + ت \text{ جا}(45) = \text{جتا } \frac{ط}{4} + ت \text{ جا } \frac{ط}{4} = هـ^{\frac{ط ت}{4}}$

$س_2 = \text{جتا}(225) + ت \text{ جا}(225) = \text{جتا } \frac{5ط}{4} + ت \text{ جا } \frac{5ط}{4} = هـ^{\frac{5ط ت}{4}}$

(ب) الطرف الأيمن:

$= \frac{(1 - \omega ت)(\omega - ت) - ت(\omega + ت)}{(\omega + ت)(\omega - ت)} + \omega^2 =$

$\frac{\omega - \omega^2 ت - ت - \omega - \omega ت + 1}{\omega^2 - ت^2} + \omega^2$

$$= \frac{-\text{ت} - \text{ت}(\omega^{2}+\omega)+1}{\omega^{2}+1} + \omega^{2} =$$

$$\frac{-\text{ت}+\text{ت}+1}{-\omega} + \omega^{2} = -\omega^{2} + \omega^{2} = ٠ = \text{الأيسر}$$

---

[٢] (أ) $\text{ع} = \frac{2}{(\sqrt{3}+\text{ت})} \times \frac{\sqrt{3}-\text{ت}}{(\sqrt{3}-\text{ت})} =$

$$\frac{2(\sqrt{3}-\text{ت})}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{ت}$$

$$|\text{ع}| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1 \text{ ، ظا } \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

، ربع رابع $\therefore \theta = 360 - 30 = 330°$

$$\text{ع} = \text{جتا } 330 + \text{ت جا } 330 = \text{جتا } \frac{11}{6}\text{ط} + \text{ت جا } \frac{11}{6}\text{ط} .$$

نفرض أن $\text{س} = \sqrt[3]{\text{ع}} = \text{ع}^{\frac{1}{3}} =$

$$\left[\text{جتا}(330+2\text{ر ط}) + \text{ت جا}(330+2\text{ر ط})\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \text{جتا}(110+120\text{ر}) + \text{ت جا}(110+120\text{ر})$$

حيث ر $\in \{٠ ، ١ ، ٢\}$

$$\text{س}_1 = \text{جتا } 110 + \text{ت جا } 110 = \text{جتا}\frac{11}{18}\text{ط} + \text{ت جا}\frac{11}{18}\text{ط} = \text{هـ}^{\frac{11}{18}\text{ط ت}}$$

$$\text{س}_2 = \text{جتا } 230 + \text{ت جا } 230 = \text{جتا}\frac{23}{18}\text{ط} + \text{ت جا}\frac{23}{18}\text{ط} = \text{هـ}^{\frac{23}{18}\text{ط ت}}$$

$$\text{س}_3 = \text{جتا } 350 + \text{ت جا } 350 = \text{جتا}\frac{35}{18}\text{ط} + \text{ت جا}\frac{35}{18}\text{ط} = \text{هـ}^{\frac{35}{18}\text{ط ت}}$$

(ب) الأيمن

$$= \frac{(2+\omega)(2\omega^{2}-\omega) + (2+\omega^{2})(2\omega-\omega^{2})}{(2\omega-\omega^{2})(\omega^{2}-\omega)}$$

$$= \frac{4\omega^{2}-2\omega+2\omega^{3}-\omega^{2}+4\omega-2\omega^{2}+2\omega^{3}-\omega^{4}}{4\omega^{4}-2\omega^{3}-2\omega^{4}+\omega^{3}}$$

$$= \frac{\omega^{2}+\omega+4}{7} = \frac{-1+4}{7} = \frac{3}{7} = \text{الأيسر}$$

---

[٣] (أ) $\text{ع}_1\text{ع}_2 = 4\left(\text{جتا}\frac{4}{3}\text{ط} + \text{ت جا}\frac{4}{3}\text{ط}\right) = -2-2\sqrt{3}\,\text{ت}$

نفرض أن $\text{س} = \sqrt{\text{ع}_1\text{ع}_2} =$

$$2\left[\text{جتا}(240+360\text{ر}) + \text{ت جا}(240+360\text{ر})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[\text{جتا}(120+180\text{ر}) + \text{ت جا}(120+180\text{ر})\right]$$

حيث ر $\in \{٠ ، ١\}$

$$\text{س}_1 = 2(\text{جتا } 120 + \text{ت جا } 120) =$$

$$2\left(\text{جتا}\frac{2\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{2\text{ط}}{3}\right) = \text{هـ}^{\frac{2}{3}\text{ط ت}}$$

$$\text{س}_2 = 2(\text{جتا } 300 + \text{ت جا } 300) =$$

$$2\left(\text{جتا}\frac{5\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{5\text{ط}}{3}\right) = \text{هـ}^{\frac{5}{3}\text{ط ت}}$$

(ب) $\text{أ} + \text{ب} = 8 + 6\,\omega^{2} + 2\,\omega = \frac{4\omega}{-\omega^{2}} =$

$$8+6\omega^{2}+6\omega-2\omega^{2}\,4\omega = 8+2\omega+2\omega^{2} = 8-2 = 6$$

$$\therefore (\text{أ}+\text{ب})^{3} = (6)^{3} = 216$$

---

[٤] (أ) $\text{ع} = \frac{2(1+\text{ت})}{-1+\text{ت}} \times \frac{-1-\text{ت}}{-1-\text{ت}} = \frac{-\cancel{2}(1+\text{ت})^{2}}{\cancel{2}} = -2\text{ت}$

$$\text{ع} = 2\left(\text{جتا}\frac{3\text{ط}}{2} + \text{ت جا}\frac{3\text{ط}}{2}\right)$$

نفرض أن

$$\text{س} = \sqrt{\text{ع}} = \text{ع}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[\text{جتا}(270+360\text{ر}) + \text{ت جا}(270+360\text{ر})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\text{جتا}(135+180\text{ر}) + \text{ت جا}(135+180\text{ر})\right] \text{ ، ر} \in \{٠ ، ١\}$$

$$\text{س}_1 = \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{3}{4}\text{ط} + \text{ت جا}\frac{3}{4}\text{ط}\right) = \sqrt{2}\,\text{هـ}^{\frac{3}{4}\text{ط ت}}$$

$$\text{س}_2 = \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{7}{4}\text{ط} + \text{ت جا}\frac{7}{4}\text{ط}\right) = \sqrt{2}\,\text{هـ}^{\frac{7}{4}\text{ط ت}}$$

(ب) الأيمن

$$= (1-\omega^{2}\text{ت})(1-\omega\text{ت}) = 1-\omega^{2}\text{ت}-\omega\text{ت}+\omega^{3}\text{ت}^{2}$$

$$= 1-\text{ت}(\omega^{2}+\omega)+1\times -1 = -\text{ت}\times -1 = \text{ت} = \text{الأيسر}$$

[٥] (أ) الأيمن

$= [١+\omega^٢+\text{ت}][١+\omega+\text{ت}] = [-\omega+\text{ت}][-\omega^٢+\text{ت}]$

$= \omega^٣ - \omega^٢\text{ت} - \omega\text{ت} - ١ =$

$١ - \text{ت}(\omega^٢+\omega) - ١ = -\text{ت} \times -١ = \text{ت} =$ الأيمن

(ب) $\text{ع} = \frac{\sqrt{٣}+\text{ت}}{\sqrt{٣}-\text{ت}} \times \frac{\sqrt{٣}+\text{ت}}{\sqrt{٣}+\text{ت}} =$

$\frac{٣+٢\sqrt{٣}\text{ت}-١}{٤} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$

$|\text{ع}| = \sqrt{\frac{١}{٤}+\frac{٣}{٤}} = ١$ ، $\text{ظا}\,\theta = \sqrt{٣}$ ربع أول $\therefore \theta = \frac{\text{ط}}{٣}$

$\text{ع} = \text{جتا}\frac{\text{ط}}{٣} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٣} = \text{هـ}^{\frac{\text{ط ت}}{٣}}$

نفرض أن

$\text{س} = \sqrt[٣]{\text{ع}} = [\text{جتا}(٦٠^\circ+٣٦٠^\circ\text{ر}) + \text{ت جا}(٦٠^\circ+٣٦٠^\circ\text{ر})]^{\frac{١}{٣}}$

$= \text{جتا}(٢٠^\circ+١٢٠^\circ\text{ر}) + \text{ت جا}(٢٠^\circ+١٢٠^\circ\text{ر})$

حيث $\text{ر} \in \{٠ ، ١ ، ٢\}$

$\text{س}_١ = \text{جتا}\,٢٠^\circ + \text{ت جا}\,٢٠^\circ = \text{جتا}\frac{\text{ط}}{٩} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٩} = \text{هـ}^{\frac{\text{ط ت}}{٩}}$

$\text{س}_٢ = \text{جتا}\,١٤٠^\circ + \text{ت جا}\,١٤٠^\circ = \text{جتا}\frac{٧}{٩}\text{ط} + \text{ت جا}\frac{٧}{٩}\text{ط} = \text{هـ}^{\frac{٧}{٩}\text{ط ت}}$

$\text{س}_٣ = \text{جتا}\,٢٦٠^\circ + \text{ت جا}\,٢٦٠^\circ = \text{جتا}\frac{١٣}{٩}\text{ط} + \text{ت جا}\frac{١٣}{٩}\text{ط} = \text{هـ}^{\frac{١٣}{٩}\text{ط ت}}$

---

[٦] (أ) $|\text{ع}_١| = \sqrt{٤+١٢} = ٤$ ، $\text{ظا}\,\theta_١ = \sqrt{٣}$

ربع أول $\therefore \theta_١ = \frac{\text{ط}}{٣}$

$\text{ع}_١ = ٤\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٣} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٣}\right) = ٤\text{هـ}^{\frac{\text{ط ت}}{٣}}$

$|\text{ع}_٢| = \sqrt{٣+١} = ٢$ ، $\text{ظا}\,\theta_٢ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

ربع أول $\therefore \theta_٢ = \frac{\text{ط}}{٦}$

$\text{ع}_٢ = ٢\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٦} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٦}\right) = ٢\text{هـ}^{\frac{\text{ط ت}}{٦}}$

$\text{ع}_١\text{ع}_٢ = ٨\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٢}\right)$

نفرض أن

$\text{س} = \sqrt[٣]{\text{ع}_١\text{ع}_٢} = ٢[\text{جتا}(٩٠^\circ+٣٦٠^\circ\text{ر}) + \text{ت جا}(٩٠^\circ+٣٦٠^\circ\text{ر})]^{\frac{١}{٣}}$

$= ٢[\text{جتا}(٣٠^\circ+١٢٠^\circ\text{ر}) + \text{ت جا}(٣٠^\circ+١٢٠^\circ\text{ر})]$

حيث $\text{ر} \in \{٠ ، ١ ، ٢\}$

$\text{س}_١ = ٢(\text{جتا}\,٣٠^\circ + \text{ت جا}\,٣٠^\circ) = ٢\text{هـ}^{\frac{\text{ط ت}}{٦}}$

$\text{س}_٢ = ٢(\text{جتا}\,١٥٠^\circ + \text{ت جا}\,١٥٠^\circ) = ٢\text{هـ}^{\frac{٥\text{ط ت}}{٦}}$

$\text{س}_٣ = ٢(\text{جتا}\,٢٧٠^\circ + \text{ت جا}\,٢٧٠^\circ) = ٢\text{هـ}^{\frac{٣}{٢}\text{ط ت}}$

(ب) الأيمن

$= \frac{\omega^٤}{٤\omega^٢+٤\omega+١} + \frac{\omega^٢}{٤\omega^٤+٤\omega^٢+١} = \frac{\omega}{-٤+١} + \frac{\omega^٢}{-٤+١}$

$= \frac{\omega}{-٣} + \frac{\omega^٢}{-٣} = \frac{\omega+\omega^٢}{-٣} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣} =$ الأيسر

---

[٧] (أ) $|\text{ع}_١| = \sqrt{١+٣} = ٢$ ، $\text{ظا}\,\theta = -\sqrt{٣}$

ربع ثانى $\theta = ١٨٠^\circ - ٦٠^\circ = ١٢٠^\circ$

$\text{ع}_١ = ٢(\text{جتا}\,١٢٠^\circ + \text{ت جا}\,١٢٠^\circ) = ٢ \times \text{هـ}^{\frac{٢\text{ط ت}}{٣}}$

$\because \text{ع}_١\text{ع}_٢ = ٨\text{هـ}^{\frac{١١\text{ط ت}}{٣}} \therefore \text{ع}_٢ = \frac{٨\text{هـ}^{\frac{١١\text{ط ت}}{٣}}}{٢\text{هـ}^{\frac{٢\text{ط ت}}{٣}}} = ٤ \times \text{هـ}^{٣\text{ط ت}} = ٤\text{هـ}^{\text{ط ت}}$

نفرض أن

$\text{س} = \sqrt{\text{ع}_٢} = ٢[\text{جتا}(١٨٠^\circ+٣٦٠^\circ\text{ر}) + \text{ت جا}(١٨٠^\circ+٣٦٠^\circ\text{ر})]^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢[\text{جتا}(٩٠^\circ+١٨٠^\circ\text{ر}) + \text{ت جا}(٩٠^\circ+١٨٠^\circ\text{ر})]$

حيث $\text{ر} \in \{٠ ، ١\}$

$$س_1 = 2\left(\text{جتا } 90 + \text{ت جا } 90\right) = 2\left(\text{جتا}\frac{ط}{2} + \text{ت جا}\frac{ط}{2}\right)$$

$$س_2 = 2\left(\text{جتا}\frac{3ط}{2} + \text{ت جا}\frac{3ط}{2}\right)$$

(ب) الأيمن $= \left[1 + 2\omega^2 + \omega\right]\left[1 + 2\omega + \omega^2\right] =$

$\left[\omega^2\right]\left[\omega\right] = \omega^3 = 1 =$ الأيسر

---

[٨] (أ) $ع = \dfrac{\sqrt[3]{2}\left(\text{جتا } 90 + \text{ت جا } 90\right)}{\sqrt[3]{2}\left(\text{جتا } 45 + \text{ت جا } 45\right)} = \text{جتا } 45 + \text{ت جا } 45 = هـ^{\frac{ط ت}{4}}$

نفرض أن

$$س = \sqrt[3]{ع} = \left[\left(\text{جتا}(45 + 360ر)\right) + \text{ت جا}(45 + 360ر)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[\text{جتا}(15 + 120ر) + \text{ت جا}(15 + 120ر)\right]$$

حيث ر $\in$ {٠ ، ١ ، ٢}

$س_1 = \text{جتا } 15 + \text{ت جا } 15 = هـ^{\frac{ط ت}{12}}$

$س_2 = \text{جتا } 135 + \text{ت جا } 135 = هـ^{\frac{3ط ت}{4}}$

$س_3 = \text{جتا } 255 + \text{ت جا } 255 = هـ^{\frac{17ط ت}{12}}$

(ب) الأيمن

$$= \left[\frac{2 + 3\omega^2 - 2 - 3\omega}{(2 + 3\omega)(2 + 3\omega^2)}\right]^2 = \left[\frac{3(\omega^2 - \omega)}{4 + 6\omega + 6\omega^2 + 9\omega^3}\right]^2$$

$$= \left(\frac{3 \times \pm\sqrt{3}\,ت}{7}\right)^2 = \frac{-27}{49} = \text{الأيسر.}$$

---

[٩] $ع = \dfrac{-8}{1 + \sqrt{3}\,ت} \times \dfrac{1 - \sqrt{3}\,ت}{1 - \sqrt{3}\,ت} = \dfrac{-8(1 - \sqrt{3}\,ت)}{4} = -2 + 2\sqrt{3}\,ت$

$|ع| = \sqrt{4 + 12} = 4$ ، $\text{ظا}\,\theta = -\sqrt{3}$

ربع ثاني $\therefore \theta = 120°$

$ع = 4\left(\text{جتا } 120 + \text{ت جا } 120\right) = 4 \times هـ^{\frac{2ط ت}{3}}$

نفرض أن

$$س = \sqrt{ع} = 2\left[\text{جتا}(120 + 360ر) + \text{ت جا}(120 + 360ر)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[\text{جتا}(60 + 180ر) + \text{ت جا}(60 + 180ر)\right]$$

حيث ر $\in$ {٠ ، ١}

$س_1 = 2\left(\text{جتا } 60 + \text{ت جا } 60\right) = 2هـ^{\frac{ط ت}{3}}$

$س_2 = 2\left(\text{جتا } 240 + \text{ت جا } 240\right) = 2هـ^{\frac{4ط ت}{3}}$

---

[١٠] (أ) الأيمن $= \left[\dfrac{1 + \text{جا}\left(\frac{ط}{2} - 2\right) + \text{ت جتا}\left(\frac{ط}{2} - 2\theta\right)}{1 + \text{جا}\left(\frac{ط}{2} - 2\theta\right) - \text{ت جتا}\left(\frac{ط}{2} - 2\theta\right)}\right]^{ن} =$

$$\left[\frac{2\text{جتا}^2\theta + 2\text{ت جا}\theta\,\text{جتا}\theta}{2\text{جتا}^2\theta - 2\text{ت جا}\theta\,\text{جتا}\theta}\right]^{ن}$$

$$= \left[\frac{2\text{جتا}\theta\left(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta\right)}{2\text{جتا}\theta\left(\text{جتا}\theta - \text{ت جا}\theta\right)}\right]^{ن} =$$

$$\left[\frac{\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta}{\text{جتا}(-\theta) + \text{ت جا}(-\theta)}\right]^{ن} = \left(\text{جتا}2\theta + \text{ت جا}2\theta\right)^{ن}$$

$= \text{جتا ن} \times 2\theta + \text{ت جا ن} \times 2\theta \quad \because ي = \frac{ط}{2} - 2\theta \quad \therefore 2\theta = \frac{ط}{2} - ي$

$= \text{جتا ن}\left(\frac{ط}{2} - ي\right) + \text{ت جا ن}\left(\frac{ط}{2} - ي\right) =$ الأيسر.

(ب) $\because \dfrac{1 - 3\omega - 3\omega^2}{1 + 10\omega + 10\omega^2} = \dfrac{1 + 3}{1 - 10} = \dfrac{-4}{9} = \dfrac{4}{9}ت^2$

$\therefore$ الجذرين التربيعيين هما $\pm \frac{2}{3}ت$ $\therefore \frac{2}{3}ت$ هو أحد الجذرين التربيعيين للمقدار المعطى.

---

[١١] (أ) $ع_1 = \dfrac{1 - ع}{1 + ع} \times \dfrac{2}{2} = \dfrac{2 - 2ع}{2 + 2ع} = \dfrac{2 + 1 - \sqrt{3}\,ت}{2 - 1 + \sqrt{3}\,ت} =$

$$\frac{3 - \sqrt{3}\,ت}{1 + \sqrt{3}\,ت} \times \frac{1 - \sqrt{3}\,ت}{1 - \sqrt{3}\,ت}$$

$$ع_1 = \frac{3 - 3\sqrt{3}\,ت - \sqrt{3}\,ت - 3}{4} =$$

$-\sqrt{3}$ ت $= \sqrt{3}$ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠)

نفرض أن

س $= \sqrt[4]{ع} = \sqrt[4]{3}$ [جتا(٢٧٠+٣٦٠ر) + ت جا(٢٧٠+٣٦٠ر)]$^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt[4]{3}$ [جتا(١٣٥+١٨٠ر) + ت جا(١٣٥+١٨٠ر)]

حيث ر ∈ {٠ ، ١}

س$_1$ $= \sqrt[4]{3}$ (جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥) $= \sqrt[4]{3}$ هـ$^{\frac{3ط}{4}ت}$ ،

س$_2$ $= \sqrt[4]{3}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥) $= \sqrt[4]{3} \times$ هـ$^{\frac{7ط}{4}ت}$

(ب) الأيمن $= \left[\frac{5\omega^3 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2\omega^3 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^2$

$= \left[\frac{\omega^2(5\omega - 3)}{(5\omega - 3)} - \frac{\omega(\omega^2 - 7)}{(\omega^2 - 7)}\right]^2$

$= [\omega^2 - \omega]^2 = (\pm\sqrt{3}$ ت$)^2 = -3$

[١٢] |ع$_1$| $= \sqrt{1+3} = 2$ ظا θ$_1$ $= -\sqrt{3}$ ،

ربع رابع ∴ θ$_1$ = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

ع$_1$ = ٢(جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠)

|ع$_2$| $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ، ظا θ$_2$ = ١ ربع أول ∴ θ$_2$ = ٤٥°

∵ ع $= \frac{ع_1}{ع_2} = \sqrt{2}$ (جتا ٢٥٥ + ت جا ٢٥٥) $= \sqrt{2}$ هـ$^{\frac{17ط}{12}ت}$

ع^{12} $= (\sqrt{2})^{12} \times$ هـ$^{17ط ت}$ = ٦٤ هـ$^{ط ت}$ = ٦٤ × −١ = −٦٤ = عدد حقيقي.

[١٣] (أ) بفرض أن ع = أ + ب ت حيث أ ، ب ∈ ح

∴ أ + ب ت + ٢ = ٢ ت (أ + ب ت − ٢)

(أ + ٢) + ب ت = − ب + (أ − ٢) ت ∴ أ + ٢ = − ب ،

أ − ٢ = ب بالجمع ∴ ٢أ = ٠ ∴ أ = ٠ ، ب = − ٢ ∴ ب = − ٢

∴ ع = ٠ − ٢ت ∴ ع = − ٢ت = ٢(جتا $\frac{3ط}{2}$ + ت جا $\frac{3ط}{2}$)

نفرض أن

س $= \sqrt{ع} = \sqrt{2}$ [جتا(٢٧٠+٣٦٠ر) + ت جا(٢٧٠+٣٦٠ر)]$^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2}$ [جتا(١٣٥+١٨٠ر) + ت جا(١٣٥+١٨٠ر)]

حيث ر ∈ {٠ ، ١}

س$_1$ $= \sqrt{2}$ (جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥) $= \sqrt{2}$ هـ$^{\frac{3ط}{4}ت}$

س$_2$ $= \sqrt{2}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥) $= \sqrt{2}$ هـ$^{\frac{7}{4}ط ت}$

(ب) ∵ ل م ن = أ^2 ω^3 + أ ب ω^2 + أ ب ω^4 + ب^2 ω^3 =

أ^2 + أ ب ($\omega^2 + \omega$) + ب^2 = أ^2 − أ ب + ب^2

∴ ل م ن = (أ + ب)(أ^2 − أ ب + ب^2) = أ^3 + ب^3

∴ القيمة $= \frac{ل م ن}{أ^3 + ب^3} = \frac{أ^3 + ب^3}{أ^3 + ب^3} = 1$.

[١٤] (أ) ع $= \frac{\sqrt{3} - ت}{\sqrt{3} + ت} \times \frac{\sqrt{3} - ت}{\sqrt{3} - ت} = \frac{3 - 2\sqrt{3}ت - 1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ت

|ع| $= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ ، ظا θ $= -\sqrt{3}$

ربع رابع ∴ θ = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠

أولاً: المقياس = ١ ، السعة الأساسية = −٦٠° $= -\frac{\pi}{3}$

ثانياً: نفرض

س $= \sqrt[3]{ع} =$ [جتا(٣٠٠+٣٦٠ر) + ت جا(٣٠٠+٣٦٠ر)]$^{\frac{1}{3}}$

= جتا (١٠٠ + ١٢٠ ر) + ت جا (١٠٠ + ١٢٠ ر)

حيث ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢}.

س$_1$ = جتا ١٠٠ + ت جا ١٠٠ = هـ$^{\frac{5}{9}ط ت}$

س$_2$ = جتا ٢٢٠ + ت جا ٢٢٠ = هـ$^{\frac{11}{9}ط ت}$

س$_3$ = جتا ٣٤٠ + ت جا ٣٤٠ = هـ$^{\frac{17}{19}ط ت}$

[١٥] (أ) ع$_1$ = جتا ٣١٥ − ت جا ٣١٥ = جتا ٤٥ + ت جا ٤٥.

، |ع$_2$| $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ، ظا θ$_2$ = −١

ربع ثاني ∴ θ$_2$ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥

ع٢ = √٢ (جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥)

∵ ع = ع١^٢ ع٢^٦ = (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) ×

(√٢)^٦ [جتا ٩٠ + ت جا ٩٠]

= ٨ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) = ٨ هـ^(ط ت)

(ب) المقدار = (ω^{3} + ب ω) / (ω^{2} + ب) + (جـ ω^{2} + ء ω^{3}) / (جـ + ء ω)

= ω (ω^{2} + ب) / (ω^{2} + ب) + ω^{2} (جـ + ء ω) / (جـ + ء ω) = ω + ω^{2} = −١

---

[١٦] (أ) ع = (٥ − ٣√٣ ت) / (١ + ٢√٣ ت) × (١ − ٢√٣ ت) / (١ − ٢√٣ ت) =

(٥ − ١٠√٣ ت − ٣√٣ ت − ١٨) / ١٣

= ١٣ (−١ − √٣ ت) / ١٣ = −١ − √٣ ت.

|ع| = √(١ + ٣) = ٢ ، ظا θ = √٣ ،

ربع ثالث ∴ θ = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠

ع = ٢ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠) = ٢ (جتا ٤/٣ ط + ت جا ٤/٣ ط)

نفرض أن س = √ع

= √٢ [جتا (٢٤٠ + ٣٦٠ر) + ت جا (٢٤٠ + ٣٦٠ر)]^(١/٢)

= √٢ [جتا (١٢٠ + ١٨٠ر) + ت جا (١٢٠ + ١٨٠ر)] ، ر ∈ {٠ ، ١}

س١ = √٢ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠) = √٢ هـ^(٢ط ت/٣) ،

س٢ = √٢ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠) = √٢ هـ^(٢ط ت/٣) .

(ب)

− أ^٢ / ب^٢ = (١ − ١٠) / (١ + ٣) = − ٩/٤ ∴ أ^٢ / ب^٢ = ٩/٤ ∴ أ / ب = ± ٣/٢

---

[١٧] (أ) ع١ = ٤ (جتا ٣٠٠ − ت جا ٣٠٠)

=(١٤ جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) ، ع٢ = جتا (٩٠) + ت جا (٩٠)

∴ ع = ع٢ / ع١ = ١/٤ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

= ١/٤ (جتا ١/٦ π + ت جا ١/٦ π)

(ب) المقدار = (٢ + ω^{2} − ٢ ω^{2}) (٢ − ω^{2} + ٢ ω^{2}) + ω

= (٢ − ω^{2}) (٢ + ω^{2}) + ω = ٤ − ω^{4} + ω = ٤ .

---

[١٨] (أ) ع١ = ع − ١ = ١/٢ + √٣/٢ ت − ١ =

− ١/٢ + √٣/٢ ت = جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠

ع٢ = ١/٢ + √٣/٢ ت + ١ = ٣/٢ + √٣/٢ ت = √٣ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

ع٢ / ع١ = √٣ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠) / (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠) = √٣ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠)

= √٣ × − ت = − √٣ ت = عدد تخيلى صرف

(ب) نعتبر ω = ω أ، ω = ω^{2}

∴ المقدار = ω^{8} + ω^{4} + ٥ أ، المقدار = ω^{16} + ω^{8} + ٥

= ω^{2} + ω + ٥ = ٤ = ω + ω^{2} + ٥ = ٤

∴ المقدار دائماً = ٤ .

---

[١٩] (أ) ع١ = ٦ (جتا − ١٢٠ − ت جا ١٢٠) =

٦ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

ع٢ = ٢ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠) ∵ ع = ع١ ع٢^٢

=٦ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠) × ٤ (جتا ٦٠٠ + ت جا ٦٠٠)

= ٢٤ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠) = (جتا ٢ط/٣ + ت جا ٢ط/٣) ٢٤

(ب) مجموع الجذرين

= ω^{4} / (١ + ٣ω + ٣ω^{2}) + ω^{2} / (١ + ٣ω^{2} + ٣ω) = ω / −٣ + ω^{2} / −٣ = ١/٣

حاصل ضرب الجذرين = ω / −٣ × ω^{2} / −٣ = ١/٩

∵ المعادلة هى س^٢ − مجموع الجذرين × س + حاصل ضرب الجذرين = صفر

∴ هى س^٢ − ١/٣ س + ١/٩ = ٠ بالضرب × ٩

∴ المعادلة هى : ٩ س^٢ − ٣ س + ١ = صفر

[20] (أ) ع = $\frac{2(5-3\sqrt{3}ت)}{(1+2\sqrt{3}ت)} \times \frac{(1-2\sqrt{3}ت)}{(1-2\sqrt{3}ت)} =$

$= \frac{2(5-10\sqrt{3}ت-3\sqrt{3}ت-18)}{13} = \frac{2\times13(-1-\sqrt{3}ت)}{13}$

ع = $-2-2\sqrt{3}$ت ∴ $|ع| = \sqrt{4+12} = 4$ ،

ظا$\theta = \sqrt{3}$ ، ربع ثالث ∴ $\theta = 180+60 = 240$

∴ ع = 4 (جتا 240 + ت جا 240) = 4$\left(جتا\frac{4ط}{3} + ت جا\frac{4ط}{3}\right)$

نفرض أن س = $\sqrt{ع}$ = 2[جتا(240+360ر)+ت جا(240+360ر)]$^{\frac{1}{2}}$

= 2 [جتا (120 + 180 ر) + ت جا (120 + 180ر)]

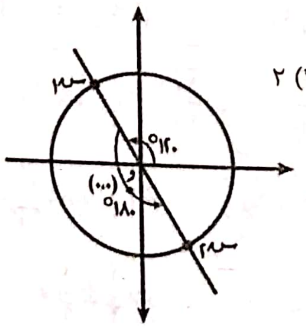
حيث ر ∈ {0 ، 1}

∴ $س_1$ = 2 (جتا120+ت جا 120) = 2 (جتا $\frac{2ط}{3}$ +ت جا $\frac{2ط}{3}$)

= 2 هـ$^{\frac{2ط ت}{3}}$

$س_2$ = 2 (جتا 300 + ت جا 300) 2

× هـ$^{\frac{2ط ت}{5}}$



للتمثيل على شكل أرجاند:

نرسم دائرة مركزها (0 ، 0)

وطول نصف قطرها = 2 وحدة

(ب) المقدار = $\left[\frac{\omega^3 س + \omega ص}{\omega^2 س + ص} - \frac{\omega^3 ص + \omega^2 س}{\omega ص + س}\right]^4$

$= \left[\frac{\omega(\omega^2 س + ص)}{(\omega^2 س + ص)} - \frac{\omega^2(\omega ص + س)}{(\omega ص + س)}\right]^4$

$= \left[\omega - \omega^2\right]^4 = \left[\pm\sqrt{3}ت\right]^4 = 3^2 ت^4 = 9.$

[21] (أ) س = $\frac{4}{(\sqrt{3}+ت)} \times \frac{\sqrt{3}-ت}{(\sqrt{3}-ت)} =$

$= \frac{\cancel{4}(\sqrt{3}-ت)}{\cancel{4}} = \sqrt{3}-ت$ ....(1)

ص = $\frac{2}{جتا 30 - ت جا 30} = \frac{2(جتا 0 + ت جا 0)}{جتا(-30) + ت جا(-30)}$

= 2 (جتا 30 + ت جا 30) = 2 ($\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ت) = $\sqrt{3}$ + ت .... (2)

من (1) ، (2) ∴ س ، ص عددان مركبان مترافقان.

ع = س^2 -2 س ص + ص^2 = (س - ص)^2 = ($\sqrt{3}$ -ت- $\sqrt{3}$ -ت)^2

= (-2 ت)^2 = 4 ت^2 = -4 = 4 (جتا 180 + ت جا 180)

نفرض أن س = $\sqrt[3]{ع}$ =

$\sqrt[3]{4}$ [جتا (180 + 360 ر)+ت جا (180 + 360 ر)]$^{\frac{1}{3}}$

= $\sqrt[3]{4}$ [جتا (60 + 120ر) + ت جا (60 + 120ر)]

حيث ر ∈ {0 ، 1 ، 2}

$س_1$ = $\sqrt[3]{4}$ (جتا $\frac{ط}{3}$ + ت جا $\frac{ط}{3}$) = $\sqrt[3]{4}$ هـ$^{\frac{ط ت}{3}}$ ،

$س_2$ = $\sqrt[3]{4}$ (جتا ط + ت جا ط) = $\sqrt[3]{4}$ هـ$^{ط ت}$،

$س_3$ = $\sqrt[3]{4}$ (جتا $\frac{5ط}{3}$ + ت جا $\frac{5ط}{3}$) = $\sqrt[3]{4}$ هـ$^{\frac{5ط ت}{3}}$

(ب) المقدار = $\left[ل - \frac{ل-1}{-\omega^2} + (ل+1)\omega^2\right]^8$

$= \left[ل + ل\omega - \omega + ل\omega^2 + \omega^2\right]^8$

$= \left[ل + ل(\omega + \omega^2) + \omega^2 - \omega\right]^8 = \left[ل - ل + \omega^2 - \omega\right]^8$

$= (\omega^2 - \omega)^8 = \left[\pm\sqrt{3}ت\right]^8 = 81.$

[22] (أ) ع = $\frac{1+\sqrt{3}ت}{1+ت} = \frac{2(جتا 60 + ت جا 60)}{\sqrt{2}(جتا 45 + ت جا 45)}$

ع = $\sqrt{2}$ [جتا 15 + ت جا 15]

= $\sqrt{2}$ [جتا $\frac{ط}{12}$ + ت جا $\frac{ط}{12}$]

نفرض أن

س = $\sqrt{ع}$ = $\sqrt[4]{2}$ [جتا(15+360ر) + ت جا(15+360ر)]$^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt[4]{2}\left[\text{جتا}\left(\frac{15}{2}+180\,\text{ر}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{15}{2}+180\,\text{ر}\right)\right]$$

حيث ر ∈ {٠ ، ١}

$$\text{س}_1 = \sqrt[4]{2}\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{24}+\text{ت جا}\frac{\text{ط}}{24}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ط ت}}{24}}$$

$$\text{س}_2 = \sqrt[4]{2}\left(\text{جتا}\frac{25\text{ط}}{24}+\text{ت جا}\frac{25\text{ط}}{24}\right) = \sqrt[4]{2}\,\text{هـ}^{\frac{25\text{ط ت}}{24}}$$

(ب) القيمة $= \left[\frac{6\omega^3-7\omega^2}{6\omega-7}-\frac{3\omega^3-5\omega}{3\omega^2-5}\right]^8$

$$= \left[\frac{(6\omega^2-7)}{6\omega-7}-\frac{\omega(3\omega^2-5)}{(3\omega^2-5)}\right]^8$$

$$= \left[\omega^2-\omega\right]^8 = \left[\pm\sqrt{3}\,\text{ب}\right]^8 = 81 .$$

[٢٣] (أ) سبق حلها في نمرة (١) (أ)

(ب) الأيمن $= \left[\frac{1+\omega^2\text{ت}-(\text{ت}+\omega)(1+\omega\text{ت})}{(1+\omega\text{ت})(1+\omega^2\text{ت})}\right]^8$

$$= \left[\frac{1+\omega^2\text{ت}-\text{ت}-\omega+\omega-\omega^2\text{ت}}{1+\omega\text{ت}+\omega^2\text{ت}+\omega^3\text{ت}^2}\right]^8$$

$$= \left[\frac{1-\text{ت}}{1+\text{ت}(\omega+\omega^2)-1}\right]^8$$

$$= \left(\frac{1-\text{ت}}{-\text{ت}}\times\frac{\text{ت}}{\text{ت}}\right)^8$$

$$= \left(\frac{1+\text{ت}}{1}\right)^8 = \left[(1+\text{ت})^2\right]^4 = (2\text{ت})^4 = 16 = \text{الأيسر}$$

[٢٤] $\text{ع}_1 = 1+\sqrt{3}\,\text{ت} = 2(\text{جتا }60+\text{ت جا }60)$

$\text{ع}_2 = \text{جتا }30 - \text{ت جا }30$

$= [\text{جتا}(-30)+\text{ت جا}(-30)]$

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = 2(\text{جتا }90+\text{ت جا }90) = 2\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{2}+\text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2}\right)$$

$$= 2\,\text{هـ}^{\frac{\text{ط ت}}{2}}$$

حلول اختبارات كتاب لامي على الأعداد المركبة

الإختبار الأول

[١] (أ) (١) $|-6+8\text{ت}| = \sqrt{36+64} = 10$

(٢) $= \text{هـ}^3 \times \text{هـ}^{\frac{2}{3}\text{ط ت}} = \text{هـ}^3(\text{جتا }120+\text{ت جا }120)$

(ب) (١) ع = −٣ + ٢ت المرافق هو −٣ − ٢ت

الجواب (جـ) لأن (جـ) = −٣ − ٢ت .

(٢) $\bar{\text{ع}} = \text{جتا}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \text{هـ}^{-\frac{\pi}{3}\text{ت}}$. الجواب(أ)

[٢] (أ) (١) $\text{أ}+\text{ب ت} = \frac{(1-\text{ت})^{10}(1-\text{ت})}{((1+\text{ت})^2)^4} =$

$$= \frac{(-2\text{ت})^5(1-\text{ت})}{(2\text{ت})^4} = \frac{-32\text{ت}(1-\text{ت})}{16}$$

= −٢ت (١ − ت) + −٢ت + ٢ت² = −٢ − ٢ت

أ = −٢ ، ب = −٢

(٢) $\text{أ}+\text{ب ت} = \sqrt{\frac{1}{2}\text{ت}} = \sqrt{\frac{1}{4}\times 2\text{ت}} =$

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\text{ت})^2} = \pm\frac{1}{2}(1+\text{ت})$$

$= \pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\text{ت}$ ∴ $\text{أ} = \pm\frac{1}{2}$ ، $\text{ب} = \pm\frac{1}{2}$.

(ب)

$$\text{ع} = \left[\frac{4(\text{جتا }30+\text{ت جا }30)}{\text{جتا }90+\text{ت جا }90}\right]^2 = \left[4(\text{جتا }300+\text{ت جا }300)\right]^2$$

= ١٦ (جتا ٦٠٠ + ت جا ٦٠٠) = ١٦ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

$$= 16\left(\text{جتا}\frac{4}{3}\text{ط}+\text{ت جا}\frac{4}{3}\text{ط}\right) = 16\,\text{هـ}^{\frac{4}{3}\text{ط ت}}$$

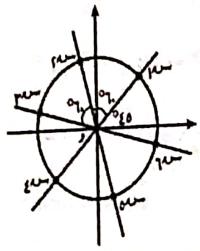
[٣] (أ) (١) $\text{س}^6 = -\text{ت} = \text{جتا }270+\text{ت جا }270$

$$\text{س} = [\text{جتا}(270+360\,\text{ر})+\text{ت جا}(270+360\,\text{ر})]^{\frac{1}{6}}$$

= جتا (٤٥ + ٦٠ ر) + ت جا (٤٥ + ٦٠ ر)

حيث ر ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}.

$س_1$ = جتا٤٥ + ت جا٤٥	نرسم دائرة
$س_2$ = جتا١٠٥ + ت جا١٠٥	مركزها (٠، ٠)
$س_3$ = جتا١٦٥ + ت جا١٦٥	وطول نصف
$س_4$ = جتا٢٢٥ + ت جا٢٢٥	قطرها = |س| = ١
$س_5$ = جتا٢٨٥ + ت جا٢٨٥	والتمثيل كما
$س_6$ = جتا٣٤٥ + ت جا٣٤٥	بالشكل
التمثيل على شكل أرجاند:	لاحظ طول نصف قطر الدائرة = |س| = ١



(٢) س = $\left[\dfrac{٢(جتا٠ + ت جا٠)}{٢(جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)}\right]^{\frac{٣}{٥}}$ =

$\left[١ \times (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)\right]^{\frac{٣}{٥}}$

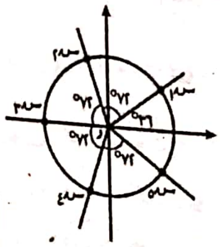
س = $(جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠)^{\frac{١}{٥}}$

= $\left[جتا(١٨٠ + ٣٦٠ر) + ت جا(١٨٠ + ٣٦٠ر)\right]^{\frac{١}{٥}}$

= جتا (٣٦ + ٧٢ ر) = ت جا (٣٦ + ٧٢ر) حيث

ر ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

$س_1$ = جتا٣٦ + ت جا٣٦	تمثيل الأعداد:
$س_2$ = جتا١٠٨ + ت جا١٠٨	لاحظ:
$س_3$ = جتا١٨٠ + ت جا١٨٠	طول نصف
$س_4$ = جتا٢٥٢ + ت جا٢٥٢	قطر الدائرة
$س_5$ = جتا٣٢٤ + ت جا٣٢٤	= |س| = ١



التمثيل على شكل أرجاند كما بالشكل

(ب) (١)

الأيمن = $[١ + ω^2 - ٢ω^2][١ - ω^2 + ٢ω^2] + ω$

= $[١ - ω^2][١ + ω^2] + ω^2 = ١ - ω^4 + ω$

= $١ - ω + ω = ١$ = الأيسر

(٢) نفرض العدد الأول = أ = ٨ − ٣ω − ٥ − ٥ω = ٣ − ٨ω

، العدد الثاني = ب = ١٠ + ١ + ω + ٧ω = ١١ + ٨ω

∵ أ + ب = ٣ − ٨ω + ١١ + ٨ω = ١٤ = عدد حقيقي،

أ × ب = (٣ − ٨ω)(١١ + ٨ω) = ٣٣ − ٦٤ω − ٦٤$ω^2$

= ٣٣ − ٦٤ω + ٦٤ + ٦٤ω = ٩٧ = عدد حقيقي موجب

∵ العددان مركبان مترافقان لأن مجموعهما حقيقي وحاصل ضربهما عدد حقيقي موجب،

∵ المعادلة التربيعية في س ص

$س^2$ − مجموع الجذرين × س + حاصل ضرب الجذرين = صفر

∴ هي $س^2$ − ١٤ س + ٩٧ = ٠

الاختبار الثاني

[١] (أ) ع = $هـ^{٢ - \frac{٥}{٣}\pi ت} = هـ^2 \times هـ^{-\frac{٥}{٣}\pi ت}$

= $هـ^2$ [جتا (−٣٠٠) + ت جا (−٣٠٠)]

= $هـ^2$ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) = $هـ^2$ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

(١) |ع| = $هـ^2$ ، (٢) السعة الأساسية = $\frac{\pi}{٣}$.

(ب) (١) العدد ١ + ω مرافقه هو ١ + $ω^2$ الجواب (ب)

(٢) ع = $\frac{١}{٢جاهـ}$ [٢ جاهـ جتاهـ + ٢ ت $جا^2$ هـ]

= جتا هـ + ت جا هـ

المقياس س = ١ الجواب (جـ).

[٢] (أ)

$\dfrac{(س + ت ص)(١ - ت) + (س - ت ص)(٢ + ٢ت)}{٢(١ + ت)(١ - ت)} = -٦ + ٢ت$

∴ $\dfrac{س - ت س + ت ص + ص + ٢س + ٢ت س - ٢ت ص + ٢ص}{٤} = -٦ + ٢ت$

(٣ س + ٣ ص) + (س − ص) ت = − ٢٤ + ٨ ت

٣ (س + ص) = − ٢٤   س + ص = − ٨   (١)

، س − ص = ٨   (٢)

جمع (١)، (٢): ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∴ ص = − ٨

العدد ع = س − ت ص = ٠ − ت × −٨ = ٨ ت

ع = ٨ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

$ع^{\frac{1}{3}}$ =٢[جتا (٩٠ + ٣٦٠ ر) + ت جا (٩٠ + ٣٦٠ ر)]$^{\frac{1}{3}}$

= ٢ [جتا (٣٠ + ١٢٠ ر) + ت جا (٣٠ + ١٢٠ ر)]

حيث ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢}

القيمة الأولى = ٢ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠) = ٢ هـ$^{\frac{\pi}{6}ت}$

القيمة الثانية = ٢ (جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠) = ٢ هـ$^{\frac{5\pi}{6}ت}$

القيمة الثالثة = ٢ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠) = ٢ هـ$^{\frac{3}{2}\pi ت}$

(ب) ∵ $\frac{1}{1+\omega} = \frac{1}{-\omega^2} = -\omega$ ، $\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{-\omega} = -\omega^2$

المجموع= - ω - ω^2 =١= مجموع جذرى المعادلة س^2-س+ ١= ٠

، حاصل الضرب = - ω × - ω^2 = ١ = حاصل ضرب جذرى المعادلة

∴ $\frac{1}{1+\omega}$ ، $\frac{1}{1+\omega^2}$ هما جذرا المعادلة س^2 - س + ١ = ٠

---

[٣] (أ) (١)

الأيمن = $[1+\omega+\omega^2]^2 + (6+7\omega+6\omega^2)^2 - \left(\frac{1+3ت}{3-ت}\right)^2$

$= [(1+\omega+\omega^2)+\omega^2]^2 + [6(1+\omega+\omega^2)+\omega]^2$

$- \left[\frac{1+3ت}{3-ت} \times \frac{3+ت}{3+ت}\right]^2$

= (٠ + ω^2)^2 + (٦ × صفر + ω)^2 - $\left(\frac{3+10ت-3}{10}\right)^2$

= ω^4 + ω^2 - (ت)^2 = ω + ω^2 + ١ = صفر = الأيسر

(٢) ∵ المعادلة التربيعين معاملاتها حقيقية والمعادلة هى

س^2 - مجموع الجذرين × س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∵ مجموع الجذرين = عدد حقيقى، حاصل ضربهما= عدد حقيقى موجب

، ∵ أحد الجذرين = ٢هـ$^{\frac{2}{3}\pi ت}$ = ٢ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

= ٢$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)$ = -١+ $\sqrt{3}$ت

∴ الجذر الآخر هو مرافق الأول = - ١ - $\sqrt{3}$ ت

، ∵ مجموع الجذرين = - ٢ وحاصل ضربهما = ١ + ٣ = ٤

∴ المعادلة هى: س^2 + ٢ س + ٤ = صفر

(ب) ع$_1$ = جتا ٣١٥ - ت جا ٣١٥ = جتا ٤٥ + ت جا ٤٥

، |ع$_2$| = $\sqrt{4+12}$ = ٤ ، ظاθ = $\frac{-2\sqrt{3}}{-2}$ = $\sqrt{3}$،

ربع ثالث θ = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠

∴ ع$_2$ = ٤ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

، ع$_3$ = جا ٦٠ + ت جتا ٦٠ = جتا ٣٠ + ت جا ٣٠

، ∵ ع = $\frac{ع_1^4 \times ع_2}{ع_3^5}$

∴ ع = $\frac{(جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)^4 \times ٤(جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)}{(جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)^5}$

∴ ع = $\frac{٤(جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) \times (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)}{جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠}$

ع = ٤ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠) ∴ مقياس ع = ٤ ، سعةع = $\frac{2ط}{3}$

نفرض س= $ع^{\frac{1}{2}}$ =٢[جتا(١٢٠+٣٦٠ر)+ت جا (١٢٠ + ٣٦٠ر)]$^{\frac{1}{2}}$

= ٢ [جتا (٦٠ + ١٨٠ر) + ت جا (٦٠ + ١٨٠ر)]

حيث ر ∈ {٠ ، ١}

س$_1$ = ٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

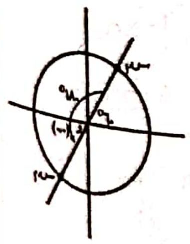
س$_2$ = ٢ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

التمثيل على شكل أرجاند :

نرسم دائرة مركزها (٠ ، ٠)

وطول نصف قطرها ٢ = وحدة

كما بالشكل الآ .



إجابـات الوحدة الثالثة

المحددات والمصفوفات

تمارين (٤) المحددات

المجموعة الأولى :

أ) أكمل ما يأ . :

١) ١٨ - ٢٠ = -٢

٢) ٢ لو$_{س}$ س + ١٥ = ١٧ ∴ لو$_{س}$ س = ١ ∴ س = ٣

٣) جتا^{٢} أ + جا^{٢} أ = ١

٤) ٣ (٤ - ٣) = ٣

٥) س^{٢} + ٨ + ٢٨ - ١٠ = ٣٥ ∵ س^{٢} = ٩ ∴ س = ± ٣

٦) ٣ س + ص = جـ$_{١}$ .... (١) ، س - ٢ ص = جـ$_{٢}$ .... (٢)

س=١، ص=٣ ∴ من(١) جـ$_{١}$=٦ ، من(٢) جـ$_{٢}$=-٥

ب) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) ص$_{١}$ - ص$_{٣}$ ∴ $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٤ & ٤ \\ ١١٦ & ١١٧ & ١١٨ \end{vmatrix}$ = صفر

٢) ص$_{١}$ - ص$_{٣}$ ∴ $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٥ \\ ١١٨ & ١١٥ & ١١٣ \end{vmatrix}$ = صفر

٣) ص$_{١}$ - ٣ ص$_{٢}$ ∴ المحدد = ٤ $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ س & ص & ع \\ ل & م & ن \end{vmatrix}$ = ٤ × ١٠ = ٤٠

٤) أ = ٨ ، ب = ١ ∴ المحدد = لو$_{٢}$ ٨ + لو$_{٢}$ ١ = ٣ + ٠ = ٣

٥) - ٢ × ٢ × ١٠ = - ٤٠

٦) ص$_{١}$ - ٧ ص$_{٢}$ ∴ المحدد = ٣

٧) س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

٨) ١(س - ١)(س^{٢}+ س+١) = ٥ ∴ س^{٣} - ١ = ٥ ∴ س^{٣} = ٦

٩) س^{٣} - ١ = ٧ ∴ س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

١٠) ٤ س^{٢} = ٦ (٦ - ٠) ∴ س^{٢} = ٩ ∴ س ∋ {٣ ، -٣}

١١) لا تتغير

١٢) ٢ (٦ + ك) - ٠ = ٠ ∴ ك = -٦

المجموعة الثانية :

إجابات إيجاد قيمة المحدد بالتعريف

(١) (أ) المحدد = ٣ (-١٠ - ١٢) + ١ × ١ (٠ + ٨) + صفر = -٦٦ + ٨ = -٥٨

(ب) المحدد = صفر - ١ × (صفر - ٢٠) + ٢ × ٢ (١٨ - ٠) = ٢٠ + ٣٦ = ٥٦

(٢) (٢ سـ - ١) (سـ + ٢) - صفر = س^{٢} + ٢س

∴ ٢ س^{٢} + ٣س - ٢ = س^{٢} + ٢س

∴ س^{٢} + سـ - ٢ = ٠ ∴ (سـ + ٢) (سـ - ١) = ٠

∴ سـ = - ٢ أ, سـ = ١

(٣) المعادلة هي :

س (س^{٢} - صفر) - صفر - س^{٢} (صفر - ١) = صفر

أ, س^{٣} + س^{٢} = ٠ أي س^{٢} (سـ + ١) = صفر

∴ سـ = صفر أ, سـ = -١

إجابات خواص المحددات

(١) (أ) باستخدام عوامل ص$_{٢}$ ∴ المحدد = ١ (٣٥ - ١٥) = ٢٠

(ب) باستخدام عوامل ص$_{٢}$ ∴ المحدد = -٧ (٦ - ٧) = ٧

(٢)

(أ) المحدد الأول =(-١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$ = -١ × صفر = صفر لأن ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

(ب) المحدد الثاني = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١١ \\ ١ & ١ & ١٤ \\ ١ & ١ & ١٧ \end{vmatrix}$ بإيجاد ع$_{٢}$ - ع$_{٣}$ ثم ع$_{٢}$ - ع$_{١}$ = صفر لأن عَ$_{٢}$ = عَ$_{٣}$

(٣)

(أ)المحدد الأول=(-١) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ -١ & -١ & ١ \\ -١ & -١ & ١ \end{vmatrix}$ = -١ × صفر = صفر لأن ص$_{٢}$ = ص$_{٣}$

(ب) المحدد الثاني = $\begin{vmatrix} ١٤ & ١٢ & ١١ \\ ٣ & ١ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ بإيجاد ص$_{٣}$ - ص$_{٢}$ ثم ص$_{٢}$ - ص$_{١}$ = صفر لأن صَ$_{٢}$ =صَ$_{٣}$

(٤) (أ) المحدد الأول بالصورة المثلثية :

∴ قيمته = ٣ × -٥ × -٢ = ٣٠

(ب)

والمحدد الثاني=ب حـ $\begin{vmatrix} ٠ & أ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ء & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر لأن ع$_{١}$ = ع$_{٣}$

(٥) (أ)

المحدد الأول = $\begin{vmatrix} ٦ & ٧ & ٣ \\ ٨ & ٠ & ٤ \\ ٤ & ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ بإيجاد ع٣ − ع٢ = صفر لأن ع٣ = ٢ع١

(ب) بفرض أن قيمة المحدد = م

∴ م = (−١) (−١) (−١) $\begin{vmatrix} ٧ & -٥ & ٠ \\ -١١ & ٠ & ٥ \\ ٠ & ١١ & -٧ \end{vmatrix}$ بأخذ (−١) مشترك من كل صف

∴ م = −١ × $\begin{vmatrix} -٧ & ٥ & ٠ \\ ١١ & ٠ & -٥ \\ ٠ & -١١ & ٧ \end{vmatrix}$ قيمة المحدد لا تتغير إذا بدلت الصفوف بالأعمدة

∴ م = −م ∴ ٢م = صفر ∴ م = صفر

(٦) بالنسبة للمحدد الأول نوجد ص١ + ٢ص٢ ، ص٢ − ٥ص٣

∴ قيمة المحدد = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ -٧ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$ = ١ × (٦ + ٢) = ٨ بالفك بالعمود الأول

بالنسبة للمحدد الثاني نوجد ع٢ − ع١ ، ع٣ − ع١

∴ المحدد = $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٥ & ١ & ٤ \\ ٦٥ & ٩ & ١٦ \end{vmatrix}$ وبالفك بالصف الأول = ٦٥ − ٤٥ = ٢٠

(٧)

المحدد الأول = $\begin{vmatrix} ٥ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٧ & ٧ & ٦ \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} -١ & ٥ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٧ & ٦ \end{vmatrix}$

وفيه المحدد الأول = صفر لأن ع٢ = ع٣

والثا. = $\begin{vmatrix} ٢ن & ٢م & ٢ل \\ ن & م & ل \\ حـ & ب & أ \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} ٣ & -٥ & ١ \\ ن & م & ل \\ حـ & ب & أ \end{vmatrix}$

وفيه المحدد الأول = صفر لأن ص١ = ٢ص٢

(٨) بإضافة ع١ إلى ع٢ في محدد الطرف الأيمن ثم أخذ ٢ عامل مشترك من كل من عَ٢ ، عَ٣

∴ المحدد = $\begin{vmatrix} ٦ & ٤ & ١ \\ ٤ & ١٠ & ٣ \\ ٢ & ١٠ & ١١ \end{vmatrix}$ =٤ $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٥ & ١١ \end{vmatrix}$ = الأيسر

(٩) بجعل صفوف المحدد الأيمن أعمدة

∴ الأيمن = $\begin{vmatrix} ١٠ & ٦ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٧ & ١ \end{vmatrix}$ بإيجاد ص٢ + ص٣ $\begin{vmatrix} ١٠ & ٦ & ٢ \\ ٨ & ٨ & ٤ \\ ٣ & ٧ & ١ \end{vmatrix}$

وبأخذ ٢ مشترك من ص١ ، ٤ مشترك من ص٢ = ٨ $\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٧ & ١ \end{vmatrix}$

(١٠) بأخذ ٣ عامل مشترك من ص٢ ، ٢ مشترك من ع٣

∴ المحدد الأيمن = ٣ × ٢ $\begin{vmatrix} -٤ & ٤ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ -٤ & ٤ & ١٢ \end{vmatrix}$ وبإيجاد ع٢ + ع٣

∴ المحدد الأيمن = ٦ $\begin{vmatrix} ٠ & ٤ & ٧ \\ ٥ & ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ & ١٢ \end{vmatrix}$ = ٦×٤ $\begin{vmatrix} ٠ & ٤ & ٧ \\ ٥ & ٣ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$

= ٢٤ $\begin{vmatrix} ٠ & ٤ & ٣ \\ ٥ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = الأيسر وذلك بطرح العمود الثاني من العمود الأول

(١١) (أ) بإيجاد ع٢ − ع١ ∴ م = $\begin{vmatrix} ٢ & -٢ء & أ \\ ٥ & -٥ء & ب \\ ٨ & -٨ء & حـ \end{vmatrix}$ = −ء $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ & أ \\ ٥ & ٥ & ب \\ ٨ & ٨ & حـ \end{vmatrix}$

= −ء × صفر = صفر لأن ع٢ = ع٣

(ب) بإيجاد ص٣ − ص١ ∴ م = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ حـ & ب & أ \\ س & س & س \end{vmatrix}$ = س $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ حـ & ب & أ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

= س × صفر = صفر لأن ص١ = ص٣

(١٢) (أ) بإيجاد ع١ − ع٢ ∴ م = $\begin{vmatrix} ١\ \text{طا}^٢أ & أ-\text{طا}^٢أ & \text{قا}^٢ \\ ١\ \text{طا}^٢ب & ب-\text{طا}^٢ب & \text{قا}^٢ \\ ١\ \text{طا}^٢حـ & حـ-\text{طا}^٢حـ & \text{قا}^٢ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} \text{طا}^٢أ & ١ & ١ \\ \text{طا}^٢ب & ١ & ١ \\ \text{طا}^٢ج & ١ & ١ \end{vmatrix}$

= صفر لأن ع١ = ع٢

(ب) بأخذ أ مشترك من ص١ ∴ المحدد = أ ، ء مشترك من ص٣ = صفر لأن ص١ = ص٣ $\begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ حـ^٢ & ب^٢ & أ^٢ \\ حـ & ب & أ \end{vmatrix}$

(١٣) بجمع ص١ ، ص٢ إلى ص٣

∴ الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٣حـ & ب & ٢أ \\ ١+٢أ+ب+٣حـ & ٢أ+ب+٣حـ+ & ١+٢أ+ب+٣حـ \end{vmatrix}$

= (١+٢أ+ب+٣حـ) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٣حـ & ب & ٢أ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر لأن ص١ = ص٣

(١٤) بإيجاد : ٢ ع٢ − ع١ للطرف الأيمن

$$\text{الأيمن} = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} \text{حتا}^{٢}\text{أ} & ٢\,\text{حتا}^{٢}\text{أ} - ١ & ١ \\ \text{حتا}^{٢}\text{ب} & ٢\,\text{حتا}^{٢}\text{ب} - ١ & ١ \\ \text{حتا}^{٢}\text{حـ} & ٢\,\text{حتا}^{٢}\text{حـ} - ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} \text{حتا ٢أ} & \text{حتا٢أ} & ١ \\ \text{حتا ٢ب} & \text{حتا٢ب} & ١ \\ \text{حتا ٢حـ} & \text{حتا ٢حـ} & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر لأن ع}_٢ = \text{ع}_٣$$

(١٥) بإيجاد ع٢ + ع١

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{ب} - ٥\text{أ} & ٣\text{أ} & +٤\text{أ} \\ \text{حـ} - ٥\text{ب} & ٣\text{ب} & -٤\text{ب} \\ \text{أ} - ٥\text{حـ} & ٣\text{حـ} & -٤\text{حـ} \end{vmatrix}$$

وبأخذ −٤ مشترك من ع١ ، ع مشترك من ع٢

$$= -١٢\begin{vmatrix} \text{ب} - ٥\text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{حـ} - ٥\text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{أ} - ٥\text{حـ} & \text{حـ} & \text{حـ} \end{vmatrix} = -١٢ \times \text{صفر} = \text{صفر لأن ع}_١ = \text{ع}_٢$$

(١٦) بإضافة − ع٢ إلى ع١

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & \text{س} - \text{ص} \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ص}^{٢} & \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} \\ \text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} & \text{ص}^{٣} & \text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س} - \text{ص})\begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & ١ \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ص}^{٢} & \text{س} + \text{ص} \\ \text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} & \text{ص}^{٣} & \text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س} - \text{ص}) \times \text{صفر} = \text{صفر لأن ع}_١ = \text{ع}_٣$$

(١٧) بإيجاد ع٢ + ع١

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢\text{ت} + ١ & ٣ + ٣\text{ت} \\ ١ & ٣\text{ت} - ٢ & ١ + \text{ت} \\ -٣ & ٤\text{ت} - ٧ & -٣ - ٣\text{ت} \end{vmatrix}$$

$$= (١ + \text{ت})\begin{vmatrix} ٣ & ٢\text{ت} + ١ & ٣ \\ ١ & ٣\text{ت} - ٢ & ١ \\ -٣ & ٤\text{ت} - ٧ & -٣ \end{vmatrix} = \text{صفر لأن ع}_١ = \text{ع}_٣$$

(١٨)

$$\text{المحدد الأيمن} = -\begin{vmatrix} \text{س} & \text{و} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{و} \\ \text{و} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

وذلك بتبديل العمودين الأول والثالث

$$= -١ \times -١\begin{vmatrix} \text{و} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{و} \\ \text{س} & \text{و} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

وذلك بتبديل الصفين الأول والثالث = الأيسر

(١٩) باستخدام خاصية الجمع

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ٥٨ & ٥٥ & ٤٨ \\ ٤٦ & ٤٣ & ٣٦ \\ ٢٢ & ١٩ & ١٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٢ & ١٢ & ١٢ \\ ٢٤ & ٢٤ & ٢٤ \\ ٢٢ & ١٩ & ١٢ \end{vmatrix}$$

وذلك بإيجاد ص١ − ص٢ ، ص٢ − ص٣

$$= ٢\begin{vmatrix} ١٢ & ١٢ & ١٢ \\ ١٢ & ١٢ & ١٢ \\ ٢٢ & ١٩ & ١٢ \end{vmatrix} = \text{صفر لأن ص}_٢ = \text{ص}_١$$

(٢٠) بتبديل ع١ ، ع٣ ثم ع٣ ، ع٢ في المحدد الثاني

$$\therefore \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} ٦ & -١ & ٤ \\ -٩ & ٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٣ & -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -٧ \\ ٨ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \text{الثالث}$$

$$= \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٤ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & -٧ & -٢ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٩ & -٤ & ٦ \end{vmatrix}$$

وبتحويل الصفوف إلى أعمدة في المحدد الثاني

$$= \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٤ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٦ & ١ & -٢ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٢ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

= صفر لأن ص١ = ص٣

(٢١) بتبديل ص١ ، ص٣ ثم ص١ ، ص٢ في المحدد الأول وجعل الأعمدة صفوف في المحدد الثاني ∴ المجموع =

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{حـ} + ١ & \text{ب} + ١ & \text{أ} + ١ \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{حـ} - ١ & \text{ب} - ١ & \text{أ} - ١ \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

$$\text{وبالجمع} = \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ ٢\text{حـ} & ٢\text{ب} & ٢\text{أ} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{حـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

(٢٢)

$$\text{الأيمن} = \begin{vmatrix} \omega^{٢} & \text{ت} & ٠ \\ ٠ & -\omega & -\omega^{٢}\text{ت} \\ \omega & -\omega^{٢} & -\omega\,\text{ت} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega^{٢} & \text{ت} & ١ \\ ٠ & -\omega & -\text{ت} \\ \omega & -\omega^{٢} & -\text{ت} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \omega^{٢} & \text{ت} & ١ \\ ٠ & -\omega & -\text{ت}(\omega^{٢} + ١) \\ \omega & -\omega^{٢} & -\text{ت}(\omega + ١) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega^{٢} & \text{ت} & ١ \\ ٠ & -\omega & \omega\,\text{ت} \\ \omega & -\omega^{٢} & \omega^{٢}\text{ت} \end{vmatrix}$$

$$\text{ت} = \begin{vmatrix} \omega^2 & 1 & 1 \\ \cdot & \omega\text{ت} & \omega\text{ت} \\ \omega & \omega^2\text{ت} & \omega^2\text{ت} \end{vmatrix}$$

= ت × صفر = صفر
لأن $ع_1 = ع_2$

(٢٣) نفرض أن قيمة المحدد = م

$$\therefore \text{م} = (-1)(-1)(-1) \begin{vmatrix} -\text{ب} & -\text{أ} & \cdot \\ -\text{ء} & \cdot & \text{أ} \\ \cdot & \text{ء} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

بأخذ -١ مشترك من كل صف

$$\therefore \text{م} = - \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \cdot \\ \text{ء} & \cdot & -\text{أ} \\ \cdot & -\text{ء} & -\text{ب} \end{vmatrix}$$

حيث قيمة المحدد لا تتغير بجعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف

∴ م = -م ∴ ٢م = صفر ∴ م = صفر

(٢٤) في المحدد الأيمن نضرب $ع_1 \times$ أ ، $ع_2 \times$ ب ، $ع_3 \times$ حـ

ونقسم المحدد على أ ب حـ

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{1}{\text{اب جـ}} \begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{حـ}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2 \\ \text{أ ب حـ} & \text{أ ب حـ} & \text{أ ب حـ} \end{vmatrix}$$

وبأخذ أ ب حـ مشترك

$$= \frac{\text{اب جـ}}{\text{اب جـ}} \begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{حـ}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ 1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ 1 & \text{حـ}^2 & \text{حـ} \end{vmatrix}$$

وبتبديل $ع_1$ ، $ع_2$ ثم $ع_2$ ، $ع_3$ =

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{حـ}^2 & \text{حـ} & 1 \end{vmatrix}$$

(٢٥) بضرب $ص_1$ في أ ، $ص_2$ في ب ، $ص_3$ في حـ والقسمة على أ ب حـ

$$\therefore \text{المحدد الأيمن} = \frac{1}{\text{اب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ ب}^2 & \text{أ حـ}^2 & \text{أ ب حـ} \\ \text{ب أ}^2 & \text{أ ب حـ} & \text{ب حـ}^2 \\ \text{أ ب حـ} & \text{حـ أ}^2 & \text{ب}^2\text{ حـ} \end{vmatrix}$$

وبأخذ ب حـ مشترك من $ع_1$ ، حـ أ من $ع_2$ ، أ ب من $ع_3$

$$= \frac{(\text{ب جـ})(\text{جـ ا})(\text{ا ب})}{\text{اب جـ}} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{حـ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{حـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

وبتبديل $ع_1$ ، $ع_2$ ثم $ع_2$ ، $ع_3$

$$= \text{أ ب حـ} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{حـ} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{حـ} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

(٢٦) بإضافة $ع_3$ إلى $ع_2$ ، $-ع_2$ إلى $ع_3$

$$\therefore \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{حا أ} & 2\text{ حتا أ} & 1 \\ \text{حا ب} & 2\text{حتا ب} & 1 \\ \text{حا حـ} & 2\text{حتا حـ} & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{حا أ} & \text{حتا أ} & 1 \\ \text{حا ب} & \text{حتا ب} & 1 \\ \text{حا حـ} & \text{حتا حـ} & 1 \end{vmatrix}$$

(٢٧) بإضافة $ع_1$ إلى $ع_2$

$$\therefore \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{ل} & 2\text{ب س} & \text{أ+ب س} \\ \text{م} & 2\text{ء س} & \text{حـ+ء س} \\ \text{ن} & 2\text{و س} & \text{هـ+و س} \end{vmatrix}$$

وبأخذ ٢ س مشترك بإيجاد $ع_1$ - س$ع_2$

$$= 2\text{ س} \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{م} & \text{ء} & \text{حـ} \\ \text{ن} & \text{و} & \text{هـ} \end{vmatrix}$$

(٢٨) بإضافة $-ع_1$ ، $ع_2$ إلى $ع_3$

$$\therefore \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} 2\text{ أ} & \text{حـ+أ} & \text{ب + حـ} \\ 2\text{ ل} & \text{ن+ل} & \text{م + ن} \\ 2\text{ س} & \text{ع+س} & \text{ص + ع} \end{vmatrix}$$

وبأخذ ٢ مشترك من $ع_3$ وإيجاد $ع_2$ $ع_3$ ثم $ع_1$ - $ع_3$

$$= 2 \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{حـ} & \text{ب} \\ \text{ل} & \text{ن} & \text{م} \\ \text{س} & \text{ع} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

وبتبديل $ع_1$، $ع_2$ = ٢ ثم $ع_2$ ، $ع_3$

$$\begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$$

(٢٩) بإيجاد $-ص_2 + ص_3 + ص_1$ في $ص_1$

$$\text{المحدد الأيمن} = \begin{vmatrix} 2\text{أ} & \cdot & 2\text{حـ} \\ \text{ب} & \text{حـ+أ} & \text{ب} \\ \text{أ+ب} & \text{حـ} & \text{حـ} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{أ} & \cdot & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{حـ + أ} & \text{ب} \\ \text{أ+ب} & \text{حـ} & \text{حـ} \end{vmatrix}$$

وبإيجاد $ص_2 - ص_1 = 2$

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \cdot & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{حـ+أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{حـ} & \cdot \end{vmatrix}$$

وبإيجاد $ص_3 - ص_1 = 2$

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \cdot & \text{حـ} \\ \cdot & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{حـ} & \cdot \end{vmatrix}$$

وبتبديل $ص_2$ ، $ص_3$ = ٢ ثم $ص_2$ ، $ص_1$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{حـ} & \cdot \\ \text{أ} & \cdot & \text{حـ} \end{vmatrix}$$

(٣٠) بجعل الصفوف أعمدة

$$\therefore \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س ع} & \text{ص ع} \\ \text{ع} & \text{ص}^2 & \text{س ص} \\ 1 & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{ع(س+ص)} & \text{ص ع} \\ \text{ع} & \text{ص(ص+س)} & \text{س ص} \\ 1 & \text{(س +ص)} & \text{س} \end{vmatrix}$$

بإضافة ع١ إلى ع٢

$$=(\text{س}+\text{ص})\begin{vmatrix} \text{صع} & \text{ع} & \text{ص} \\ \text{سص} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{١} & \text{١} \end{vmatrix} =(\text{س}+\text{ص})\begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{١} \\ \text{صع} & \text{ع} & \text{ص} \\ \text{سص} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

---

(٣١) بضرب ص٢ × أ ، ص٣ في أ ب والقسمة على أ² ب

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{أ}^{\text{٢}}\text{ب}}\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{٠} \\ \text{أ}^{\text{٢}} & \text{أص} & \text{أب} \\ \text{٠} & \text{أب}^{\text{٢}} & \text{أبع} \end{vmatrix} = \frac{\text{أ}^{\text{٢}}\text{ب}}{\text{أ}^{\text{٢}}\text{ب}}\begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{أ}^{\text{٢}} & \text{ص} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{ب}^{\text{٢}} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

وذلك بأخذ أ مشترك من ع٢ ، أ ب مشترك من ع٣

---

(٣٢) بإيجاد ص٢ − $\frac{١}{٣}$ ص١

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{٣س} & \text{٣ص} & \text{٣ع} \\ \text{٢ل} & \text{٢م} & \text{٢ن} \\ \text{٥ء − ل} & \text{٥هـ − م} & \text{٥و − ن} \end{vmatrix}$$

وبإيجاد ص٣ + $\frac{١}{٢}$ ص٢

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{٢س} & \text{٣ص} & \text{٣ع} \\ \text{٢ ل} & \text{٢م} & \text{٢ ن} \\ \text{٥ء} & \text{٥هـ} & \text{٥و} \end{vmatrix} = \text{٣×٢×٥}\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix}$$

= ٣٠ × ٧ = ٢١٠

---

(٣٣)

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{١٩} & \text{١٠} & \text{٢} \\ \text{١٣} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٢٤} & \text{٩} & \text{٢} \end{vmatrix}$$

وذلك بعد إيجاد ع٢ − ٣ ع١ ، ع٣ − ع١

$$= \begin{vmatrix} \text{-٧} & \text{١٠} & \text{٠} \\ \text{١٣} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{-٢} & \text{٩} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

بإيجاد ص١ − ٢ ص٢ ، ص٣ − ٢ ص٢

= -١ × (-٦٣ + ٢٠) = ٤٣ بالفك بـ ع٣

---

(٣٤)

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{٢٢} & \text{٤} & \text{٠} \\ \text{٢٧} & \text{٤} & \text{-٢} \\ \text{٤٦} & \text{١٨} & \text{١٧} \end{vmatrix}$$

بإيجاد ع٢ − ع١ ، ع٣ − ع١ وبأخذ ٢ مشترك من ع٢ ، إيجاد ع١ − ١١ ع٢

$$= \text{٢}\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٢} & \text{٠} \\ \text{٥} & \text{٢} & \text{-٢} \\ \text{-٥٣} & \text{٩} & \text{١٧} \end{vmatrix}$$

= ٢ × -٢ (٨٥ − ١٠٦)

= -٤ × -٢١ = ٨٤

---

(٣٥) بإيجاد ص٣ − ٢ ص٢ ثم ص٢ − ٢ ص١

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{١٨} & \text{٤٠} & \text{٨٩} \\ \text{٤} & \text{٩} & \text{٢٠} \\ \text{٩} & \text{٢٠} & \text{٤٤} \end{vmatrix}$$

بإيجاد ص١ − ٢ ص٢ =

$$\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٤} & \text{٩} & \text{٢٠} \\ \text{٩} & \text{٢٠} & \text{٤٤} \end{vmatrix}$$

= ٤ × ٢٠ − ٩ × ٩ = -١ بالفك بـ ص١

---

(٣٦) بإيجاد ع٣ − ٢ ع١ للطرف الأيمن

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{س} & \text{٢س + ١} & \text{١} \\ \text{٢س + ١} & \text{٣س − ١} & \text{-٢} \\ \text{٣س − ١} & \text{٤س} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وبإيجاد : ص٢ + ٢ ص١ ، ص٣ − ص١ للطرف الأيمن

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{س} & \text{٢س + ١} & \text{١} \\ \text{٤س + ١} & \text{٧س + ١} & \text{٠} \\ \text{٢س − ١} & \text{٢س − ١} & \text{٠} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وبالفك بالعمود الثالث

∴ (٤ س + ١) (٢ س − ١) − (٢ س − ١) (٧ س + ١) = صفر

ومنها -٦ س² + ٣ س = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = $\frac{١}{٢}$

---

(٣٧) بإضافة − $\frac{١}{٢}$ (ع٢ + ع٣) إلى ع١

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{س + ٨} & \text{٥س+٤} \\ \text{٣س} & \text{٣س+١} & \text{س+٥} \\ \text{٠} & \text{٨س+١} & \text{٤س+٥} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وبفك المحدد بعوامل ع١

∴ [(س + ٨) (٤س + ٥) − (٨س + ١) (٥س + ٤)] × -٣ س = ٠

∴ س = ٠ أ، - ٣٦ س² + ٣٦ = ٠ أي س² = ١ أي س = ∓ ١

---

(٣٨) بإيجاد ص١ − ص٢

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{٢ حا هـ - ١} & \text{١−٢ حا هـ} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{٢ حا هـ} & \text{-١} \\ \text{١} & \text{-١} & \text{٢ حا هـ} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$$\therefore (\text{٢ حاهـ - ١})\begin{vmatrix} \text{١} & \text{-١} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{٢حا هـ} & \text{-١} \\ \text{١} & \text{-١} & \text{٢حاهـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وبإيجاد ع١ + ع٢

$$\therefore (\text{٢ حاهـ - ١})\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{١+٢حاهـ} & \text{-١} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{٢حاهـ} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

وبالفك بعوامل ص١

---

(٣٩) س عامل ∴ قيمة المحدد = صفر عندما س = ٠

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{-٣} & \text{٣} & \text{٣} \\ \text{١} & \text{١} & \text{٣} \\ \text{-١} & \text{٧} & \text{ك} \end{vmatrix}$$

، ع٢ + ع١ = صفر ∴ ، ع٢ + ع١

$$\begin{vmatrix} \text{-٣} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{٢} & \text{٤} \\ \text{-١} & \text{٦} & \text{ك-١} \end{vmatrix}$$

∴ -٣ (٢ ك − ٢ − ٢٤) = ٠ ∴ ك = ١٣

(٤٠) قيمة المحدد = صفر عندما س = ٢

∴ $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٥} & \text{٥} \\ \text{ك} & \text{ك-٤} & \text{ك-٤} \\ \text{١} & \text{ك+١} & \text{١} \end{vmatrix}$ = صفر وبإيجاد ع١ - ع٢ أي $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٥} & \text{٠} \\ \text{ك} & \text{ك-٤} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{ك+١} & \text{-ك} \end{vmatrix}$

∴ -[٥ك - ٣ك + ١٢] = صفر ∴ ل = ٠ أ، ٦-

(٤١) بإيجاد ص١ - ص٢ ، ص٣ - ص٢ ∴ المعادلة هي

$\begin{vmatrix} \text{ص-ص١} & \text{س-س١} & \text{٠} \\ \text{ص١} & \text{س١} & \text{١} \\ \text{ص٢-ص١} & \text{س٢-س١} & \text{٠} \end{vmatrix}$ = ٠ وبالفك بعوامل ع١

∴ (س-س١) (ص٢-ص١)-(س٢-س١) (ص- ص١) = صفر

أي $\frac{\text{ص٢ - ص١}}{\text{س٢ - س١}} = \frac{\text{ص - ص١}}{\text{س - س١}}$ وهي صيغة معادلة المستقيم المار بالنقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢).

(٤٢) بإضافة ع٢ ، ع٣ إلى ع١ نجد أن ١ + ل + م + ن عامل مشترك

∴ المحدد = (١ +ل+ م +ن) $\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{م} & \text{١} \\ \text{ن} & \text{١+م} & \text{١} \\ \text{١+ن} & \text{م} & \text{١} \end{vmatrix}$ وبإيجاد ص٢ - ص١ ، ص٣ - ص١

= (١ + ل + م + ن) $\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{م} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$ وبالفك

= (١ + ل + م + ن) × ١ = ١ + ل + م + ن

(٤٣) بإضافة -ع٢ ، ع٣ إلى ع١ وأخذ (أ + ٢ حـ) عامل مشترك

المحدد = (أ + ٢حـ) $\begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{حـ} & \text{١} \\ \text{حـ} & \text{أ} & \text{١} \\ \text{أ} & \text{حـ} & \text{١} \end{vmatrix}$ وبإيجاد ص٢ - ص١ ، ص٣ - ص١

= (أ + ٢ حـ) $\begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{حـ} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{أ-حـ} & \text{٠} \\ \text{أ-حـ} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$ = (أ + ٢ حـ) (أ - حـ)^{٢}

(٤٤) بإيجاد ص٢ - س ص١ فإن الطرف الأيمن

= $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} & \text{س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س}^{٢} \\ \text{١- س}^{٣} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$ وبالفك بعوامل ص٣

= (١-س^{٣}) [(١- س^{٣}]

= (١- س^{٣})^{٢} = (س^{٣}-١)^{٢}

(٤٥) بإضافة ع٢ إلى ع٣ ثم ع٣ إلى ع١

الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب-حـ} & \text{٢ب-ء} \\ \text{ب} & \text{حـ} & \text{٢ب-ء} \\ \text{٢ ب} & \text{ب-حـ} & \text{٢ب-ء} \end{vmatrix}$

= ب (٢ب-ء) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب-حـ} & \text{١} \\ \text{١} & \text{حـ} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{ب-حـ} & \text{١} \end{vmatrix}$ وبإيجاد ص٣ - ص١ ، ص٢ - ص١

= ب (٢ب-ء) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب-حـ} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٢حـ-ب} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$ = ب (٢ب - ء) × ١ (٢ حـ - ب) × ١

(٤٦) بطرح الصف الثالث من كل من الأول والثاني

∴ المحدد = $\begin{vmatrix} \text{(أ-حـ)} & \text{٠} & \text{ب(حـ-أ)} \\ \text{(ب-حـ)} & \text{٠} & \text{أ (حـ-ب)} \\ \text{حـ} & \text{١} & \text{أ ب} \end{vmatrix}$

وبأخذ (حـ - أ) مشترك من ص١ ، (ب - حـ) مشترك من ص٢

∴ المحدد = (حـ - أ) (ب - حـ) $\begin{vmatrix} \text{١-} & \text{٠} & \text{ب} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{أ -} \\ \text{حـ} & \text{١} & \text{أب} \end{vmatrix}$ وبالفك بالعمود الثاني

∴ المحدد = (حـ - أ) (ب - حـ) × -١ × (ب - أ) = المطلوب

(٤٧) باستخدام نفس خطوات رقم (٤٥) نجد أن المحدد = (حـ - أ)

(ب - حـ) × - [ب (ب + حـ) - أ (أ + حـ)]

= (حـ - أ) (ب - حـ) (-ب^{٢} - ب حـ + أ^{٢} + أ حـ)

= (حـ - أ) (ب - حـ) [(أ - ب) (أ + ب) + حـ (أ - ب)]

= (حـ - أ) (ب - حـ) (أ - ب) (أ + ب + حـ)

(٤٨) بإيجاد ص١ - ص٢ ، ص٢ - ص٣

المحدد = $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{أ-س} & \text{س-أ} \\ \text{ب-س} & \text{س-ب} & \text{٠} \\ \text{س} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$ ، بأخذ (س - أ) مشترك من ص١ ، (س - ب) من ص٢

= (س - أ) (س - ب) $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{١-} & \text{١} \\ \text{١-} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{س} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$ وبإيجاد ع١ + ع٢

∴ (٢ حا هـ - ١) × [٢ حا هـ (١ + ٢ حا هـ) - ٠] = ٠

∴ حا هـ = $\frac{١}{٢}$ أي هـ = $\frac{\text{ط}}{٦}$ أ، $\frac{\text{٥ط}}{٦}$ ، حا هـ = ٠ ∴ هـ = ٠

، حا هـ = $-\frac{١}{٢}$ مرفوض لأن ٠ ≤ هـ ≤ ط

$$= (\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{ب}) \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{١-} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{س} & \text{أ+ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

وبالفك بعوامل ص١

= (س - أ) (س - ب) [س + أ + ب]

(٤٩) بإيجاد ع١ - ع٢ ، ع٣ - ع٢

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{حـ-ب} & \text{ب} & \text{أ-ب} \\ \text{حـ}^٢\text{-ب}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{أ}^٢\text{-ب}^٢ \\ \text{أ(ب-حـ)} & \text{حـ أ} & \text{حـ(ب-أ)} \end{vmatrix}$$

، بأخذ (أ - ب) مشترك من ع١ ، حـ - ب من ع٣

$$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{حـ} - \text{ب}) \begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب} & \text{١} \\ \text{حـ+ب} & \text{ب}^٢ & \text{أ+ب} \\ \text{-أ} & \text{حـ أ} & \text{-حـ} \end{vmatrix}$$

وبإيجاد ع٢ - ع١ ، ع٣ - ب ع١

$$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{حـ} - \text{ب}) \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{حـ-أ} & \text{-أب} & \text{أ+ب} \\ \text{حـ-أ} & \text{حـأ+ب حـ} & \text{-حـ} \end{vmatrix}$$

وبأخذ حـ - أ مشترك

$$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{حـ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{حـ}) \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{-أ} & \text{-أب} & \text{أ+ب} \\ \text{-١} & \text{حـأ+ب حـ} & \text{-حـ} \end{vmatrix}$$

= (أ - ب) (حـ - ب) (أ - حـ) [أ ب + حـ أ + ب حـ]

(٥٠) بإيجاد ص١ + ص٢ + ص٣ نجد (أ + ب + حـ) عامل مشترك في ص١

$$\therefore \text{المحدد} = (\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ}) \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٢ب} & \text{ب-حـ-أ} & \text{٢ب} \\ \text{حـ-أ-ب} & \text{٢ حـ} & \text{٢ حـ} \end{vmatrix}$$

وبإيجاد ع٢ - ع١ ، ع٣ - ع١

$$\therefore \text{المحدد} = (\text{أ+ب+حـ}) \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{-(أ+ب+حـ)} & \text{٢ ب} \\ \text{-(أ+ب+حـ)} & \text{٠} & \text{٢ حـ} \end{vmatrix}$$

= (أ + ب + حـ) × ١ × - (أ + ب + حـ) × - (أ + ب + حـ)

(٥١) بإضافة ص٢ ، ص٣ إلى ص١ نجد أن ٢ (س - ص) مشترك

$$= ٢(\text{س} - \text{ص}) \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{س} & \text{س-ص} & \text{-ص} \\ \text{-ص} & \text{س} & \text{س-ص} \end{vmatrix}$$

وبإيجاد ع٢ - ع١ ، ع٣ - ع١

$$= ٢(\text{س} - \text{ص}) \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{س+ص} & \text{س} & \text{-ص} \\ \text{-س} & \text{ص} & \text{س-ص} \end{vmatrix}$$

= ٢ (س - ص) × -س^٢ -س ص- ص^٢

= ٢ (ص - س) (ص^٢ + س ص + س^٢) = ٢ (ص^٣ - س^٣)

(٥٢) بإيجاد ع١ - ع٢

$$\text{الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{حـ+١} & \text{ب+١} & \text{أ-حـ} \\ \text{أ+٣} & \text{٣} & \text{حـ-أ} \\ \text{أ+حـ} & \text{ب} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ} - \text{حـ}) \begin{vmatrix} \text{حـ + ١} & \text{ب + ١} & \text{١} \\ \text{أ + ٣} & \text{٣} & \text{-١} \\ \text{أ+حـ} & \text{ب} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

وبجمع ص١ + ص٢

$$= (\text{أ} - \text{حـ}) \begin{vmatrix} \text{حـ+١} & \text{ب+١} & \text{١} \\ \text{أ+حـ+٤} & \text{ب+٤} & \text{٠} \\ \text{أ+حـ} & \text{ب} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

= (أ - حـ) [أ ب + ب حـ + ٤ أ + ٤ حـ - أ ب - ب حـ - ٤ ب]

= ٤ (أ - حـ) (أ + حـ - ب)

(٥٣)

$$\text{الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{س ع} & \text{س ص} & \text{س}^٢ \\ \text{ص ع} & \text{ص}^٢\text{+١} & \text{س ص} \\ \text{ع}^٢\text{+١} & \text{ص ع} & \text{س ع} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س ع} & \text{س ص} & \text{١} \\ \text{ص ع} & \text{ص}^٢\text{+١} & \text{٠} \\ \text{ع}^٢\text{+١} & \text{ص ع} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س}^٢ \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{١} \\ \text{ص ع} & \text{ص}^٢\text{+١} & \text{ص} \\ \text{ع}^٢\text{+١} & \text{ص ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

+ ص^٢ ع^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ١ - ص^٢ ع^٢

بطرح ع٢ - ص ع١ ، ع٣ - ع ع١ في المحدد الأول

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{س}^٢ \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{١} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

+ ص^٢ + ع^٢ + ١

= س^٢ × ١ + ص^٢ + ع^٢ + ١ = الأيسر

(٥٤) بفك المحدد كمجموع محددين بالعمود الثالث

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & \text{أ}^3 \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & \text{ب}^3 \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & \text{جـ}^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & -1 \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & -1 \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & -1 \end{vmatrix}$$

وبأخذ أ مشترك من ص_1 ، ب من ص_2 ، جـ من ص_3 في المحدد الأول ، -1 مشترك من ع_3 في المحدد الثاني

∴ المحدد الأصلي =

$$\text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} \quad \text{بتبديل } \text{ع}_1 ، \text{ع}_3 \text{ ثم } \text{ع}_2 ، \text{ع}_3$$

= أ ب جـ × م − م حيث م المحدد المبين

= م (أ ب جـ − ١) = صفر (فرضاً)

ومنه أ ب جـ = ١ حيث أن م ≠ صفر

---

(٥٥) بإيجاد $\text{ع}_2 - \text{ع}_1 \times$ حا س ، $\text{ع}_3 - \text{ع}_1 \times 2$

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{حا س} & \text{حتا}^2\text{ س} & \text{حتا س} - 2\text{ حا س} \\ 0 & \text{حتا س} & 1 \end{vmatrix}$$

= حتا² س × ١ − حتا س (حتا س − ٢ حا س)

= حتا² س − حتا² س + ٢حا س حتا س = حا٢ س

---

(٥٦) بطرح ص_1 من كل من ص_2 ، ص_3 في المحدد الأيمن

$$\text{يصبح} \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 0 & \text{ب} - \text{أ} & \text{ب}^3 - \text{أ}^3 \\ 0 & \text{جـ} - \text{أ} & \text{جـ}^3 - \text{أ}^3 \end{vmatrix}$$

وبأخذ (ب−أ) مشترك من ص_2 ، (جـ − أ) من ص_3

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 0 & 1 & \text{ب}^2 + \text{ب أ} + \text{أ}^2 \\ 0 & 1 & \text{جـ}^2 + \text{جـ أ} + \text{أ}^2 \end{vmatrix}$$

وبطرح ص_2 من ص_3

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 0 & 1 & \text{ب}^2 + \text{ب أ} + \text{أ}^2 \\ 0 & 0 & (\text{جـ}^2 - \text{ب}^2) + \text{أ}(\text{جـ} - \text{ب}) \end{vmatrix}$$

وبفكه بقانون الصورة المثلثية فإن المحدد = (ب − أ) × (جـ − أ) × ١ × ١ × [(جـ − ب) (جـ + ب + أ)] = (ب − أ) (جـ − أ) (جـ − ب) (أ + ب + جـ)

وبفك محدد الطرف الأيسر بنفس الطريقة = (ب−أ) (جـ−أ) (جـ−ب)

---

(٥٧) بإيجاد $\text{ع}_2 - \text{ع}_1$ ، $\text{ع}_3 - \text{ع}_2$

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & 2\text{أ}+1 & 2\text{أ}+3 \\ \text{ب}^2 & 2\text{ب}+1 & 2\text{ب}+3 \\ \text{جـ}^2 & 2\text{جـ}+1 & 2\text{جـ}+3 \end{vmatrix}$$

وبإيجاد $\text{ص}_1 - \text{ص}_2$ ، $\text{ص}_2 - \text{ص}_3$

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أ}^2 - \text{ب}^2 & 2(\text{أ} - \text{ب}) & 2(\text{أ} - \text{ب}) \\ \text{ب}^2 - \text{جـ}^2 & 2(\text{ب} - \text{جـ}) & 2(\text{ب} - \text{جـ}) \\ \text{جـ}^2 & 2\text{جـ}+1 & 2\text{جـ}+3 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{جـ}) \begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب} & 2 & 2 \\ \text{ب}+\text{جـ} & 2 & 2 \\ \text{جـ}^2 & 2\text{جـ}+1 & 2\text{جـ}+3 \end{vmatrix}$$

وبإيجاد $\text{ص}_1 - \text{ص}_2$ ، $\text{ع}_3 - \text{ع}_2$

$$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{جـ}) \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{جـ} & 0 & 0 \\ \text{ب}+\text{جـ} & 2 & 0 \\ \text{جـ}^2 & 2\text{جـ}+1 & 2 \end{vmatrix}$$

= (أ − ب) (ب − جـ) × (أ − جـ) × ٢ × ٢ = الأيسر

---

(٥٨) بتحويل الطرف الأيمن إلى مجموع محددين

$$= \begin{vmatrix} \text{س}^3 & \text{س}^2 & \text{س} \\ \text{ب}^3 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{جـ}^3 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\text{أ}^2 & \text{س}^2 & \text{س} \\ -\text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ -\text{أ}^2 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س ب جـ} \begin{vmatrix} \text{س}^2 & \text{س} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} - \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{س}^2 & \text{س} \\ 1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ 1 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

وبتبديل ع_1 ، ع_3 في المحدد الأول ، ع_2 ، ع_3 في الثاني يتساوى المحددان ونأخذ مشتركاً

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} (-\text{س ب جـ} + \text{أ}^2)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & \text{ب} - \text{س} & \text{ب}^2 - \text{س}^2 \\ 0 & \text{جـ} - \text{س} & \text{جـ}^2 - \text{س}^2 \end{vmatrix} (\text{أ}^2 - \text{س ب جـ})$$

$$= (\text{ب} - \text{س})(\text{جـ} - \text{س})(\text{أ}^2 - \text{س ب جـ}) ، \text{ص}_2 ، \text{ص}_3 \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & 1 & \text{ب}+\text{س} \\ 0 & 1 & \text{جـ}+\text{س} \end{vmatrix}$$

= (ب - س) (حـ - س) (أ² - س ب حـ) $\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & 1 & \text{ب}+\text{س} \\ 0 & 0 & \text{ب}-\text{حـ} \end{vmatrix}$

= (ب - س) (حـ - س) (أ² - س ب حـ) × ١ × ١ × (حـ - ب)

المجموعة الثالثة

تمارين (٣ - ١) من الكتاب المدرسي

(١) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{هـ} & \text{د} & \text{و} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{و} & \text{د} & \text{هـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = -12$ الجواب (أ)

(٢) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} = -15$ الجواب (ب)

(٣) أ × ج $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = صفر لأن $\text{ص}_1 = \text{ص}_3$ الجواب (أ)

(٤) $\begin{vmatrix} \text{أب} & \text{أ} & \frac{1}{\text{جـ}} \\ \text{أجـ} & \text{جـ} & \frac{1}{\text{ب}} \\ \text{بجـ} & \text{ب} & \frac{1}{\text{أ}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{أبجـ}} \begin{vmatrix} \text{أب} & \text{أ} & \text{أب} \\ \text{أجـ} & \text{جـ} & \text{أجـ} \\ \text{بجـ} & \text{ب} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$

= صفر لأن $\text{ع}_1 = \text{ع}_3$ الجواب (أ)

(٥) $\text{ع}_1 \Leftarrow \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 = \begin{vmatrix} 0 & \text{ص}-\text{ع} & \text{ع}-\text{س} \\ 0 & \text{ع}-\text{س} & \text{س}-\text{ص} \\ 0 & \text{ص}-\text{س} & \text{س}-\text{ع} \end{vmatrix}$ = صفر

الجواب (أ)

(٦) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{ت}+1 \\ 0 & -\text{ت}+2 & \text{ت}-1 \\ 0 & 0 & \text{ت} \end{vmatrix}$ = ١ × (-ت+٢)×ت

= -ت² + ٢ت = ٢ ت + ١ الجواب (ب)

(٧) س² $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = ٩٦ ، س² $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = ٩٦

س² × ١ (٣ - ١٥) = ٩٦ ، س² = - ٨ ∴ س = -٢ الجواب (د)

(٨) ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جاأ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جاب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جاجـ}} = \text{٢نق}$

∴ أ = ٢ نق جا أ ، ب = ٢ نق جا ب ، جـ = ٢ نق جا جـ

$\begin{vmatrix} \text{٢نق جاأ} & \text{٢نق جاب} & \text{٢نق جاجـ} \\ 5 & 7 & 8 \\ \text{جاأ} & \text{جاب} & \text{جاجـ} \end{vmatrix} = \text{٢نق} \begin{vmatrix} \text{جاأ} & \text{جاب} & \text{جاجـ} \\ 5 & 7 & 8 \\ \text{جاأ} & \text{جاب} & \text{جاجـ} \end{vmatrix}$

= ٢ نق × صفر لأن $\text{ص}_1 = \text{ص}_3$ = صفر الجواب (د)

(٩) م = ٣ × ٢ × ٥ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ = ٣٠م الجواب (د)

(١٠) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -7 \\ -9 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ = ٩ × ٧ + ٧ × -٢ = ٤٩ الجواب (ج)

(١١) الأيمن = $\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & \text{ص}-\text{س} & \text{ص}^2-\text{س}^2 \\ 0 & \text{ع}-\text{س} & \text{ع}^2-\text{س}^2 \end{vmatrix}$

= (ص-س) (ع - س) $\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & 1 & \text{ص}+\text{س} \\ 0 & 0 & \text{ع}+\text{س} \end{vmatrix}$

= (ص-س) (ع - س) (ع - ص) .... (١)

= (س-ص) (ص -ع) (ع-س) = الأيسر

∵ س - ص = ٥ ∴ س = ص + ٥

، ∵ ص- ع = ٧ ∴ ص = ع + ٧

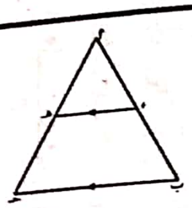
∴ س = ع + ٧ +٥ ∴ س-ع =١٢

بالتعويض فى (١)

الأيمن = (-٥) (-١٢) (-٧) = - ٤٢٠ = الأيسر

(١٢) في Δابجـ

$\because \overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$



$\therefore \dfrac{\text{ده}}{\text{بجـ}} = \dfrac{\text{اد}}{\text{اب}} = \dfrac{\text{اهـ}}{\text{اجـ}} = \text{ك}$ مثلاً

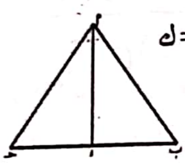
$\therefore$ د هـ = ك ب جـ ، أد = ك ص ، أهـ = ك أ جـ

$$\therefore \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ \text{ك اجـ} & \text{ك اب} & \text{ك بجـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{بجـ} \end{vmatrix} = \text{ك} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{بجـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$$

= ك × صفر = صفر = الأيسر

---

(١٣) في Δابجـ $\because \overline{\text{اد}}$ ينصف $\angle$ ب أ جـ



$\therefore \dfrac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \dfrac{\text{با}}{\text{اجـ}} \qquad \therefore \dfrac{\text{اب}}{\text{بد}} = \dfrac{\text{اجـ}}{\text{جـد}} = \text{ك}$

$\therefore$ أب = ك بد ، أجـ = ك جـد

$$\text{الأيمن} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ \text{ك بد} & \text{ك دجـ} & \text{ك(بد+دجـ)} \\ \text{بد} & \text{دجـ} & \text{بد+دجـ} \end{vmatrix}$$

$$= \text{ك} \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ \text{بد} & \text{جـد} & \text{بد+دجـ} \\ \text{بد} & \text{جـد} & \text{بد+دجـ} \end{vmatrix} = \text{ك} \times \text{صفر} = \text{صفر} = \text{الأيسر}$$

حل آخر:

$$\because \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ \text{اب} & \text{اجـ} & \text{اب + اجـ} \\ \text{بد} & \text{دجـ} & \text{بد+دجـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٣ \\ \text{با} & \text{اجـ} & \text{اجـ} \\ \text{بد} & \text{دجـ} & \text{دجـ} \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_٣ - \text{ع}_٢ - \text{ع}_١$ = صفر = الأيسر

$$(١٤)\ \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{جا}^٢\text{س+جتا}^٢\text{س} & \text{جتا}^٢\text{س} & ١ \\ \text{جا}^٢\text{ص+جتا}^٢\text{ص} & \text{جتا}^٢\text{ص} & ١ \\ \text{جا}^٢\text{ع+جتا}^٢\text{ع} & \text{جتا}^٢\text{ع} & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^٢\text{س} & ١ \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ص} & ١ \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ع} & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر لأن } \text{ع}_١ = \text{ع}_٣ = \text{الأيسر}$$

$$(١٥)\ \begin{vmatrix} \text{س} & ١ & \text{س} \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} = ١٦$$

، -٤ × (٤ س - ٢ س) = ١٦

٢س = -٤

$\therefore$ س = -٢

$$(١٦)\ \begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ١+\text{س} \\ -\text{س} & ١ & -١ \\ ٠ & \text{س} & \text{س}+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س}^٢ & ١ \\ -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{س} & \text{س}^٢+١ & \text{س} \\ ١ & \text{س}-١ & \text{س}+١ \end{vmatrix} = \text{س}^٣ + \text{س}$$

$(\text{س}^٢ + ١)(\text{س}+١) - \text{س}(\text{س}-١) - \text{س}^٣ - \text{س} = ٠$

$\text{س}^٣ + \text{س}^٢ + \text{س} + ١ - \text{س}^٢ + \text{س} - \text{س}^٣ - \text{س} = ٠$

س + ١ = ٠ $\therefore$ س = -١

$$(١٧)\ \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & -١ & ٠ \\ ١-\text{س} & ١+\text{س}^٢ & \text{س} \end{vmatrix} = ٢\text{س}+١$$

$١ \times (١+\text{س}^٢ + ١ - \text{س}) = ٢\text{س}+١$ ، $\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ١ = ٠$

$$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{اجـ}}}{٢\text{ا}} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩-٤}}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٣+\sqrt{٥}}{٢} \text{ أ، س} = \frac{٣-\sqrt{٥}}{٢}$$

$$(١٨)\ \begin{vmatrix} \text{س}+٣ & ١ & ٢ \\ \text{س}+٣ & \text{س} & ٢ \\ \text{س}+٣ & ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = (\text{س}-١)$$

$$\therefore (\text{س}+٣) \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & \text{س} & ٢ \\ ١ & ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = (\text{س}-١)$$

$$\therefore (\text{س}+٣) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & \text{س}-١ & ٠ \\ ١ & ١ & \text{س}-٢ \end{vmatrix} = \text{س}-١$$

(س+٣) (س-١) (س-٢) = (س-١)

(س-١) [(س+٣) (س-٢) -١] = ٠

أ، س = ١ أو $\text{س}^٢ + \text{س} - ٧ = ٠$

$$\text{س} = \frac{-١ \pm \sqrt{١+٢٨}}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{-١+\sqrt{٢٩}}{٢} \text{ أو س} = \frac{-١-\sqrt{٢٩}}{٢}$$

(١٩) الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ا & ب-ا & جـ-ا \\ ا^٢ & ب^٢-ا^٢ & جـ^٢-ا^٢ \end{vmatrix}$

= $(ب-ا)(جـ-ا)\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ا & ١ & ١ \\ ا^٢ & ب+ا & جـ+ا \end{vmatrix}$

= $(ب-ا)(جـ-ا)\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ا & ١ & ٠ \\ ا^٢ & ب+ا & جـ-ب \end{vmatrix}$

= (ب-ا) (جـ-ا) × ١ × ١ × (جـ-ب)

= (ب - ا) (جـ - ا) (جـ - ب)= الأيسر

(٢٠) الأيمن = $\begin{vmatrix} ا+ب+جـ & ا+ب+جـ & ا+ب+جـ \\ ٢ب & ب-جـ-ا & ٢ب \\ ٢جـ & ٢جـ & جـ-ا-ب \end{vmatrix}$

= $(ا+ب+جـ)\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ب & ب-جـ-ا & ٢ب \\ ٢جـ & ٢جـ & جـ-ا-ب \end{vmatrix}$

= $(ا+ب+جـ)\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ب & -(ا+ب+جـ) & ٠ \\ ٢جـ & ٠ & -(ا+ب+جـ) \end{vmatrix}$

= $(ا + ب + جـ)^٣$ = الأيسر.

(٢١) الأيمن = ب جـ × ا جـ × ا ب $\begin{vmatrix} ١ & \frac{جـ}{ب} & \frac{ب}{جـ} \\ \frac{جـ}{ا} & ١ & \frac{ا}{جـ} \\ \frac{ب}{ا} & \frac{ا}{ب} & ١ \end{vmatrix}$

= ا ب جـ $\begin{vmatrix} ا & جـ & ب \\ جـ & ب & ا \\ ب & ا & جـ \end{vmatrix}$ = الأيسر

(٢٢) الأيمن = $\begin{vmatrix} ص & س & س \\ ص & ع+س & ص \\ ٠ & ع & س+ص \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & س & س \\ ٠ & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ع \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} ص & س & س \\ ٠ & ع & ص-س \\ ٠ & ع & س+ص \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & س & س \\ ٠ & ع+س & ص \\ ٠ & ع-س & ص \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} ص & س & س \\ ٠ & ع & ص-س \\ ٠ & ٠ & ٢س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & س & س \\ ٠ & ع+س & ص \\ ٠ & -٢س & ٠ \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} ص & س & س \\ ٠ & ع & ص-س \\ ٠ & ٠ & ٢س \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ع & س & س \\ ٠ & ص & ع+س \\ ٠ & ٠ & -٢س \end{vmatrix}$

= ٢ س ص ع + ٢ س ص ع = ٤ س ص ع = الأيسر

(٢٣) الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ س & ص-س & ٠ \\ س & ٠ & -س-ص \end{vmatrix}$

= ١ × (ص-س) × -١ (س+ج)

= (س -ص) (س + ص) = $س^٢-ص^٢$ = الأيسر

(٢٤) المحدد = $\begin{vmatrix} ٥ & -١ & ١٠ \\ ٤ & ٢ & ٨ \\ -٥ & ٢ & -١٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & -١ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٠ \\ -٥ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$

$ع_٢ \Leftarrow ع_٢ - ٢ع_١$ = صفر

(٢٥) المحدد = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ -٤ & ٦ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

$ص_٣ \Leftarrow ص_٣ + ٢ ص_٢$

(٢٦) $\begin{vmatrix} (س+ص)^٢ & س^٢+ص^٢+٢س ص & ٣س ص \\ (ع+ل)^٢ & ع^٢+ل^٢+٢ع ل & ٣ع ل \\ (م+ن)^٢ & م^٢+ن^٢+٢م ن & ٣م ن \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} (س+ص)^٢ & (س+ص)^٢ & ٣س ص \\ (ع+ل)^٢ & (ع+ل)^٢ & ٣ع ل \\ (م+ن)^٢ & (م+ن)^٢ & ٣م ن \end{vmatrix}$

= صفر لأن $ع_١ = ع_٢$ = الأيسر

(٢٧) $\Delta = \begin{vmatrix} ٠ & \text{ل} & -\text{م} \\ -\text{ل} & ٠ & -\text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & -\text{ل} & \text{م} \\ \text{ل} & ٠ & \text{ن} \\ -\text{م} & -\text{ن} & ٠ \end{vmatrix}$

$\Delta = -١ \times -١ \times -١ \begin{vmatrix} ٠ & \text{ل} & -\text{م} \\ \text{ل} & ٠ & -\text{ن} \\ -\text{م} & \text{ن} & ٠ \end{vmatrix}$

$\therefore \Delta = -\Delta \qquad \therefore ٢\Delta =$ صفر

$\therefore \Delta =$ صفر $\qquad \therefore$ الأيمن = الأيسر

(٢٨) الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & \text{م ن} & \text{م ن} + \text{س ص} + \text{ع ل} \\ ١ & \text{س ص} & \text{م ن} + \text{س ص} + \text{ع ل} \\ ١ & \text{ع ل} & \text{م ن} + \text{س ص} + \text{ع ل} \end{vmatrix}$

$= (\text{م ن} + \text{س ص} + \text{ع ل}) \begin{vmatrix} ١ & \text{م ن} & ١ \\ ١ & \text{س ص} & ١ \\ ١ & \text{ع ل} & ١ \end{vmatrix}$

= (م ن + س ص + ع ل) × صفر = صفر = الأيسر

(٢٩) الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س} - \text{أ} & \text{أ} - \text{س} & ٠ \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ ٠ & \text{أ} - \text{س} & \text{س} - \text{أ} \end{vmatrix}$

$= (\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix}$

$= (\text{س} - \text{أ})^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{أ} & \text{س} + \text{أ} & \text{أ} \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix}$

$= (\text{س} - \text{أ})^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{أ} & \text{س} + ٢\text{أ} & ٠ \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix} = (\text{س} - \text{أ})^{٢} (\text{س} + ٢\text{أ})$ = الأيسر

(٣٠) الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} & ١ + \text{س}^{٢} & \text{س ص} \\ \text{ص} & \text{س ص} & ١ + \text{ص}^{٢} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{س} & ١ & ٠ \\ \text{ص} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١$ = الأيسر

(٣١) الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س} & -\text{ص} & -\text{ع} \\ \text{ص} & ١ & ٠ \\ \text{ع}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢} & -\text{ص} & -\text{ع} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \text{س} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}$ = الأيسر

(٣٢) الأيمن = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٥ & -١ & -٧ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٢ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ٥ & -١ & -٧ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ٦ & ٦ & ٩ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر لأن $\text{ص}_{٢} = \text{ص}_{٣}$ = الأيسر

(٣٣) الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{ب} - \text{أ} & ٠ \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \\ ٠ & \text{جـ} - \text{أ} & \text{أ} - \text{جـ} \end{vmatrix}$

$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix}$

$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ \text{ب} & \text{أ} + \text{جـ} & \text{جـ} \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} & \text{جـ} \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

= (أ - ب) (أ - جـ) (أ + ب + جـ) = الأيسر

(٣٤) الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{أ ب} & \text{أ} \\ \text{أ جـ} & \text{ب}^{٢} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \text{جـ}(\text{أ} + \text{ب}) & \text{ب}(\text{أ} + \text{ب}) & (\text{أ} + \text{ب}) \\ \text{أ جـ} & \text{ب}^{٢} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$

$$= (أ+ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & جـ \\ ب & ب^{٢} & أجـ \\ ١ & جـ & ب \end{vmatrix} = (أ+ب)×جـ \begin{vmatrix} ١ & ب & ١ \\ ب & ب^{٢} & أ \\ ١ & جـ & \frac{ب}{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= (أ+ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ١ \\ ب & ب^{٢} & أ \\ جـ & جـ^{٢} & ب \end{vmatrix}$$ = الأيسر

(٣٥) الأيمن = $$\begin{vmatrix} أجـ & أب & أ^{٢} \\ بجـ & ب^{٢}+١ & أب \\ جـ^{٢}+١ & بجـ & أجـ \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} أجـ & أب & ١ \\ بجـ & ب^{٢}+١ & ٠ \\ جـ^{٢}+١ & بجـ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= أ \begin{vmatrix} أجـ & أب & أ \\ بجـ & ب^{٢}+١ & ب \\ جـ^{٢}+١ & بجـ & جـ \end{vmatrix} + ١ × [(ب^{٢}+١)(جـ^{٢}+١) - ب^{٢}جـ^{٢}]$$

$$= أ^{٢} \begin{vmatrix} جـ & ب & ١ \\ بجـ & ب^{٢}+١ & ب \\ جـ^{٢}+١ & بجـ & جـ \end{vmatrix} + ب^{٢}جـ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} + ١ - ب^{٢}جـ^{٢}$$

$$= أ^{٢} \begin{vmatrix} جـ & ب & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} + ب^{٢} + جـ^{٢} + ١ = أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} + ١$$ = الأيسر

(٣٦) الأيمن = $$\begin{vmatrix} ١ & ٦ & ١ \\ ١ & ١+ب & ١ \\ ١+جـ & ١ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ١ & أ \\ ١ & ١+ب & ٠ \\ ١+جـ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ب & ٠ \\ جـ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} + أ\ [(١+ب)(١+ج) - ١]$$

$$= ب\,جـ + أ\ [١+ب+جـ+ب\,جـ - ١] = ب\,جـ + أ\,ب + أ\,جـ + أ\,ب\,جـ$$

$$= أ\,ب\,جـ \left(\frac{١}{أ} + \frac{١}{ب} + \frac{١}{جـ} + ١\right)$$ = الأيسر .

(٣٧) $$\begin{vmatrix} أ & أ^{٢} & أ^{٣}-١ \\ ب-أ & ب^{٢}-أ^{٢} & ب^{٣}-أ^{٣} \\ جـ-أ & جـ^{٢}-أ^{٢} & جـ^{٣}-أ^{٣} \end{vmatrix} = ٠$$

$$(ب-أ)(جـ-أ) × \begin{vmatrix} أ & أ^{٢} & أ^{٣}-١ \\ ١ & أ+ب & أ^{٢}+أب+ب^{٢} \\ ١ & أ+جـ & أ^{٢}+أجـ+جـ^{٢} \end{vmatrix} = ٠$$

بالقسمة على (ب-أ) (جـ-أ) لأن أ ≠ ب ≠ جـ

$$\therefore \begin{vmatrix} أ & أ^{٢} & أ^{٣}-١ \\ ١ & أ+ب & أ^{٢}+أب+ب^{٢} \\ ٠ & جـ-ب & أ(جـ-ب)+(جـ^{٢}-ب^{٢}) \end{vmatrix} = ٠$$

$$(جـ-ب) \begin{vmatrix} أ & أ^{٢} & أ^{٣}-١ \\ ١ & أ+ب & أ^{٢}+أب+ب^{٢} \\ ٠ & ١ & أ+ب+جـ \end{vmatrix}$$

$\because$ جـ $\neq$ ب $\therefore$ بالقسمة على (ج-ب)

$$\therefore \begin{vmatrix} أ & ٠ & أ^{٣}-١ \\ ١ & ب & أ^{٢}+أب+ب^{٢} \\ ٠ & ١ & أ+ب+جـ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore \begin{vmatrix} أ & ٠ & أ^{٣}-١ \\ ١ & ٠ & أ^{٢}-بجـ \\ ٠ & ١ & أ+ب+جـ \end{vmatrix} = ٠ \quad \therefore -١\ [أ^{٣} - ١ - أ^{٣} + أ\,ب\,جـ] = ٠$$

بالقسمة على -١ $\therefore$ أ ب جـ - ١ = ٠ $\therefore$ أ ب جـ = ١

(٣٨) الأيمن = $$أبجـ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ جـ & ب & أ \\ \frac{١}{جـ} & \frac{١}{ب} & \frac{١}{أ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ جـ^{٢} & ب^{٢} & أ^{٢} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & أ^{٢} & أ \\ ١ & ب^{٢} & ب \\ ١ & جـ^{٢} & جـ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^{٢} & أ & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ جـ^{٢} & جـ & ١ \end{vmatrix}$$ = الأيسر

(٣٩) الأيمن = $$بجـ × أجـ × أب \begin{vmatrix} \frac{أ}{ب} & \frac{أ}{جـ} & ١ \\ \frac{ب}{أ} & ١ & \frac{ب}{جـ} \\ ١ & \frac{جـ}{أ} & \frac{جـ}{ب} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} جـأ & أب & بجـ \\ بجـ & أجـ & أب \\ أب & بجـ & أجـ \end{vmatrix}$$ = الأيسر.

المجموعة الرابعه :

(1) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ}^3 \\ 0 & \text{ب}^2-\text{أ}^2 & \text{ب}^3-\text{أ}^3 \\ 0 & \text{جـ}^2-\text{أ}^2 & \text{جـ}^3-\text{أ}^3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ص}_2 \leftarrow \text{ص}_2-\text{ص}_1 \\ \text{ص}_3 \leftarrow \text{ص}_3-\text{ص}_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ}^3 \\ 0 & (\text{ب}-\text{أ})(\text{ب}+\text{أ}) & (\text{ب}-\text{أ})(\text{ب}^2+\text{أب}+\text{أ}^2) \\ 0 & (\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}+\text{أ}) & (\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}^2+\text{أجـ}+\text{أ}^2) \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ}^3 \\ 0 & \text{ب}+\text{أ} & \text{ب}^2+\text{أب}+\text{أ}^2 \\ 0 & \text{جـ}+\text{أ} & \text{جـ}^2+\text{أجـ}+\text{أ}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ}^3 \\ 0 & \text{ب}+\text{أ} & \text{ب}^2+\text{أب}+\text{أ}^2 \\ 0 & \text{جـ}-\text{ب} & (\text{جـ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{ب}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ}^3 \\ 0 & \text{ب}+\text{أ} & \text{ب}^2+\text{أب}+\text{أ}^2 \\ 0 & 1 & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} \end{vmatrix}$$

$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{جـ})(\text{جـ}-\text{أ}) \times 1 \times [\text{أب}+\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{أ ب}+\text{ب جـ}+\text{أ جـ}-\text{ب}^2-\text{أ ب}-\text{أ}^2] = (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{جـ})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{أ ب}+\text{ب جـ}+\text{جـ أ})$ = الأيسر

(2) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{بجـ} \\ 0 & \text{ب}-\text{أ} & \text{جـأ}-\text{بجـ} \\ 0 & \text{جـ}-\text{أ} & \text{أب}-\text{بجـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{بأ} \\ 0 & \text{ب}-\text{أ} & \text{جـ}(\text{أ}-\text{ب}) \\ 0 & \text{جـ}-\text{أ} & \text{ب}(\text{أ}-\text{جـ}) \end{vmatrix} = (\text{أ}-\text{ب})(\text{جـ}-\text{أ})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{بأ} \\ 0 & -1 & \text{جـ} \\ 0 & 1 & -\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{أ}-\text{ب})(\text{جـ}-\text{أ})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{بأ} \\ 0 & -1 & \text{جـ} \\ 0 & 0 & \text{جـ}-\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{جـ})(\text{جـ}-\text{أ}) =$$

$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{جـ}-\text{أ}) \times 1 \times -1 \times (\text{جـ}-\text{ب}) = (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{جـ})(\text{جـ}-\text{أ})$ =

الأيسر

(3) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 2\text{أ} & \text{دس}-\text{أ} & 1 \\ 2\text{ب} & \text{هـس}-\text{ب} & 1 \\ 2\text{جـ} & \text{وس}-\text{جـ} & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{دس} & 1 \\ \text{ب} & \text{هـس} & 1 \\ \text{جـ} & \text{وس} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\text{س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{د} & 1 \\ \text{ب} & \text{هـ} & 1 \\ \text{جـ} & \text{و} & 1 \end{vmatrix} = 2\text{س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ = الأيسر

(4) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{س} \\ -2\text{س} & 1 & 0 \\ -3\text{س} & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ص}_2 \leftarrow \text{ص}_2-2\text{س}^2\text{ص}_1 \\ \text{ص}_3 \leftarrow \text{ص}_3-3\text{س}^2\text{ص}_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+2\text{س}+3\text{س}^2 & 0 & 0 \\ -2\text{س} & 1 & 0 \\ -3\text{س} & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ص}_1 \leftarrow \text{ص}_1-\text{ص}_2-\text{س}\,\text{ص}_3$$

$= (1+2\text{س}+3\text{س}^2) \times 1 \times 1$ = الأيسر

(5) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}^2+\text{جـ}^2 & 0 & 0 \\ \text{ب} & 1 & 0 \\ \text{جـ}^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ص}_1 \leftarrow \text{ص}_1+\text{ب}\,\text{ص}_2+\text{جـ}\,\text{ص}_3$$

$= (\text{أ}+\text{ب}^2+\text{جـ}^2) \times 1 \times 1$ = الأيسر

(6) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{بجـ} & \text{أب}+\text{بجـ}+\text{جـأ} \\ 1 & \text{جـأ} & \text{أب}+\text{بجـ}+\text{جـأ} \\ 1 & \text{أب} & \text{أب}+\text{بجـ}+\text{جـأ} \end{vmatrix} = (\text{أب}+\text{بجـ}+\text{جـأ})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{بجـ} & 1 \\ 1 & \text{جـأ} & 1 \\ 1 & \text{أب} & 1 \end{vmatrix} = (\text{أب}+\text{بجـ}+\text{جـأ}) \times$$ صفر لأن $\text{ع}_1 = \text{ع}_3$ = الأيسر

(7) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{ب} & 1 & 0 \\ \text{جـ} & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ع}_2 \leftarrow \text{ع}_2-\text{ب}\,\text{ع}_1 \\ \text{ع}_3 \leftarrow \text{ع}_3-\text{جـ}\,\text{ع}_1 \end{matrix}$$

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$ = الأيسر.

(8) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 1+\text{س}+\text{ص}+\text{ع} & \text{ص} & \text{ع} \\ 1+\text{س}+\text{ص}+\text{ع} & 1+\text{ص} & \text{ع} \\ 1+\text{س}+\text{ص}+\text{ع} & \text{ص} & 1+\text{ع} \end{vmatrix} \quad \text{ع}_1 \leftarrow \text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3$$

$$= (1+\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & 1+\text{ص} & \text{ع} \\ 1 & \text{ص} & 1+\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= (1+\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & \text{ع} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{أ}^2 \times (\text{أ}+\text{س}+\text{ص}+\text{ع})$$

= الأيسر

(٩) الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{س+٢} \\ \text{١} & \text{س} & \text{س+٢} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س+٢} \end{vmatrix}$ ع١ ← ع١ + ع٢ + ع٣

$= (\text{س}+\text{٢})\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١} & \text{١} \end{vmatrix}$

$= (\text{س}+\text{٢})\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{س}-\text{١} & \text{١} \\ \text{س}-\text{١} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix}$

= (س+٢) (س-١)^{٢} = الأيسر

(١٠) ∵ (س-١) عامل ∴ بوضع س = ١ نجد أن

$\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{٢} \\ -\text{١} & \text{١} & \text{ك}+\text{١} \end{vmatrix}$ = صفر ∴ $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{١} \\ -\text{١} & \text{٠} & \text{ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$

ص٢ ← ص٢ − ص١ ، ص٣ ← ص٣ − ص١

∴ $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{ك}+\text{١} \\ -\text{١} & \text{٠} & \text{ك} \end{vmatrix}$ = صفر ص٢ ← ص٢ + ص٣

∴ − $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{ك}+\text{١} \\ \text{٠} & -\text{١} & \text{ك} \end{vmatrix}$ = ٠ ∴ + $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & -\text{١} & \text{ك} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{ك}+\text{١} \end{vmatrix}$ = صفر

∴ ١ × -١ × (ك + ١) = صفر ∴ ك = -١

(١١) الأيمن =

$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^{\text{٢}}+\text{١} & \text{س}^{\text{٢}}+\text{٢س}+\text{١}-\text{س}^{\text{٢}}-\text{١}-\text{٢س} \\ \text{ص} & \text{ص}^{\text{٢}}+\text{١} & \text{ص}^{\text{٢}}+\text{٢ص}+\text{١}-\text{ص}^{\text{٢}}-\text{١}-\text{٢ص} \\ \text{ع} & \text{ع}^{\text{٢}}+\text{١} & \text{ع}^{\text{٢}}+\text{٢ع}+\text{١}-\text{ع}^{\text{٢}}-\text{١}-\text{٢ع} \end{vmatrix}$

ع٣ ← ع٣ - ع٢ - ٢ ع١

= $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^{\text{٢}}+\text{١} & \text{٠} \\ \text{ص} & \text{ص}^{\text{٢}}+\text{١} & \text{٠} \\ \text{ع} & \text{ع}^{\text{٢}}+\text{١} & \text{٠} \end{vmatrix}$ = صفر = الأيسر

(١٢) الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{ا}-\text{اب} & \text{١} & \text{ب} \\ \text{اب}-\text{اجـ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{اجـ}-\text{ا} & \text{جـ} & \text{١} \end{vmatrix}$ ح٢ ← ع٢ + ٣ع٣

= $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{١} & \text{ب} \\ \text{اب} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{اجـ} & \text{جـ} & \text{١} \end{vmatrix}$ ع١ ← ع١ + أع٢

= ا $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{١} \end{vmatrix}$ = ا × صفر لأن ع١ = ع٢ = صفر

= صفر

(١٤) المحدد = ٢ $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{٥ل} & \text{٥م} & \text{٥ن} \\ \text{٧ك}-\text{٣ل} & \text{٧ط}-\text{٣م} & \text{٧هـ}-\text{٣ن} \end{vmatrix}$

= ٢ × ٥ $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{٧ك} & \text{٧ط} & \text{٧هـ} \end{vmatrix}$

= ١٠ × ٧ $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ك} & \text{ط} & \text{هـ} \end{vmatrix}$ = ٧٠ × ٢ = ١٤٠

(١٣) الأيمن =

$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{٠} & \text{ب}-\text{ا} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & -\text{ب}-\text{ا} \end{vmatrix}$ = ١ × (ب − ا) × − (ب − ا)

= − (ب^{٢} − ا^{٢}) = ا^{٢} − ب^{٢}

= الأيسر .

(١٥) الأيمن =

$\begin{vmatrix} \text{٢س}+\text{٢ص}+\text{٢} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{٢س}+\text{٢ص}+\text{٢} & \text{٢س}+\text{ص}+\text{١} & \text{ص} \\ \text{٢س}+\text{٢ص}+\text{٢} & \text{س} & \text{س}+\text{٢ص}+\text{١} \end{vmatrix}$

= ٢ (س + ص + ١) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{٢س}+\text{ص}+\text{١} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{س} & \text{س}+\text{٢ص}+\text{١} \end{vmatrix}$

= ٢ (س + ص + ١) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{٠} & \text{س}+\text{ص}+\text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{س}+\text{ص}+\text{١} \end{vmatrix}$

= ٢ (س+ص+١) × ١ × (س+ص+١) × (س+ص+١)

= ٢ (س+ص+١)^{٣} = الأيسر

(١٦) الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{ل} & (\text{م}-\text{ل}) & (\text{ن}-\text{ل}) \\ \text{ل}^{\text{٢}} & (\text{م}-\text{ل})(\text{م}+\text{ل}) & (\text{ن}-\text{ل})(\text{ن}+\text{ل}) \end{vmatrix}$

= (م − ل)(ن − ل) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{ل} & \text{١} & \text{١} \\ \text{ل}^{\text{٢}} & \text{م}+\text{ل} & \text{ن}+\text{ل} \end{vmatrix}$

$$= (م-ل)(ن-ل)\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ل \\ ن-م & م+ل & ل^{٢} \end{vmatrix}$$

= (م-ل) × (ن-ل) × ١ × ١ × (ن-م)

= (ل-م) (م-ن) (ن-ل) = الأيسر.

(١٧) الأيمن = $\begin{vmatrix} س+٢أ & س+٢أ & س+٢أ \\ أ & س & أ \\ س-أ & أ-س & ٠ \end{vmatrix}$

$ص_{١} \leftarrow ص_{١} + ص_{٢} + ص_{٣}$

$$= (س-أ)(س+٢أ)\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & س & أ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= (س-أ)(س+٢أ)\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & س-أ & أ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$= (س-أ)(س+٢أ) \times ١ \times (س-أ) \times ١$

$= (س+٢أ)(س-أ)^{٢}$ = الأيسر

(١٨) ∵ س- ٢ عامل للمحدد ∴ يوضع س = ٢

نجد أن $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ -٦ & ٧ & -٣ \\ ك+٢ & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$

∴ $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٢٢ & -٣ \\ ك-٨ & -٢٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ $١ \times ٢٢ \times (ك-٨) = ٠$

∴ $ك-٨ = ٠$ ∴ $ك = ٨$

(١٩) الأيمن = $\begin{vmatrix} ٠ & أ-جـ & أ \\ ٠ & أ-جـ & ب \\ ب-جـ & أ & جـ \end{vmatrix}$ $ع_{٣} \leftarrow ع_{٣} - ٢ع_{١}$

$= \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & أ-ب \\ ٠ & أ-جـ & ب \\ ب-جـ & أ & أ-ب \end{vmatrix}$ $ص_{١} \leftarrow ص_{١} - ص_{٢}$ $= (أ-ب)(أ-جـ)(ب-جـ)$

= الأيسر

(٢٠) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ع-س & ص-س & س \\ (ع-س)(ع+س) & (ص-س)(ص+س) & س^{٢} \end{vmatrix}$$

$ع_{٢} \leftarrow ع_{٢} - ع_{١}$ ، $ع_{٣} \leftarrow ع_{٣} - ع_{١}$

$$= (ص-س)(ع-س)\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & س \\ ع+س & ص+س & س^{٢} \end{vmatrix}$$

$$= (ص-س)(ع-س)\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & س \\ ع-ص & ص+س & س^{٢} \end{vmatrix}$$

$ع_{٣} \leftarrow ع_{٣} - ع_{٢}$ = (ص-س) (ع -س) × ١ × ١ × ١ × (ع - ص)

= (س -ص) (ص -ع) (ع -س) = الأيسر.

(٢١) المحدد =

$$\begin{vmatrix} ١ & ص & س-ص \\ س+ص & ص^{٢} & (س-ص)(س+ص) \\ س^{٢}+سص+ص^{٢} & ص^{٣} & (س-ص)(س^{٢}+سص+ص^{٢}) \end{vmatrix}$$

$$(س-ص)\begin{vmatrix} ١ & ص & ١ \\ س+ص & ص^{٢} & س+ص \\ س^{٢}+سص+ص^{٢} & ص^{٣} & س^{٢}+سص+ص^{٢} \end{vmatrix}$$

= (س-ص) × صفر لأن $ع_{١} = ع_{٣}$ = صفر

(٢٢) $\begin{vmatrix} س & س & ١+٢س \\ س & ١ & ١+٢س \\ ١ & س & ١+٢س \end{vmatrix} = ٠$ $ع_{١} \leftarrow ع_{١} + ع_{٢} + ع_{٣}$

$$(١+٢س)\begin{vmatrix} س & س & ١ \\ س & ١ & ١ \\ ١ & س & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$$(١+٢س)\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١-س & ١ \\ ١-س & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ (١ + ٢س) × ١ (١-س) (١-س) = صفر ∴ ١ + ٢س = ٠

أ، ١-س=٠ ، $س = -\frac{١}{٢}$ ∴ س=١

(٢٣) الأيمن = $\begin{vmatrix} س & ٢س & ١ \\ ص-س & ٢(ص-س) & ٠ \\ ص-س & ص-س & ٠ \end{vmatrix}$ $ص_{٢} \leftarrow ص_{٢} - ص_{١}$ ، $ص_{٣} \leftarrow ص_{٣} - ص_{١}$

$$= (ص-س)(ص-س)\begin{vmatrix} س & ٢س & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix} =$$

$$= (ص-س)^{٢}\begin{vmatrix} س & س & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = [-(س-ص)]^{٢}$$

$\times ١ \times ١ = (س-ص)^{٢}$ = الأيسر

تمارين (٥) المصفوفات

المجموعة الأولى :

[١] (١) $\geq$ ٢

(٢) $أ^{-١} = \frac{١}{٢٩}\begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$

(٣) أ من المنظم ٣ × ٣

(٤) يكون لها حل وحيد

(٥) ليس لها حل على الإطلاق.

(٦) الحل الصفرى

(٧) (٠ ، ٠)

(٨) (أ) مستقيمان متقاطعان والثالث لا يمر بنقطة التقاطع

(ب) المستقيمات الثلاثة تتقاطع فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمات الثلاثة منطبقة.

[٢] (١) المصفوفة مربعة ومحددها $\neq$ ٠ الجواب (ء)

(٢) $-I_{٢\times٢}$ الجواب (جـ)

(٣) رتبة $I_{٣\times٣}$ تساوى ٣ الجواب (ب)

(٤) عدد لا نهائى من الحلول منها الحل الصفرى الجواب (ء)

(٥) رتبة أ = رتبة أ* = ٢ الجواب (جـ)

(٦) $أ^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٨ & -٤ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ الجواب (جـ)

(٧) س = $أ^{-١}$ ج الجواب (ب)

(٨) المصفوفة $\boxed{\quad}_{٣\times٣}$ رتبتها = صفر الجواب (أ)

(٩) م = ن أى المصفوفة مربعة و $|أ| \neq$ ٠ الجواب (ء)

المجموعة الثانية :

[١] محدد المصفوفة = ٢٤ - ٣٠ = - ٦ $\neq$ ٠ ∴ لها معكوس ضر .

[٢] محدد المصفوفة = - ٣٦ + ٣٦ = صفر ∴ ليس لها معكوس ضربى

[٣] محدد المصفوفة = - ٥٦ + ٦٥ = ٩٠ $\neq$ ٠ ∴ لها معكوس ضربى

[٤] محدد المصفوفة = - ١٢٠ + ١٢٠ = ٠ ∴ ليس لها معكوس ضربى

[٥] محدد المصفوفة = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٨ \\ -١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ١ \times (٦ - ٨) - ٢(٤ + ٨) + ٥(٢ + ٣)$

$= -٢ - ٢٤ + ٢٥ = -١ \neq ٠$ ∴ لها معكوس ضربى

[٦] محدد المصفوفة =

$\begin{vmatrix} -١ & ١ & ٢ \\ ٤ & -١ & -٥ \\ ٣ & ١١ & ٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & -٥ & -٥ \\ ٣ & ٨ & ٨ \end{vmatrix}$ $ع_٢ \leftarrow ع_٢ - ع_١$

= صفر لأن $ع_٢ = ع_٣$ ∴ المصفوفة ليس لها معكوس ضربى

[٧] يوضع المحدد = ٠

∴ $\begin{vmatrix} ٣س & -٣ \\ ٣ & ٢-س \end{vmatrix} = ٦س - ٣س^٢ + ٩ = ٠$

$س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ $(س - ٣)(س + ١) = ٠$

∴ س = ٣ ، س = - ١ ∴ المصفوفة ليس لها معكوس ضربى

عندما $س \in \{٣ ، -١\}$

[٨] يوضع المحدد = ٠

∴ $\begin{vmatrix} ٢س & س-٤ \\ -٣ & س+١ \end{vmatrix} = ٢س^٢ + ٢س + ٣س - ١٢ = ٠$

∴ $٢س^٢ + ٥س - ١٢ = ٠$ $(س + ٤)(٢س - ٣) = ٠$

س = - ٤ ، س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ المصفوفة ليس لها معكوس ضربى

عندما $س \in \{\frac{٣}{٢} ، -٤\}$

[٩] يوضع المحدد = ٠

∴ $\begin{vmatrix} س^٢ & س & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^٢ & س & ١ \\ (٤-س^٢) & (٢-س) & ٠ \\ ٩-س^٢ & -٣-س & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

[- (٢ - س) (٢ + س) (٣ + س) -

(٢ - س) (٣ - س) (٣ + س)] = ٠

∴ (٢ - س) (٣ + س) [-٢ - س - ٣ + س] = ٠

∴ س = ٢ ، س = - ٣

∴ المصفوفة ليس لها معكوس ضربى عندما

$س \in \{٢ ، -٣\}$.

[١٠] بوضع المحدد = ٠

∴ $\begin{vmatrix} ٣س-٢ & ٢ & ٣س \\ ٤ & س+١ & ٢س-١ \\ ٢س & ١ & ٢س-١ \end{vmatrix} = ٠$

$ص_١ \leftarrow ص_١ - ٢ص_٣$ ، $ص_٢ \leftarrow ص_٢ - (س+١)ص_٣$

$$\therefore \begin{vmatrix} -س-٢ & ٠ & ٢-س \\ ٤-٢س(س+١) & ٠ & (٢س-١)-(٢س-١)(س+١) \\ ٢س & ١ & ٢س-١ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore \begin{vmatrix} -(س+٢) & ٠ & (٢-س) \\ -٢(س^{٢}+س-٢) & ٠ & -(٢س-١)\times س \\ ٢س & ١ & ٢س-١ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ - ١ × [+ (س+٢)(٢س-١)×س+٢(٢-س)(س+٢)(س-١)]=٠

∴ (س+٢) [٢ س^{٢} - س + ٢ (٢ - س) (س - ١)] = ٠

(س+٢) (٢ س^{٢}-س+٤س-٤-٢س^{٢}+٢س)] = ٠

(س+٢) (٥س-٤) = ٠ ∴ ، س = - ٢ ، س = $\frac{٤}{٥}$

المصفوفة ليس لها معكوس ضربي عندما س ∈ $\left\{-٢، \frac{٤}{٥}\right\}$.

---

[١١] قيمة المحدد = ٦ - ٥ = ١

∴ المعكوس الضربي = $\frac{١}{١}\begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

---

[١٢] قيمة المحدد = - ١٥ + ١٤ = - ١ ∴ المعكوس الضربي

$= \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} -٣ & -٧ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ -٢ & -٥ \end{pmatrix}$

---

[١٣] قيمة المحدد = ٤ - ٦ = - ٢ ∴ المعكوس الضربي

$= -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٤ & -٣ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

[١٤] قيمة المحدد = - ٤٤ + ٤٩ = ٥ ∴ المعكوس الضربي

$= \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} -١١ & ٧ \\ -٧ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١١}{٥} & \frac{٧}{٥} \\ -\frac{٧}{٥} & \frac{٤}{٥} \end{pmatrix}$

---

[١٥] قيمة المحدد = - ٣٦ + ٥٦ = ٢٠

∴ المعكوس الضربي = $\frac{١}{٢٠}\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ -١٤ & -٩ \end{pmatrix}$.

---

[١٦] قيمة المحدد = ١ × ١ × ١ = ١

مدور المصفوفة = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

مصفوفة المرافقات

$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \therefore أ^{-١} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

---

[١٧] قيمة المحدد = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١$

مدور المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

مصفوفة الملحقات $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ -١٣ & ١ & -٥ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ -١٣ & ١ & -٥ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

---

[١٨] محدد المصفوفة

$= \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٩ & ٤ \\ ٢ & ٨ & ٥ \end{vmatrix} = ١\times١٣-٤\times٢+٢\times-٢ = ١$

مدور المصفوفة = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٩ & ٨ \\ ٢ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$.

مصفوفة الملحقات = $\begin{pmatrix} ١٣ & -٤ & -٢ \\ -٢ & ١ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

∴ المعكوس الضربي= $\frac{١}{\text{قيمة المحدد}}$ × مصفوفة الملحقات

$= \begin{pmatrix} ١٣ & -٤ & -٢ \\ -٢ & ١ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

---

[١٩] محدد المصفوفة =

$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٤ & ٨ & ٧ \\ ٧ & ١٤ & ١٣ \end{vmatrix} = ٣\times٦-٥\times٣+٦\times٠ = ٣$

مدور المصفوفة = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٧ \\ ٥ & ٨ & ١٤ \\ ٦ & ٧ & ١٣ \end{pmatrix}$

مصفوفة الملحقات = $\begin{pmatrix} ٦ & ١٩ & -١٣ \\ -٣ & -٣ & ٣ \\ ٠ & -٧ & ٤ \end{pmatrix}$

∴ المعكوس الضربي = $\dfrac{١}{\text{قيمة المحدد}}$ × مصفوفة الملحقات

$= \dfrac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٦ & ١٩ & -١٣ \\ -٣ & -٣ & ٣ \\ ٠ & -٧ & ٤ \end{pmatrix}$

[٢٠] قيمة محدد المصفوفة

$= \begin{vmatrix} \text{جتاس} & -\text{جاس} & ٠ \\ \text{جاس} & \text{جتاس} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times [\text{جتا}^٢\text{س} + \text{جا}^٢\text{س}]$

$= ١ \times ١ = ١$

مدور المصفوفة = $\begin{pmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} & ٠ \\ -\text{جاس} & \text{جتاس} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

مصفوفة الملحقات = $\begin{pmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} & ٠ \\ -\text{جاس} & \text{جتاس} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي = $\dfrac{١}{١}$ × مصفوفة الملحقات

$= \begin{pmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} & ٠ \\ -\text{جاس} & \text{جتاس} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

[٢١] محدد المصفوفة

$= \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٦ & ٧ & ٨ \end{vmatrix} = ١ \times ٥ - ٢ \times ٢ - ٣ \times -٢$

$= ٥ - ٤ + ٦ = ٧$

$\text{م}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٧ \\ -٣ & ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $(\text{م}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٦ & ٧ & ٨ \end{pmatrix}$

مصفوفة ملحقات $(\text{أ}^{\text{مد}}) = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ & -٢ \\ -٣٧ & ٢٦ & -١٧ \\ -٢ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}^{\text{مد}})^{-١} = \dfrac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٥ & -٢ & -٢ \\ -٣٧ & ٢٦ & -١٧ \\ -٢ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ (١)

مصفوفة ملحقات أ = $\begin{pmatrix} ٥ & -٣٧ & -٢ \\ -٢ & ٢٦ & ٥ \\ -٢ & -١٧ & -٣ \end{pmatrix}$

، $\text{أ}^{-١} = \dfrac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٥ & -٣٧ & -٢ \\ -٢ & ٢٦ & ٥ \\ -٢ & -١٧ & -٣ \end{pmatrix}$

$(\text{أ}^{-١})^{\text{مد}} = \dfrac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٥ & -٢ & -٢ \\ -٣٧ & ٢٦ & -١٧ \\ -٢ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $(\text{أ}^{\text{مد}})^{-١} = (\text{أ}^{-١})^{\text{مد}}$

[٢٢] ∴ $\begin{pmatrix} \text{ل} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{م} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ن} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{١}{\text{ل}} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{\text{م}} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{\text{ن}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

∴ المصفوفة الثانية هى المعكوس الضربي للمصفوفة الأولى.

حل آخر : قيمة محدد المصفوفة الأولى = ل م ن

مدور المصفوفة الأولى = $\begin{pmatrix} \text{ل} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{م} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ن} \end{pmatrix}$ ،

مصفوفة ملحقات المصفوفة الأولى = $\begin{pmatrix} \text{م ن} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ل ن} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ل م} \end{pmatrix}$

∴ المعكوس الضربي = $\dfrac{١}{\text{ل م ن}}\begin{pmatrix} \text{م ن} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ل ن} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ل م} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{\text{ل}} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{\text{م}} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{\text{ن}} \end{pmatrix}$

[٢٣] $\text{ا}^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & -٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & -٢ \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} ١٢ & ١٥ & ٥ \\ ١٢ & ٢٣ & -٩ \\ ٢ & -٩ & ٣٣ \end{pmatrix}$$

$$\text{ا}^{٣} = \text{ا} \times \text{ا}^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & -٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٢ & ١٥ & ٥ \\ ١٢ & ٢٣ & -٩ \\ ٢ & -٩ & ٣٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤٢ & ٣٤ & ٨٦ \\ ٨ & -٤٤ & ١٤٦ \\ ٩٢ & ١٧٨ & -٩٦ \end{pmatrix}$$

الأيمن

$$= \begin{pmatrix} ٤٢ & ٣٤ & ٨٦ \\ ٨ & -٤٤ & ١٤٦ \\ ٩٢ & ١٧٨ & -٩٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢٤ & ٣٠ & ١٠ \\ ٢٤ & ٤٦ & -١٨ \\ ٤ & -١٨ & ٦٦ \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -٣٢ & -٦٤ & -٩٦ \\ -٣٢ & ٣٢ & -١٢٨ \\ -٩٦ & -١٦٠ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -٣٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٣٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٣٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \text{الأيسر}$$

بضرب الطرفين من اليمين × $\text{ا}^{-١}$

$\therefore \text{ا}^{٢} + ٢\text{ا} - ٣٢I - ٣٤\text{ا}^{-١} = \boxed{}$

$$\therefore ٣٤\text{ا}^{-١} = \begin{pmatrix} ١٢ & ١٥ & ٥ \\ ١٢ & ٢٣ & -٩ \\ ٢ & -٩ & ٣٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٦ \\ ٢ & -٢ & ٨ \\ ٦ & ١٠ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -٣٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٣٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٣٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ا}^{-١} = \frac{١}{٣٤} \begin{pmatrix} -١٨ & ١٩ & ١١ \\ ١٤ & -١١ & -١ \\ ٨ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$$

[٢٤] نفرض أن $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$ ، $\text{ا}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ،

$$\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$$

$$٣ \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix} =$$

$$\text{ا} \begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{pmatrix} + ٣ \times \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$٣ \begin{pmatrix} ٢\text{ا} & ٢\text{ب} \\ \text{ا}-\text{جـ} & \text{ب}-\text{ء} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٢ & -٢ \\ & ٢ \end{pmatrix} =$$

$$٢ \begin{pmatrix} ٥\text{ا}+\text{جـ} & ٥\text{ب}+\text{ء} \\ -٢\text{جـ} & -٢\text{ء} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ٠ \\ \frac{٣}{٢} & -٣ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٦\text{ا}+١٠ & ٦\text{ب} \\ ٣\text{ا}-٣\text{جـ}+٢ & ٣\text{ب}-٣\text{ء}-٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٠\text{ا}+٢\text{جـ}+\frac{٣}{٢} & ١٠\text{ب}+٢\text{ء} \\ -٤\text{جـ}+\frac{٣}{٢} & -٤\text{ء}-٣ \end{pmatrix}$$

$\therefore ٦\text{ا}+١٠ = ١٠\text{ا}+٢\text{جـ}+\frac{٣}{٢}$ $\quad \therefore ٢\text{جـ} = \frac{١٧}{٢} - ٤\text{ا}$

$\text{جـ} = \frac{١٧}{٤} - ٢\text{ا}$ $\quad$ (١)

، $٣\text{ا}-٣\text{جـ}+٢ = -٤\text{جـ}+\frac{٣}{٢}$ $\quad \therefore ٣\text{ا}+\text{جـ} = \frac{-١}{٢}$ من (١)

$٣\text{ا} + \frac{١٧}{٤} - ٢\text{ا} = \frac{-١}{٢}$ $\quad \boxed{\text{ا} = \frac{-١٩}{٤}} \therefore \text{جـ} = \frac{١٧}{٤} + \frac{٣٨}{٤}$

$\boxed{\text{جـ} = \frac{٥٥}{٤}}$ ، $\because ٦\text{ب} = ١٠\text{ب} + ٢\text{ء}$ $\therefore \boxed{\text{ء} = -٢\text{ب}}$ (٢)

، $٣\text{ب} - ٣\text{ء} - ٢ = -٤\text{ء} - ٣$ ، $\therefore ٣\text{ب} + \text{ء} = -١$ من (٢)

$\therefore ٣\text{ب} - ٢\text{ب} = +١$ $\quad \therefore \boxed{\text{ب} = ١} \quad \therefore \boxed{\text{ء} = -٢}$

$$\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} \frac{-١٩}{٤} & ١ \\ \frac{٥٥}{٤} & -٢ \end{pmatrix}$$

مسائل على حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة

(١) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١٣ \end{pmatrix}$ .... (١)

$م = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ $\quad م^{-١} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

بضرب طرفى (١) من اليمين × $م^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ١ $\therefore$ الحل هو (٢ ، ١)، مجموعة الحل

$= \{(٢ ، ١)\}$

مثلها أرقام (٢)، (٣)، (٤)

(٥) $\begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ \\ -٤١ \end{pmatrix}$ ....(١)

$م = \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix} \therefore م^{-١} = \frac{١}{٧١}\begin{pmatrix} ٩ & ٢ \\ -٤ & ٧ \end{pmatrix}$

بضرب طرفى (١) من اليمين × $م^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{٧١}\begin{pmatrix} ٩ & ٢ \\ -٤ & ٧ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١٧ \\ -٤١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٥ \end{pmatrix}$

$\therefore$ م.ح = $\{(١ ، -٥)\}$

(٦) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ١ \end{pmatrix}$ .....(١)

محدد مصفوفة المعاملات

$= \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٢\times -٧ - ١\times ٧ - ١\times ٧ = -٢٨$

المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات $= \frac{-١}{٢٨}\begin{pmatrix} -٧ & -٥ & ١ \\ -٧ & ٧ & -٧ \\ ٧ & -٣ & -٥ \end{pmatrix}$

بضرب طرفى (١) من اليمين × $م^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = -\frac{١}{٢٨}\begin{pmatrix} -٧ & -٥ & ١ \\ -٧ & ٧ & -٧ \\ ٧ & -٣ & -٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix}$

$\therefore$ م.ح = $\{(٢ ، ١ ، -١)\}$.

مثلها أرقام ٧ ، ٨ ، ٩

(١٠)

$|م| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ١ & ٢ & -٥ \\ ١ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٣\times -١١ - ٢\times ٧ - ١\times -٥ = -٤٢$

$م^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ٢ & ٢ & -٥ \\ -١ & -٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $م^{مل} = \begin{pmatrix} -١١ & -١ & -٨ \\ -٧ & ٧ & ١٤ \\ -٥ & ١١ & ٤ \end{pmatrix}$

$م^{-١} = \frac{-١}{٤٢}\begin{pmatrix} -١١ & -١ & -٨ \\ -٧ & ٧ & ١٤ \\ -٥ & ١١ & ٤ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{-١}{٤٢}\begin{pmatrix} -١١ & -١ & -٨ \\ -٧ & ٧ & ١٤ \\ -٥ & ١١ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١٩ \\ ١٥ \\ -٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \\ -١ \end{pmatrix}$

$\therefore$ م.ح = $\{(٤ ، ٣ ، -١)\}$

مثلها أرقام ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤

(١٥) س-ص+٣ع=٠ ، ٣س+٢ص+ع=٠ ، س-٤ص+٥ع=٠

المعادلات ص $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & -٤ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ .....(١)

$|م| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & -٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١\times ١٤ + ١\times ١٤ + ٣\times -١٤ = -١٤ \neq ٠$

$\therefore$ المعادلات لها حل وحيد هو الحل الصفرى

$\therefore$ م.ح = $\{(٠ ، ٠ ، ٠)\}$

(١٦) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix}$ ......(١)

$|م| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١\times ١ - ١\times -١ + ٠ = ٢$

$م^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، $م^{مل} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ١ & ١ & -١ \\ -١ & +١ & ١ \end{pmatrix}$

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ١ & ١ & -١ \\ -١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ بضرب طرفي (١) من اليمين × $\text{أ}^{-١}$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ١ & ١ & -١ \\ -١ & ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ م.ح = $\{(١ ، ٣ ، -٢)\}$

حل: أي المعادلات الآتية لها حل خلاف الحل الصفرى وأيها لها حل وحيد

(١٧) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ١\times ٠ ٠ ٠ ٤ \times -٧ - ٢\times ٢١$
$= ٢٨ - ٤٢ = -١٤ \neq ٠$

$\therefore$ المعادلات لها حل وحيد هو الحل الصفرى أى لا يوجد حل سوى الحل الصفرى

(١٨) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ & -٣ \\ ٣ & ٥ & -٢ \\ ٥ & ١ & -٧ \end{vmatrix} = ١\times -٣٣ + ٣\times -١١ - ٣\times -٢٢ =$ صفر

$\therefore$ يوجد لها عدد لا نهائى من الحلول أى لها حل خلاف الحل الصفرى.

(١٩) بوضع $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ \text{ك} & -٤ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore -٨ + ٣\text{ك} = ٠ \quad \therefore ٣\text{ك} = ٨$

$\text{ك} = \frac{٨}{٣}$ لكى يكون للمعادلات حل وحيد $\therefore |\text{أ}| \neq ٠ \quad \therefore \text{ك} \neq \frac{٨}{٣}$.

$(\text{ك}+١)\ (\text{ك}+١)\ (\text{ك}-٢) = ٠$

$\therefore \text{ك} = -١$ أ، $\text{ك} = ٢$

$\therefore$ لكى يكون للمعادلات حل وحيد

$\therefore |\text{أ}| \neq ٠ \quad \therefore \text{ك} \in [\text{ح} - \{-١ ، ٢\}]$

(٢٠) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{ك} & ١ \\ ٤ & \text{ك} \end{vmatrix} = \text{ك}^{٢} - ٤$

$\therefore$ المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول

عندما $|\text{أ}| = ٠ \quad \therefore \text{ك}^{٢} - ٤ = ٠ \quad \therefore \text{ك}^{٢} = ٤ \quad \therefore \text{ك} = \pm ٢$

(٢١) المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول عندما $|\text{أ}| = ٠$

$\therefore \begin{vmatrix} \text{ك} & ١ & -١ \\ ١ & -١ & ٣ \\ ١ & ٢\text{ك}+١ & -١١ \end{vmatrix} = ٠ \quad \therefore \text{ك}(١١ - ٦\text{ك} - ٣) - ١\times -١٤$
$- ١\times(٢\text{ك}+١+١) = ٠$

$٨\text{ك} - ٦\text{ك}^{٢} + ١٤ - ٢\text{ك} - ٢ = ٠$

$-٦\text{ك}^{٢} + ٦\text{ك} + ١٢ = ٠ \qquad \div -٦$

$\text{ك}^{٢} - \text{ك} - ٢ = ٠ \qquad (\text{ك} - ٢)(\text{ك} + ١) = ٠ ، \text{ك} = ٢ ، \text{ك} = -١$

(٢٢) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ٠ \quad \therefore ٤\text{ك} - ٦ = ٠ \quad \therefore \text{ك} = \frac{٣}{٢}$

المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول عندما $\text{ك} = \frac{٣}{٢}$

(٢٣) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ -١ & \text{ك}-١ \end{vmatrix} = ٠ \quad \therefore \text{ك} - ١ - ٢ = ٠ \quad \therefore \text{ك} = ٣$

$\therefore$ عندما $\text{ك} = ٣$ يكون $|\text{أ}| = ٠$

$\therefore$ المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول

(٢٤) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٥ & \text{ك}+١ \\ \text{ك}-١ & ٣ \end{vmatrix} = ٠ \quad \therefore \text{ك}^{٢} - ١ - ١٥ = ٠ \quad \therefore \text{ك}^{٢} = ١٦$

$\therefore \text{ك} = \pm ٤$ تجعل المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول.

إيجاد رتبة المصفوفة

(١) $\text{أ} = (-٥ \quad ٠ \quad ٠)$ ، ء$(\text{أ}) = ١$

(٢) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$ $\text{ر}(\text{أ}) = ١$

(٣) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ $\text{ر}(\text{أ})$ صفر

(٤) $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٩ & ٦ \\ -٦ & ٤ \end{pmatrix}$ $\because |\text{أ}| =$ صفر $\therefore \text{ر}(\text{أ}) = ١$

(٥) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ $\text{ر}(\text{أ}) = ١$

(٦) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١+\text{ت} & -٢ \\ -١ & ١-\text{ت} \end{pmatrix}$ $|\text{أ}| = ١ - \text{ت}^{٢} - ٢ = ٢ - ٢ = ٠$

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) = ١$

(٧) $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -٤ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٤ & ٠ \end{vmatrix} = ٨ \ne ٠$ ∴ $ر(أ) = ٢$

(٨) $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ -٣ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ∵ قيم جميع المحددات ٢ × ٢ = صفر

∴ $ر(أ) = ١$

(٩) $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ ٤ & -١٢ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ∵ المحددات الثنائية جميعها قيمها

أصفار ∴ $ر(أ) = ١$

(١٠) $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ∴ $|أ| = ١ \ne ٠$ ∴ $ر(أ) = ٢$

(١١) $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٠ \\ ٦ & ٤ & ٠ \\ ٩ & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ ∵ $|أ| = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٩ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$

$\begin{vmatrix} ٦ & ٤ \\ ٩ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ ∵ المحددات الثنائية قيمها أصفار

∴ $ر(أ) = ١$

(١٢) $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \ne ٠$ ∴ $ر(أ) = ٣$

(١٣) ع٢ ← ع٢ − ٢ع١

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٥ \\ ٢ & ٠ & ٨ \end{vmatrix} = ٠$

$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ٦ = ٤ \ne ٠$ ∴ $ر(أ) = ٢$

(١٤) $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ -٢ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \times ٦ = ١٢ \ne ٠$ ∴ $ر(أ) = ٣$

(١٥) $|أ| = \begin{vmatrix} -١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = -(-١) \times -٢ = -٢ \ne ٠$

∴ $ر(أ) = ٣$

(١٦) ع٣ ← ع٣ + ٢ع١

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ٤ & -٢ & ٢ \\ -٢ & ١ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ ٠ & -٢ & ٢ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix} = ٠$

$= \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{vmatrix} = ٠$ ع٢ ← ع٢ + ع٣

∴ $ر(أ) = ١$

(١٧) $أ_{٣\times٤}$ ∴ $ر(أ) > ٣$ ، $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ٥ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$

ع٢ ← ع١ + ع٢

$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ١ \times ١٢ - ٢ \times ٩ + ٢ \times ٣ = ١٢ - ١٨ + ٦ = ٠$

$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ & ١ \\ ١ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١ \times ٢١ - ٣ \times ٩ + ٢ \times ٣ = ٢١ - ٢٧ + ٦ = ٠$

$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢١ - ٣ \times ١٢ + ٢ \times -٣ = ٤٢ - ٣٦ - ٦ = ٠$

∴ جميع المحددات الثلاثية = ٠، $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ - ٥ = ٣ \ne ٠$

∴ $ر(أ) = ٢$.

(١٨) $أ_{٣\times٤}$ ∴ $ر(أ) > ٣$ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ١ & -١ \\ -١ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & -١ & ٠ \\ ٥ & ١ & -٢ \\ ٣ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

ع١ ← ع١ + ٢ع٢ ، ع٣ = ع٣ − ع٢

$= +١(٢٠ + ٦) = ٢٦ \ne ٠$ ∴ $ر(أ) = ٣$

(١٩) $|أ| = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦ \ne ٠$ $ر(أ) = ٣$

$(أ+ب) = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ∴ $|أ+ب| = ٤ \times ٣ \times ١ = ١٢ \ne ٠$

∴ $ر(أ+ب) = ٣ = ر(أ)$.

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&0\end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 ،\ \text{ر}(\text{ب}) = 2$

$\text{أب} = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$

$|\text{أب}| = 0 \ ، \begin{vmatrix}3&0\\0&2\end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \therefore \text{ر}(\text{أب}) = 2$

$\therefore \text{ر}(\text{أب}) = \text{ر}(\text{ب}) = 2$

بحث إمكانية الحل

(١) $\text{ا}^* = \left(\begin{array}{cc|c}3&-1&11\\1&-3&9\end{array}\right) \qquad |\text{ا}| = -9+1 = -8 \neq 0$

$\therefore \text{ر}(\text{ا}) = 2 ،\ \text{ر}(\text{ا}^*) = 2$ ∴ يوجد حلَ وحيد

$\text{ا}^{-1} = \frac{-1}{8}\begin{pmatrix}-3&1\\-1&3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ الحل هو (٣ ، - ٢)

(٢) $\text{ا}^* = \left(\begin{array}{cc|c}7&4&3\\21&12&15\end{array}\right) \therefore |\text{ا}| = \begin{vmatrix}7&4\\21&12\end{vmatrix} = 0 \therefore \text{ر}(\text{ا}) = 1$

$\begin{vmatrix}7&3\\21&15\end{vmatrix} = 105 - 63 \neq 0 \quad \therefore \text{ر}(\text{ا}^*) = 2 \neq \text{ر}(\text{ا})$

∴ لا يوجد للمعادلات حل.

(٣) $\text{ا}^* = \left(\begin{array}{cc|c}3&-2&1\\9&-6&13\end{array}\right) \quad \therefore |\text{ا}| = 0 \quad \therefore \text{ر}(\text{ا}) = 1$

$|\text{ا}^*| = \begin{vmatrix}3&1\\9&13\end{vmatrix} = 39 - 9 = 30 \neq 0 \quad \text{ر}(\text{ا}^*) = 2 \neq \text{ر}(\text{ا})$

∴ المعادلات ليس لها حل

(٤) $\text{ا}^* = \left(\begin{array}{cc|c}2&-1&3\\4&-2&6\end{array}\right) \quad \because |\text{ا}| = 0 \quad \therefore \text{ر}(\text{ا}) = 1$

$\text{ر}(\text{ا}^*) < 3 ،\ \because \begin{vmatrix}2&-1\\4&-2\end{vmatrix} = 0 ،\ \begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix} = 0 ،\ \begin{vmatrix}-1&3\\-2&6\end{vmatrix} = 0$

$\therefore \text{ر}(\text{ا}^*) = \text{ر}(\text{ا}) = 1 !$

∴ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول

المعادلات هي ٢ س - ص =٣

بوضع س = ل ∴ ص = ٢ ل - ٣

∴ صورة الحل هي (ل ، ٢ ل - ٣)

(٥) $|\text{ا}| = \begin{vmatrix}3&-5\\1&2\end{vmatrix} = 6 + 5 = 11 \neq 0$

∴ المعادلات لها حل وحيد هو الحل الصفرى (٠، ٠)

المعادلات: $\frac{4}{3}\text{س} - \text{ص} = 0 ،\ -4\text{س} + 3\text{ص} = 0$

(٦) $|\text{ا}| = \begin{vmatrix}\frac{4}{3}&-1\\-4&3\end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

المعادلات هي - ٤ س + ٣ ص = ٠

بوضع س = ٣ ل ∴ ٣ ص = ١٢ ل ∴ ص = ٤ ل

صورة الحل هي (٣ل ، ٤ ل)

(٧) $\text{ا}^* = \left(\begin{array}{cc|c}3&1&4\\6&2&8\end{array}\right) \quad |\text{ا}| = 0 \quad \therefore \text{ر}(\text{ا}) = 1$

$\text{ر}(\text{ا}^*) < 2 \therefore \begin{vmatrix}3&1\\6&2\end{vmatrix} = 0 ،\ \begin{vmatrix}3&4\\6&8\end{vmatrix} = 0 ،\ \begin{vmatrix}1&4\\2&8\end{vmatrix} = 0$

$\therefore \text{ر}(\text{ا}^*) = 1 = \text{ر}(\text{ا})$ ∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

المعادلات هى ٣ س + ص = ٤

بوضع س = ل ∴ ص = ٤ - ٣ ل

صورة الحل هى (ل ، ٤ - ٣ل)

(٨) $\text{ا}^* = \left(\begin{array}{cc|c}3&2&4\\5&1&0\\2&-2&1\end{array}\right) \qquad |\text{ا}^*| = \begin{vmatrix}3&2&4\\5&1&0\\2&-2&1\end{vmatrix}$

$= 3\times1 - 2\times5 + 4\times-12 = -55 \neq 0 \quad \therefore \text{ر}(\text{ا}^*) = 3$

$\text{ر}(\text{ا}) < 3 \therefore \begin{vmatrix}3&2\\5&1\end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0 \quad \text{ر}(\text{ا}) = 2$

$\therefore \text{ر}(\text{ا}^*) \neq \text{ر}(\text{ا})$ ∴ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق

(٩) $A^* = \left(\begin{array}{cc|c}3&1&15\\3&1&8\\12&4&19\end{array}\right) = |A^*| = \begin{vmatrix}3&1&15\\3&1&8\\12&4&19\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}3&1&15\\0&0&-7\\0&0&-41\end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \begin{vmatrix}1&15\\0&-7\end{vmatrix} = -7 \neq 0$

∴ ر$(A^*) = 2$ ، ∵ ر$(A) = 1$

---

(١٠) ∴ ر$(A^*) \neq$ ر(A) ∴ المعادلات ليس لها حل

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&3&1\\2&5&4&4\\1&-3&-2&5\end{array}\right) \quad \because |A| = \begin{vmatrix}1&4&3\\2&5&4\\1&-3&-2\end{vmatrix}$

$= 1\times2 - 4\times-8 + 3\times-11 = 2+32-33 = 1 \neq 0$

ر$(A) = 3$ ، ر$(A^*) < 4$ ∴ ر$(A^*) = 3 =$ ر$(A) =$ عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها حل وحيد فقط.

$\because A^{-1} = \frac{1}{1} \times \begin{pmatrix}2&-1&1\\8&-5&2\\-11&7&-3\end{pmatrix}$ ∴ الحل هو س = A^{-1} ج

$\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&1\\8&-5&2\\-11&7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$

∴ الحل هو (٣ ، -٢ ، ٢)

---

(١١) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&2\\1&-4&-13&14\\-3&5&4&2\end{array}\right) \quad |A| = \begin{vmatrix}1&-2&-3\\1&-4&-13\\-3&5&4\end{vmatrix}$

$= 1\times49 + 2\times-35 - 3\times-7 = 49-70+21 = 0$

∴ ر$(A) = 2$ ، ر$(A^*) < 4$

$\begin{vmatrix}1&-2&2\\1&-4&14\\-3&5&2\end{vmatrix} = 1\times-78 + 2\times44 + 2\times-12 = -14 \neq 0$

∴ ر$(A^*) = 3 \neq$ ر(A) ∴ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق.

---

(١٢) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&-1&2&-2\\3&-1&5&-3\end{array}\right)$

$|A^*| = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&2&-2\\3&-1&5&-3\\0&0&0&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&-3\\0&-4&2&-6\\0&0&0&0\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}$

∴ ر $(A^*) =$ ر $(A) = 2 =$ أقل من عدد المجاهيل

∴ يوجد للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول.

المعادلات هى -٢ص + ع = -٣

بوضع ص = ل ∴ ع = ٢ل - ٣

، س + ص + ع = ١ ∴ س + ل + ٢ل -٣ = ١

س = ٤ - ٣ل

صورة الحل هى (٤ - ٣ل ، ل ، ٢ل -٣)

---

(١٣) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&19\\1&2&-5&15\\1&-3&2&-7\end{array}\right) \quad \because |A| = \begin{vmatrix}3&2&-1\\1&2&-5\\1&-3&2\end{vmatrix} =$

$= 3\times-11 - 2\times7 - 1\times-5 = -33-14+5 = -42 \neq 0$

∴ ر$(A) = 3$، ر$(A^*) < 4$ ∴ ر$(A^*) = 3 =$ ر$(A) =$ عدد المجاهيل

∵ يوجد للمعادلات حل واحد فقط

$\because A^{-1} = \frac{1}{-42} \times A_{مر} = \frac{1}{-42}\begin{pmatrix}-11&-1&-8\\-7&7&14\\-5&-11&4\end{pmatrix}$

∴ الحل هو $\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \frac{-1}{42}\begin{pmatrix}-11&-1&-8\\-7&7&14\\-5&-11&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\15\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$

الحل هو (٤ ، ٣ ، -١)

---

(١٤) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&-2&2\\0&2&-1&-1\\3&-5&0&3\end{array}\right) \quad \therefore |A| = \begin{vmatrix}3&-1&-2\\0&2&-1\\3&-5&0\end{vmatrix} =$

$= 3\times-5 + 1\times3 - 2\times-6 = -15+3+12 = 0$

∴ ر $(A) = 2$ ، ر $(A^*) < 4$ فأخذ المحددات الثلاثية

$$\begin{vmatrix}-١&-٢&٢\\٢&-١&-١\\-٥&٠&٣\end{vmatrix} = -١\times-٣+٢\times١+٢\times-١٠ = ٣+٢-٢٠ = -١٥ \neq ٠$$

∴ ر(أ*) = ٣ ≠ ر(أ) ∴ لا يوجد للمعادلات حل على الإطلاق

(١٥) ر(أ*) = ر(أ) = ٢ ∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول والحل مثل رقم (١٢) تماماً

(١٦) $|أ| = \begin{vmatrix}١&٤&-٢\\٢&-٣&١\\٥&٣&-١\end{vmatrix} = ١\times٠-٤\times-٧-٢\times٢١ = ٢٨-٤٢ = -١٤ \neq ٠$

∴ يوجد حل وحيد هو الحل الصفرى (٠ ، ٠ ، ٠) أى لا يوجد حل سوى الحل الصفرى.

(١٧) $|أ| = \begin{vmatrix}١&-٣&-٣\\٣&٥&-٢\\٥&١&-٧\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}١&-٣&-٣\\٠&١٤&٧\\٠&١٦&٨\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}١&-٣&-٣\\٠&١٤&٧\\٠&٠&٠\end{vmatrix}$

ر(أ) = ٢ أقل من عدد المجاهيل

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

المعادلات هي ١٤ ص + ٧ ع = ٠ ∴ ٢ ص + ع = ٠

، س − ٣ ص − ٣ ع = ٠

بفرض ص = ل ∴ ع = −٢ ل

س − ٣ ل + ٦ ل = ٠ ، س = −٣ ل

صورة الحل هى (−٣ ل ، ل ، −٢ ل)

إمكانية حل المعادلات

(١) $أ^* = \begin{pmatrix}١&ك&|&٢\\ك&٤&|&ك+٢\end{pmatrix}$ ، $|أ| = \begin{vmatrix}١&ك\\ك&٤\end{vmatrix} = ٤-ك^٢$

بوضع |أ| = ٠ ∴ ٤ − ك² = ٠ ∴ ك² = ٤ ∴ ك = ±٢

عندما ك ≠ ±٢ ∴ يوجد حل وحيد لأن ر(أ*) = ر(أ) = ٢ = عدد المجاهيل

عند ك = ٢ ∴ $أ^* = \begin{pmatrix}١&٢&|&٢\\٢&٤&|&٤\end{pmatrix}$ جميع المحددات الثنائية قيمتها = ٠

∴ ر(أ*) = ر(أ) = ١ أقل من عدد المجاهيل أى يوجد عدد لا نهائي من الحلول

وعند ك = −٢

∴ $أ^* = \begin{pmatrix}١&-٢&|&٢\\-٢&٤&|&٠\end{pmatrix}$ ر(أ*) < ٣ ، ∵ $\begin{vmatrix}١&٢\\-٢&٠\end{vmatrix} = ١ \neq ٠$

∴ ر(أ*) = ٢ ، لكن ر(أ) = ١ ≠ ر(أ*) ∴ لايوجد حل على الإطلاق

(٢) $أ^* = \begin{pmatrix}١&١&-١&|&١\\٢&٥&ك&|&٥\\١&ك&٥&|&٢\end{pmatrix}$ بوضع |أ| = ٠ ∴ $\begin{vmatrix}١&١&-١\\٢&٥&ك\\١&ك&٥\end{vmatrix} = ٠$

∴ ١×[٢٥ − ك²] − ١ × [−ك] − ١ × [٢ك − ٥] = ٠

∴ ٢٥ − ك² − ١٠ + ك − ٢ك + ٥ = ٠ ∴ −ك² − ك + ٢٠ = ٠

∴ ك² + ك − ٢٠ = ٠ (ك − ٤) (ك + ٥) = ٠ ∴ ك = ٤ ، ك = −٥

∴ عندما ك ≠ ٤ ، ك ≠ −٥ ∴ |أ| ≠ ٠ ∴ ر(أ) = ٣ ، ر(أ*) < ٤

∴ ر(أ*) = ٣ = ر(أ) = عدد المجاهيل ∴ يوجد حل وحيد عند ك ≠ ٤ ، ك ≠ −٥

عند ك = −٥ ر(أ) = ٢ بينما ر(أ*) < ٤ نبحث المحددات الثلاثية

$$\begin{vmatrix}١&١&١\\٢&٥&٥\\١&-٥&٢\end{vmatrix} = ١\times٣٥-١\times١+١\times-١٥ = ٢١ \neq ٠$$

∴ ر(أ*) = ٣ ≠ ر(أ) ∴ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق.

عند ك = ٤ ، ر(أ) = ٢ ، ر(أ*) < ٤

$$\begin{vmatrix}١&١&١\\٢&٥&٥\\١&٤&٢\end{vmatrix} = ١\times-١٠-١\times-١+١\times٣ = -٦ \neq ٠$$

∴ ر(أ*) = ٣ ≠ ر(أ) ∴ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق.

، لا توجد قيمة لـ ك تجعل المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول.

(٣) $أ^* = \begin{pmatrix}١&١&ك&|&١\\١&ك&١&|&١\\ك&١&١&|&١\end{pmatrix}$ بوضع |أ| = ٠

∴ $\begin{vmatrix}١&١&ك\\١&ك&١\\ك&١&١\end{vmatrix} = ١\times(ك-١)-١\times(١-ك)+ك(١-ك^٢) = ٠$

∴ (ك − ١) + (ك − ١) − ك (ك − ١) (ك + ١) = ٠

(ك − ١) [١ + ١ − ك² − ك] = ٠

$(ك-١)\left(-ك^{٢}-ك+٢\right)=٠$

∴ $(ك-١)=٠$ أو $ك^{٢}+ك-٢=٠$ ∴ $(ك-١)(ك+٢)=٠$

∴ $ك=١$ أو $ك=-٢$

عندما $ك \neq ١$ ، $ك \neq -٢$ يوجد للمعادلات حل وحيد فقط

عند $ك=١$ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ ،

المحددات الثنائية جميعها قيمها=٠ ∴ ر (أ) = ١ بالمثل ر (أ*) =١

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ١ أقل من عدد المجاهيل ∴ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول.

عند $ك=-٢$ ∴ $|أ|=٠$ ∴ ر (أ) < ٣ نبحث المحددات الثنائية

$\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٣ \neq ٠$ ∴ ر(أ) = ٢ ∵ ر (أ*) < ٤

نبحث المحددات الثلاثة خلاف (أ)

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = ١ \times -٣ - ١ \times ٣ + ١ \times -٣ = -٩ \neq ٠$

∴ ر (أ*) = ٣ ≠ ر (أ) ∴ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق.

(٤) $أ^{*} = \left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ٢ & ٣ & ١ \\ ك & ٣ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ١ & ١ & ك \end{array}\right)$ بوضع $|أ| = ٠$

∴ $٣ \times [١] - ٣ \times [٢ - ٣ك] + ٢ \times [٢ - ٤ك] = ٠$

$١ - ٦ + ٩ك + ٤ - ٨ك = ٠$ ∴ $ك = ١$

∴ عندما $ك \neq ١$ ∴ $|أ| \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٣ ، ر (أ*) = ٣ =

ر(أ) = عدد المجاهيل ∴ يوجد حل وحيد فقط.

عند ك = ١ ر (أ) = ٢ ، ر (أ*) < ٤ نبحث المحددات الثلاثية

$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ١ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times -١ - ١ \times -١ = -١ + ١ = ٠ ، \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

$= ١ \times -١ - ٢ \times -١ + ١ \times -١ = ٠ ، \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix} =$

$= ٣ \times -١ - ٢ \times -١ + ١ \times ١ = ٠$ ∴ جميع المحددات الثلاثية فيها=٠.

∴ ر (أ*) = ٢ = ر (أ) = أقل من عدد المجاهيل ∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

، لا توجد قيمة لـ ك تجعل المعادلات ليس لها حل على الإطلاق.

(٥) ، (٦) مثل رقم (٤)

(٧) $أ^{*} = \left(\begin{array}{c|ccc} ٢ & ك & ١ & ١ \\ ٥ & ٤ & ك & ٢ \end{array}\right)$ ∵ $أ_{٢ \times ٣}$ ∴ ر(أ) ≤ ٢ ، $أ^{*}_{٢ \times ٤}$ ∴ ر(أ*) ≤ ٢

∴ لا توجد قيمة لـ ك تجعل المعادلات لها حل وحيد.

$\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ك & ٢ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ ك = ٢ عندما ك ≠ ٢ ∴ ر(أ) = ٢

، ر (أ*) = ٢ = ر (أ) = أقل من عدد المجاهيل.

∴ عند ك ≠ ٢ يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

عند ك = ٢ جميع المحددات الثنائية من أ قيمها = ٠ ∴ ر (أ) = ١

لكن $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ - ٤ = ١ \neq ٠$ ∴ ر(أ*) = ٢ ≠ ر (أ)

∴ عند ك = ٢ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق.

(٨) أولاً: عند ك = ١ $أ^{*} = \left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \end{array}\right)$

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ وجميع المحددات الثنائية قيمها = ٠

∴ ر (أ) = ١ أيضاً ر (أ*) = ١ = ر (أ) = أقل من عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول.

ثانياً: عند ك = −١

∴ $أ^{*} = \left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ١ & ١ & -١ \\ -١ & ١ & -١ & ١ \\ ١ & -١ & ١ & ١ \end{array}\right)$ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ١ & -١ & ١ \\ -١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢ = ٤ \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٣

∴ ر(أ*) = ٣ = ر (أ) = عدد المجاهيل ∴ يوجد للمعادلات حل وحيد.

$أ^{-١} = \frac{١}{٢} \times أ^{مل} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ∵ الحل هو $س = أ^{-١} ع$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ -١ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ الحل هو (٠، ١، ٠)

ثالثاً : عند ك = - ٢

$أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} -٢ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ & -٢ \\ ١ & ١ & -٢ & ٤ \end{array}\right)$ ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٠$

$\begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ + ٢ = ٣ \neq ٠$ ∴ $ر(أ) = ٢$

∵ $ر(أ^{*}) < ٤$ نبحث المحددات الثلاثية خلاف $|أ|$.

$\begin{vmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & -٢ \\ ١ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ١ & -٢ & -٢ \\ ١ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٣ \times (١ + ٢) = ٩ \neq ٠$

∴ $ر(أ^{*}) = ٣ \neq ر(أ)$ ∴ لا يوجد للمعادلات حل على الإطلاق.

(٩) $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -ك & ٤ & ١ \\ ك & -١ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & -٤ & ١ \end{array}\right)$

بوضع $|أ| = ٠$ ∴ $\begin{vmatrix} ٢ & -ك & ٤ \\ ك & -١ & ٠ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{vmatrix} = ٢[ك] + ك \times [-٤ك] + ٤ \times [٢ك + ١] = ٠$

∴ $٨ - ٤ك^{٢} + ٨ك + ٤ = ٠$

∴ $-٤ك^{٢} + ٨ك + ١٢ = ٠ \div -٤$

∴ $ك^{٢} - ٢ك - ٣ = ٠$ ∴ $(ك - ٣)(ك + ١) = ٠$

∴ $ك = ٣$ ، $ك = -١$

عند ك = ٣ ∴ $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -٣ & ٤ & ١ \\ ٣ & -١ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & -٤ & ١ \end{array}\right)$ ∵ $ر(أ^{*}) < ٤$

نبحث المحددات الثلاثية خلاف $|أ|$

$\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times -٥ + ٣ \times ١ + ١ \times ٧ = ٠$ ،

$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \\ ١ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ٨ - ٤ \times ١ + ١ \times -١٢ = ٠$ ،

$\begin{vmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = -٣ \times ٨ - ٤ \times -٥ + ١ \times ٤ =$ صفر

∵ قيم جميع المحددات الثلاثية من $أ^{*} = ٠$

∴ $ر(أ^{*}) = ٢$

المحدد الثانى من أ مثل $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٢ + ٩ = ٧ \neq ٠$

∴ $ر(أ) = ٢ = ر(أ^{*})$ = أقل من عدد المجاهيل

∴ يوجد عدد لا نهائى من الحلول.

عند ك = - ١

$أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ١ & ٤ & ١ \\ -١ & -١ & - & ٢ \\ ١ & ٢ & -٤ & ١ \end{array}\right)$ المحدد الثانى من أ

$\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & -١ \end{vmatrix} = -٢ + ١ = -١ \neq ٠$ $ر(أ) = ٢$

$ر(أ^{*}) < ٤$ ناخذ المحددات الثلاثية $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{vmatrix} =$

$= ٢ \times -٥ - ١ \times -٣ + ١ \times -١ = -٨ \neq ٠$ ∴ $ر(أ^{*}) = ٣$

∵ $ر(أ^{*}) \neq ر(أ)$

∴ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق.

(١٠) $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ك \\ ٢ & -١ & ١ & ل \\ ٣ & ٢ & ٣ & م \end{array}\right)$ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -٧ & -٣ \\ ٠ & -٧ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -٧ & -٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ر(م) = ٢ ، ر(م*) < ٤ ، المحددات الثلاثية

$$\because \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ك \\ ٢ & -١ & ل \\ ٣ & ٢ & م \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ك \\ ٠ & -٧ & ل-٢ك \\ ٠ & -٧ & م-٣ك \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ك \\ ٠ & -٧ & ل-٢ك \\ ٠ & ٠ & م-ل-ك \end{vmatrix}$$

عندما م - ل - ك = ٠ ر(م*) = ٢

∴ ر(م*) = ر(م) = ٢ = أقل من عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول أي لها أكثر من حل وذلك

عندما: م - ل - ك = ٠ أي عندما ك + ل - م = صفر

---

(١١) $م^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ & جـ \\ ١ & ٤ & ١٠ & جـ^{٢} \end{array}\right)$ ∵ $|م| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٤ & ١٠ \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ٩ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$ ∴ ر(م) = ٢

المحددات الثلاثية من م* $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & جـ \\ ١ & ٤ & جـ^{٢} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & جـ-١ \\ ٠ & ٣ & جـ^{٢}-١ \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & جـ-١ \\ ٠ & ٠ & جـ^{٢}-٣جـ+٢ \end{vmatrix}$$

بوضع جـ^{٢} - ٣ جـ + ٢ = ٠

∴ (جـ - ١) (جـ - ٢) = ٠

جـ = ١ ، جـ = ٢

عند هذه القيم جميع المحددات الثلاثية من م* قيمها = ٠

∴ ر(م*) = ٢

∴ ر(م*) = ر(م) = ٢ أقل من عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول (أي لها حل)

عندما جـ = ١ ، جـ = ٢.

المجموعة الثالثة

تمارين (٣ - ٢) من الكتاب المدرسي

(١)(م) $|م| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = ١٨ - ٢٠ = -٢ \neq ٠$ غير منفردة

(ب) $|ب| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{vmatrix} = -١٢ + ١٢ = ٠$

∴ $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة

(ج) $|جـ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ١٢ = -٢ \neq ٠$ غير منفردة

(د) $|ء| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٦ \end{vmatrix} = ١٢ + ١٢ = ٢٤ \neq ٠$ غير منفردة

الجواب (ب)

---

(٢) $\begin{vmatrix} س & ١ \\ -٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ ٢س + ٤ = ٠ ∴ س = -٢ الجواب (م)

---

(٣) (م) $|م| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = ٢ + ١ = ٣$ لها معكوس ضربي

(ب) |ب| = -٤ لها معكوس ضربي

(ج) $|جـ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$

∴ المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي

(د) |ء| = ٣ - ٢ = ١ ≠ ٠ لها معكوس ضربي

الجواب (ج)

---

(٤) $(م ب)^{-١} = ب^{-١} م^{-١}$

---

(٥) ∵ المصفوفة منفردة ∴ قيمة محددها = ٠

(م) $\begin{vmatrix} س-٣ & ٢ \\ ٧ & س+٢ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ س^{٢} - س - ٦ - ١٤ = ٠

س^{٢} - س - ٢٠ = ٠ ، (س-٥) (س+٤) = ٠

س = ٥ أ، س = -٤

(ب) ∵ $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢س & ٣س & س+١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$

∴ $\begin{vmatrix} ٠ & -١ & ٠ \\ ١١س & ٣س & ١٠س+١ \\ ١٠ & ٢ & ١٠ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore \begin{vmatrix} س & \frac{4}{5}س & س-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ، $10\,(-1 + س - 0) = 0$ $\therefore$ س $= 1$

(ج) $\because \begin{vmatrix} س+4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & س-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} س+4 & 2 & 1 \\ -5س-17 & -6 & 0 \\ 3-س & س-3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$(س-3)\begin{vmatrix} س+4 & 2 & 1 \\ -5س-17 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$(س-3)\begin{vmatrix} س+4 & س+6 & 1 \\ -5س-17 & -5س-23 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$-(س-3)\begin{vmatrix} 1 & س+6 & س+4 \\ 0 & -(5س+23) & -5س-17 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\therefore$ إما س $- 3 = 0$ $\therefore$ س $= 3$

أو $-1 \times (5س + 23) \times -1 = 0$ ، س $= \frac{-23}{5}$

$\therefore$ س $= 3$ أو س $= \frac{-23}{5}$

(٦) (أ) $|أ| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0$

$أ^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(ب) $|ب| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ ، $ب^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(ج) $|جـ| = \begin{vmatrix} جا\theta & جتا\theta \\ جتا\theta & جا\theta \end{vmatrix} = جا^2\theta - جتا^2\theta = -جتا2\theta$

$\therefore جـ^{-1} = \frac{-1}{جتا2\theta}\begin{vmatrix} جا\theta & -جتا\theta \\ -جتا\theta & جا\theta \end{vmatrix}$

(د) $|د| = \begin{vmatrix} قا\theta & ظا^2\theta \\ 1 & قا\theta \end{vmatrix} = قا^2\theta - ظا^2\theta = 1 \neq 0$

$\therefore د^{-1} = \begin{vmatrix} قا\theta & -ظا^2\theta \\ -1 & قا\theta \end{vmatrix}$

(هـ) $|هـ| = 27 \neq 0$

$هـ = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\therefore هـ^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(و) $|و| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ مصفوفة المرافقات

$\therefore$ المصفوفة و هى $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$و_{مل} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $و^{-1} = \frac{1}{|و|} \times و_{مل}$

$\therefore و^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ز) $|ز| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\therefore$ ز مرافقات $= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$ز^{-1} = \frac{1}{|ز|} \times ز_{مل} = \frac{1}{1} \times ز_{مل}$ $\therefore ز^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ح) $|ح| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times 5 - 2 \times 1 + 3 \times -7 = 5 - 2 - 21 = -18$

ح مرافقات $= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$\because ج^{-1} = \frac{1}{|ج|} \times ج^{مد}$

$\therefore ج^{-1} = -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(٧) $اب = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

$|اب| = 2$ ، $(اب)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ .... (١)

$|ب| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$

$ب^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $|ا| = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 2 = 2$

$ا^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$ب^{-1} ا^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) $\therefore (اب)^{-1} = ب^{-1} ا^{-1}$

(٨) $|ا| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$ ، $|ا^{مد}| = 6$

$ا^{مرافقات} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\because ا^{-1} = \frac{1}{|ا|} \times ا^{مد}$ $\therefore ا^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(ا^{-1})^{مد} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ....(١)

$(ا^{مد})^{مرافقات} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(ا^{مد})^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) $\therefore (ا^{مد})^{-1} = (ا^{-1})^{مد}$

(٩) $ا^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 17 & -16 & 20 \\ -3 & 9 & -15 \\ -5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$|ا^2| = \begin{vmatrix} 17 & -16 & 20 \\ -3 & 9 & -15 \\ -5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

$= 17 \times 96 + 16 \times -87 + 20 \times 33 = 900$

$(ا^2)^{مرافقات} = \begin{pmatrix} 96 & 87 & 33 \\ 144 & 168 & 12 \\ 60 & 195 & 105 \end{pmatrix}$

$\because (ا^2)^{-1} = \frac{1}{|ا^2|} \times (ا^2)^{مد}$

$\because (ا^2)^{-1} = \frac{1}{900}\begin{pmatrix} 96 & 144 & 60 \\ 87 & 168 & 195 \\ 33 & 12 & 105 \end{pmatrix}$

$|ا| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \times 2 - 4 \times -9 = 30$

$ا^{مرافقات} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \\ 20 & 15 & -5 \end{pmatrix}$

$ا^{-1} = \frac{1}{|ا|} \times ا^{مد}$ $\therefore ا^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 9 & 6 & 15 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

$(ا^{-1})^2 = \frac{1}{900}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 9 & 6 & 15 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 9 & 6 & 15 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

$$= \frac{١}{٩٠٠}\begin{pmatrix} ٩٦ & ١٤٤ & ٦٠ \\ ٨٧ & ١٦٨ & ١٩٥ \\ ٣٣ & ١٢ & ١٠٥ \end{pmatrix}$$

مما سبق نجد أن $(أ^{٢})^{-١} = (أ^{-١})^{٢}$

(١٠) $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٩ & ١٤ \\ ٧٠ & ٣٦ \end{pmatrix}$

الأيمن $= أ^{٢} - ٧أ - ١٨ I$

$$= \begin{pmatrix} ٢٩ & ١٤ \\ ٧٠ & ٣٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢١ & -١٤ \\ -٧٠ & -٢٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٨ & ٠ \\ ٠ & -٨ \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square =$ الأيسر

بضرب الطرفين من اليسار $\times أ^{-١}$

$\therefore أ \times أ \times أ^{-١} - ٧أ \times أ^{-١} - ١٨ I \times أ^{-١} = \square$

$أ - ٧I - ١٨أ^{-١} = \square$

$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٧ & ٠ \\ ٠ & -٧ \end{pmatrix} = ١٨أ^{-١}$

$١٨أ^{-١} = \begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ ١٠ & -٣ \end{pmatrix} \quad \therefore أ^{-١} = \frac{١}{١٨}\begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ ١٠ & -٣ \end{pmatrix}$

تمارين (٣ - ٣) من الكتاب المدرسي

(١) الجواب (د)

(٢) $\because أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \quad \therefore |أ| = ٥$

$أ^{-١} = \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ بضرب طرفي المعادلات من اليمين $\times أ^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ الجواب (أ)

(٣) $\because ر(ء) \le ٣ \quad \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ & ١٦ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

$\therefore$ جميع المحددات الثنائية قيمتها $= ٠$

$\therefore ر(أ) = ١$ الجواب (ب)

---

(٤) $ر(٣I) = ٣$ الجواب (أ)

(٥) $ر(\square_{٢\times٢}) =$ صفر الجواب (أ)

(٦) $\because ر(أ) = ٢ \quad \therefore |أ| =$ صفر

$\therefore$ بوضع $\begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix} =$ صفر $\quad \therefore -ك(-٤) - ١ \times ٨ = ٠$

$\therefore ٤ك = ٨ \quad \therefore ك = ٢ \quad \therefore$ عندما $ر(أ) = ٢ \quad \therefore ك = ٢$

الجواب (ج)

(٧) المصفوفة الموسعة على النظم $م \times (ن + ١)$ الجواب (ب)

(٨) $أ^{*} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ٦ & -٩ & ١٥ \end{pmatrix}$

$|أ^{*}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ٦ & -٩ & ١٥ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$\therefore ر(أ^{*}) = ١$ الجواب (ب)

(٩) $\because |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٠ \\ ٣ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢ - ٥ \times -٩ = ٤٩ \ne ٠$

$\therefore$ يوجد الحل الصفري فقط الجواب (أ)

(١٠) $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ & -٣ \\ ٤ & -٢ & -٣ \end{vmatrix} = ٢ \times ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & -١ \\ ٤ & -١ & -١ \end{vmatrix} =$ صفر

$\therefore ر(أ) \le ٢$

$\because \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٦ \ne ٠ \quad \therefore ر(أ) = ر(أ^{*}) = ٢$

$\therefore$ يوجد عدد لا نهائي من الحلول منها الحل الصفري الجواب (ب).

(١١) (أ) $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ - ٩ = ١$

$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$

بضرب طرفي النظام من اليمين $\times أ^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ -١٢ \end{pmatrix}$

الحل هو (٨ ، −١٢)

(ب) $\text{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \quad ، \quad |\text{أ}| = \begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٧$

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٧} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$ بالضرب من اليمين × $\text{أ}^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \frac{١}{٧} \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ الحل هو (٢ ، ١)

(ج) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = -٢$

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ بضرب طرفى النظام من اليمين × $\text{أ}^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{جـ} \\ \text{ى} \end{pmatrix} = \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٧ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{جـ} \\ \text{ى} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix}$ الحل هو (٥ ، ٢)

(د) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ -١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ + ٢ \times -١ = -١ \neq ٠$

$\text{أ}_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} -١ & -١ & ١ \\ -١ & -٢ & ٢ \\ ١ & ١ & -٢ \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$

$\therefore \text{أ}^{-١} = -١ \times \begin{pmatrix} -٢ & ٢ & ١ \\ ١ & -٢ & -١ \\ ١ & -١ & -١ \end{pmatrix}$

بضرب طرفى النظام × $\text{أ}^{-١}$ من اليمين

$\therefore \begin{pmatrix} \text{ب} \\ \text{جـ} \\ \text{ى} \end{pmatrix} = -١ \times \begin{pmatrix} -٢ & ٢ & ١ \\ ١ & -٢ & -١ \\ ١ & -١ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \\ ٧ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{ب} \\ \text{جـ} \\ \text{ى} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٠ \\ -١ \end{pmatrix}$ الحل هو (٧ ، ٠ ، -١)

(هـ) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١ \times ٣ - ١ \times ١ + ١ \times ٧ = ٩$

$\text{أ}_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} ٧ & -١ & ٣ \\ ١ & -٤ & ٣ \\ -٣ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

$\because \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} \quad \therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{٩} \begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ٣ \\ ٣ & -٤ & -١ \\ -٣ & ١ & ٧ \end{pmatrix}$

بضرب طرفى النظام × $\text{أ}^{-١}$ من اليمين

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{٩} \begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ٣ \\ ٣ & -٤ & -١ \\ -٣ & ١ & ٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ الحل هو (١ ، -١ ، ٢)

(و) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ٠ - ١ \times -٣ + ١ \times ٣ = ٣ + ٣ = ٦$

$\text{أ}_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

$\because \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} \quad \therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{٦} \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ٠ \\ ١ & -٢ & ٣ \\ -٣ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

بضرب طرفى النظام من اليمين × $\text{أ}^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{٦} \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ٠ \\ ١ & -٢ & ٣ \\ -٣ & ٠ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ الحل هو (١ ، ٢ ، ٣)

(١٢) (أ) $ا^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ١ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٣ & ١٢ \\ ٤ & ١ & ٢ & -١ \end{array}\right)$

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ - ١ \times -٦ + ١ \times -٥ = ٣$

$أ_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} ١ & ٦ & -٥ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ١ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$

$\because أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ_{\text{مل}}$ $\quad \therefore أ^{-١} = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٦ & ٠ & -٣ \\ -٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

$\because$ أ س = ج بضرب الطرفي النظام من اليمين × $أ^{-١}$.

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٦ & ٠ & -٣ \\ -٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ ١٢ \\ -١ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١٣}{٣} \\ ١ \\ \frac{٢٣}{٣} \end{pmatrix}$ الحل هو $\left(-\frac{١٣}{٣} ، ١ ، \frac{٢٣}{٣}\right)$

(ب) $ا^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & ٠ & ٣ \end{array}\right)$

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ١ \times -٢ - ٣ \times -١ + ٢ \times ٢ = -٢ + ٣ + ٤ = ٥$

$أ_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٢ \\ ٤ & -٢ & ١ \\ ٣ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ_{\text{مل}}$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ٣ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

$\because$ أ س = ج بضرب الطرفين من اليمين × $أ^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ٣ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$ الحل هو (١ ، ١ ، -٢)

(ج) $ا^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ١ & ٣ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ١ & ٢ & ٣ \end{array}\right)$

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢ - ١ \times ٢ + ٣ \times ١ = ٤ - ٢ + ٣ = ٥$

$أ_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ & ٣ \\ ١ & ٤ & -٢ \\ -٣ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ_{\text{مل}}$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٣ \\ ٣ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$

$\because$ أ س = ج بضرب الطرفين من اليمين × $أ^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٣ \\ ٣ & -٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$ الحل هو (-٢ ، ١ ، ١)

(د) $ا^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٤ & ٣ & -٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ٤ & ١٢ \\ ١ & -١ & ١ & ٢ \end{array}\right)$

$|أ| = ٤ \times ٦ - ٣ \times -١ - ٥ \times -٥ = ٥٢ \neq ٠$

$أ_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} ٦ & ١ & -٥ \\ ٢ & ٩ & ٧ \\ ٢٢ & -٣١ & -١ \end{pmatrix}$

∵ $م^{-1} = \frac{1}{|م|} \times م_{مد} = \frac{1}{٥٢}\begin{pmatrix}٦&٢&٢٢\\١&٩&-٣١\\-٥&٧&-١\end{pmatrix}$

الحل هو : $\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \frac{1}{٥٢}\begin{pmatrix}٦&٢&٢٢\\١&٩&-٣١\\-٥&٧&-١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٦\\١٢\\٢\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٢\\١\\١\end{pmatrix}$ ∴ الحل هو (٢، ١، ١)

---

(١٣) (أ) $|أ| = \begin{vmatrix}٢&٧&٣\\٣&١&-٢\\٤&-٣&-١\end{vmatrix}$

$= ٢ \times -٧ - ٧ \times ٥ + ٣ \times -١٣ = -١٤ - ٣٥ - ٣٩ = -٨٨ \neq ٠$

∴ المعادلات لها الحل الصفرى فقط.

(ب) $|ب| = \begin{vmatrix}١&-٢&٢\\٣&٠&٤\\٠&-١&٦\end{vmatrix}$

$= ١ \times ٤ + ٢ \times ١٨ + ٢ \times -٣ = ٣٤ \neq ٠$

∴ المعادلات لها الحل الصفرى فقط.

(ج) $|جـ| = \begin{vmatrix}١&٢&-١\\٢&٣&-١\\٣&-٤&٢\end{vmatrix}$

$= ١ \times ٢ - ٢ \times ٧ - ١ \times -١٧ = ٢ - ١٤ + ١٧ = ٥ \neq ٠$

∴ المعادلات لها الحل الصفرى فقط.

---

(١٤) (أ) $|أ| = \begin{vmatrix}١&٢&٣\\٢&٣&٥\\٢&-١&٢\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}١&٢&٣\\٠&-١&-١\\٠&-٧&-٧\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}١&٢&٣\\٠&-١&-١\\٠&٠&٠\end{vmatrix}$

∴ المعادلات هى س + ٢ص + ٣ع = ٠ ..... (١)

- ص - ع = ٠ ∴ ص = -ع .... (٢)

من (٢) بوضع ع = ك ∴ ص = -ك

من (١) س - ٢ك + ٣ك = ٠ ∴ س = -ك

∴ صورة الحل هى : (-ك ، -ك ، ك)

(ب) $|أ| = \begin{vmatrix}٢&-١&٣\\٤&-٢&٦\\١&٠&٢\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}٢&-١&٣\\٠&٠&٠\\١&٠&٢\end{vmatrix}$

∴ المعادلات هى ٢س - ص + ٣ع = ٠ ......(١)

س + ٢ع = ٠ ....(٢) بوضع ع = ك فى (٢)

س = -٢ك من (١) -٤ك - ص + ٣ك = ٠

ص = -ك ∴ صورة الحل هى (-٢ك ، -ك ، ك)

(ج) $|أ| = \begin{vmatrix}٣&-٥&-٢\\٢&١&٣\\-١&٣&٢\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}٠&٤&٤\\٠&٧&٧\\-١&٣&٢\end{vmatrix}$

$= ٤ \times ٧\begin{vmatrix}٠&١&١\\٠&١&١\\-١&٣&٢\end{vmatrix} = ٢٨\begin{vmatrix}٠&٠&٠\\٠&١&١\\-١&٣&٢\end{vmatrix}$

∴ المعادلات هى ص + ع = ٠ ......(١)

-س + ٣ص + ٢ع = ٠ ....(٢)

بوضع ع = ك فى المعادلة (١) ∴ ص = -ك من (٢)

-س - ٣ك + ٢ك = ٠ ، -س = ك ∴ س = -ك

∴ صورة الحل هى (-ك ، -ك ، ك)

تمارين الكتاب المدرسي العامة على الوحدة الثالثة

(١) $\begin{vmatrix}٢٤&٢٥&٢٦\\٣&٣&٣\\٦&٦&٦\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}٢٤&٢٥&٢٦\\٣&٣&٣\\٠&٠&٠\end{vmatrix} = ٠$ الجواب (أ)

---

(٢) $\begin{vmatrix}٢&٥&٠\\٤&س&٠\\س&٧&٥\end{vmatrix} = ٠$ ، ٥ [٢س - ٢٠] = ٠ ∴ س = ١٠

الجواب (د)

---

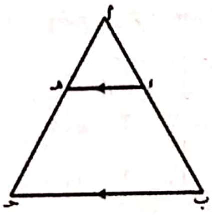
(٣) $\begin{vmatrix}أ+ب&ب+جـ&أ+جـ\\جـ&أ&ب\\١&١&١\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}أ+ب+جـ&أ+ب+جـ&أ+ب+جـ\\جـ&أ&ب\\١&١&١\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}٠&٠&٠\\جـ&أ&ب\\١&١&١\end{vmatrix} = ٠$

الجواب (ب)

(٤) في الشكل ∵ $\overline{\text{دهـ}} // \overline{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{اد}}{\text{اب}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{اجـ}}$ = ك مثلاً



ومنها
$$\begin{vmatrix} \text{٧} & \text{٦} & \text{٥} \\ \text{ك اجـ} & \text{ك اب} & \text{ك بجـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$$

$$= \text{ك} \begin{vmatrix} \text{٧} & \text{٦} & \text{٥} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{بجـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{بجـ} \end{vmatrix} = \text{ك} \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

الجواب (ء)

(٥) ∵ المصفوفة منفردة ∴ قيمة محددها = ٠

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{س} - \text{١} \\ \text{س} + \text{١} & \text{٤} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$\text{س}^{\text{٢}} - \text{١} - \text{٨} = \text{٠}$ ∴ $\text{س}^{\text{٢}} = \text{٩}$ ، س = $\pm$ ٣ الجواب (جـ)

(٦) (١٠) جميعها منفردة ماعدا (د)

$$\text{(٧)} \quad |\text{أ}| = \begin{vmatrix} -\text{٣} & -\text{٢} & \text{١} \\ \text{٦} & \text{٤} & -\text{٢} \\ -\text{٩} & -\text{٦} & \text{٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\text{٣} & -\text{٢} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

∴ ر (أ) = ١ الجواب : (ب)

$$\text{(٨) الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{١} & \text{ب} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{١} = \text{الأيسر.}$$

$$\text{(٩) الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{اب+بجـ−جـا} & \text{بجـ} & \text{١} \\ \text{اب+بجـ−جـا} & \text{جـا} & \text{١} \\ \text{اب+بجـ−جـا} & \text{اب} & \text{١} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{بجـ} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{جـا} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{اب} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{صفر} = \text{الأيسر}$$

$$\text{(١٠)} \quad \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{٢س+٢ص+٢} \\ \text{ص} & \text{٢س+ص+١} & \text{٢س+٢ص+٢} \\ \text{س+٢ص+١} & \text{س} & \text{٢س+٢ص+٢} \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢(س+ص+١)} \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{١} \\ \text{ص} & \text{٢س+ص+١} & \text{١} \\ \text{س+٢ص+١} & \text{س} & \text{١} \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢(س+ص+١)} \begin{vmatrix} \text{س+ص+١} & \text{س} & \text{١} \\ \text{٢س+٢ص+٢} & \text{٢س+ص+١} & \text{١} \\ \text{٢ص+٢س+٢} & \text{س} & \text{١} \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢(س+ص+١)}^{\text{٢}} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{٢س+ص+١} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{س} & \text{١} \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢(س+ص+١)}^{\text{٢}} \begin{vmatrix} -\text{١} & \text{س} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٢س+ص+١} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{س} & \text{١} \end{vmatrix}$$

= ٢(س+ص+١)$^{\text{٢}}$ × (-١) × (س -٢س-ص-١)

= ٢ (س+ص+١)$^{\text{٢}}$ (س +ص +١) = ٢ (س +ص +١)$^{\text{٣}}$ = الأيسر.

$$\text{(١١) الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٢س}^{\text{٣}} & \text{١+٢س}^{\text{٢}} & -\text{٢س+٢س}^{\text{٢}} \\ \text{١+٣س}^{\text{٣}} & \text{٣س}^{\text{٢}} & -\text{٣س+٣س}^{\text{٢}} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_{\text{٢}} \Leftarrow \text{ص}_{\text{٢}} - \text{٢س}^{\text{٢}}\text{ص}_{\text{١}}$

$$\text{ص}_{\text{٣}} \Leftarrow \text{ص}_{\text{٣}} - \text{٣ س}^{\text{٢}}\text{ص}_{\text{١}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{١} & -\text{٢س} \\ \text{١} & \text{٠} & -\text{٣س} \end{vmatrix}$$

$$\text{ص}_{\text{١}} \Leftarrow \text{ص}_{\text{١}} - \text{ص}_{\text{٢}} - \text{س ص}_{\text{٣}} = \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١+٢س+٣س}^{\text{٢}} \\ \text{٠} & \text{١} & -\text{٢س} \\ \text{١} & \text{٠} & -\text{٣س} \end{vmatrix}$$

= ١ + ٢ س + ٣س$^{\text{٢}}$ = الأيسر

$$\text{(١٢) الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{٢أ} & \text{س+أ} & \text{س+أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{س−أ} & \text{أ−س} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

$$\text{ع}_{\text{٢}} \Leftarrow \text{ع}_{\text{٢}} + \text{ع}_{\text{١}} = \begin{vmatrix} \text{٢أ} & \text{٢س+٢أ} & \text{س+أ} \\ \text{أ} & \text{س+أ} & \text{أ} \\ \text{(س−أ)} & -\text{(س−أ)} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

$$= \text{(س−أ)} \begin{vmatrix} \text{٢أ} & \text{٢س+٢أ} & \text{س+أ} \\ \text{أ} & \text{س+أ} & \text{أ} \\ \text{١} & -\text{١} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

$$\text{ع}_{\text{٣}} \Leftarrow \text{ع}_{\text{٣}} + \text{ع}_{\text{٢}} = \text{(س−أ)} \begin{vmatrix} \text{٢(س+٢أ)} & \text{٢س+٢أ} & \text{س+أ} \\ \text{س+٢أ} & \text{س+أ} & \text{أ} \\ \text{٠} & -\text{١} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س} - \text{أ})(\text{س} + ٢\text{أ}) \begin{vmatrix} \text{س}+\text{أ} & ٢\text{س}+٢\text{أ} & ٢ \\ \text{أ} & \text{س}+\text{أ} & ١ \\ ٠ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$= (\text{س}-\text{أ})(\text{س}+٢\text{أ})(١)(\text{س}+\text{أ}-٢\text{أ}) = (\text{س}+٢\text{أ})(\text{س}-\text{أ})^{٢} =$ الأيسر

---

(١٣) الأيمن $= \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{بج} \\ ١ & \text{ب} & \text{جأ} \\ ١ & \text{ج} & \text{أب} \end{vmatrix}$

$\text{ص}_٢ \Longleftarrow \text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ ،

$$\text{ص}_٣ \Longleftarrow \text{ص}_٣ - \text{ص}_١ = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{بج} \\ ٠ & \text{ب}-\text{أ} & \text{ج}(\text{أ}-\text{ب}) \\ ٠ & \text{ج}-\text{أ} & \text{ب}(\text{أ}-\text{ج}) \end{vmatrix}$$

$$(\text{أ}-\text{ب})(\text{ج}-\text{أ}) = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{بج} \\ ٠ & -١ & \text{ج} \\ ٠ & ١ & -\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{ج}-\text{أ}) = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{بج} \\ ٠ & -١ & \text{ج} \\ ٠ & ٠ & (\text{ج}-\text{ب}) \end{vmatrix}$$

$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{ج}-\text{أ}) \times (-١) \times (\text{ج}-\text{ب})$

$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{أ}) =$ الأيسر

---

(١٤) $\because$ س -١ هو أحد عوامل المحدد

$\therefore$ بوضع س − ١ = ٠ أى يوضع س = ١

نجد أن $\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ -١ & ١ & ١+\text{ك} \end{vmatrix} =$ صفر

بتبديل $\text{ع}_١$ ، $\text{ع}_٢$: $-\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١ & -١ & ١+\text{ك} \end{vmatrix} = ٠$

$\text{ع}_٣ \Leftarrow \text{ع}_٣ - \text{ع}_١ \quad \therefore \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & \text{ك} \end{vmatrix} = ٠$

$\text{ع}_٣ \Longleftarrow \text{ع}_٣ - \text{ع}_٢ \quad \therefore \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & \text{ك}+١ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore ١ \times ١ \times (\text{ك}+١) = ٠ \quad \therefore \text{ك} = -١$

---

(١٥) $\because$ س عاملاً للمحدد

$\therefore$ بوضع س = ٠ نجد أن قيمة المحدد = ٠

$$\therefore = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ \text{ك} & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\text{ع}_٢ \Longleftarrow \text{ع}_٢ - ٢\text{ع}_٣ \text{،} \quad \therefore \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{ك} & -٤ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\text{ع}_١ \Longleftarrow \text{ع}_١ + \frac{١}{٤}\text{ك}\,\text{ع}_٢ \quad \therefore \begin{vmatrix} ١+\frac{١}{٤}\text{ك} & ١ & ١ \\ ٠ & -٤ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$\therefore (١ + \frac{١}{٤}\text{ك}) \times -٤ \times ١ = ٠ \quad \therefore ١ + \frac{١}{٤}\text{ك} = ٠ \quad \therefore \text{ك} = -٤$

$$(١٦) \quad \text{أ}^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & -١ & -١ & ٦ \\ ١ & ١ & ٣ & ١٠ \end{array}\right)$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٤ & -١ & -١ \\ ١ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = ١ \times -٢ - ٢ \times ١٣ + ١ \times ٥ = -٢٣ \neq ٠$$

$\because$ ر (أ) = ٣ $\quad \therefore$ ر (أ) = ر (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل

$\therefore$ يوجد حل وحيد . نوجد $\text{أ}^{-١}$

$$\text{أ}_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} -٢ & -١٣ & ٥ \\ -٥ & ٢ & ١ \\ -١ & ٥ & -٩ \end{pmatrix}$$

$$\because \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}_{\text{مل}} \quad \therefore \text{أ}^{-١} = \frac{-١}{٢٣} \begin{pmatrix} -٢ & -٥ & -١ \\ -١٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & ١ & -٩ \end{pmatrix}$$

$\because$ أ س = ج بضرب الطرفين من اليمين × $\text{أ}^{-١}$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = -\frac{١}{٢٣} \begin{pmatrix} -٢ & -٥ & -١ \\ -١٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & ١ & -٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ١٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ الحل هو (٢ ، -١ ، ٣)

(١٧) $$أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٣ & ٠ \end{array}\right)$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١ \times -٩ - ١ \times -٣ + ١ \times ٧ = ١ \neq ٠$$

∴ ر(أ) = ٣، ر(أ*) = ٣ = ر(أ) = عدد المجاهيل

∴ يوجد حل وحيد فقط لإيجاد الحل نوجد $أ^{-١}$ كالتالى

$$أ_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} -٩ & ٣ & ٧ \\ -١ & ٠ & ١ \\ ٤ & -١ & -٣ \end{pmatrix}$$

$$\because أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ_{\text{مد}} \quad \therefore أ^{-١} = \begin{pmatrix} -٩ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٠ & -١ \\ ٧ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$$

∵ معادلات أ سـ = ج بضرب الطرفين من اليمين × $أ^{-١}$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٩ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٠ & -١ \\ ٧ & ١ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ -٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

∴ الحل هو (-٤، ٣، ٢)

(١٨) ∵ المعادلات متجانسة

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ -١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ٤ & -٦ \end{vmatrix} = ١ \times ٨ - ٢ \times ٤ - ٣ \times ٠ = ٠$$

∴ المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول من بينها الحل الصفرى

(١٩) $$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix} = ١ \times ٢ - ١ \times -٢ + ١ \times -٥ = -١$$

∴ ر(أ) = ٣، ر(أ*) = ٣ = ر(أ) = عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها حل وحيد فقط لإيجاد الحل نوجد $أ^{-١}$ كالتالى

$$أ_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & -٥ \\ -١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\because أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ_{\text{مد}} \quad \therefore أ^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ٢ & -١ & ٠ \\ -٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$$

∵ بضرب طرفى نظام المعادلات من اليمين × $أ^{-١}$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = -١ \times \begin{pmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ٢ & -١ & ٠ \\ -٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

∴ الحل هو (١، -٢، ٢)

(٢٠) $$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٣ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times -٥ - ١ \times -٢ + ١ \times ١١ = ٨ \neq ٠$$

∴ ر(أ) = ٣، ر(أ*) = ٣ = ر(أ) = عدد المجاهيل ∴ المعادلات لها حل وحيد فقط

$$أ_{\text{مرافقات}} = \begin{pmatrix} -٥ & ٢ & ١١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٤ & ٠ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$\because أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ_{\text{مد}}$$

$$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٨} \begin{pmatrix} -٥ & ١ & ٤ \\ ٢ & -٢ & ٠ \\ ١١ & ١ & -٤ \end{pmatrix}$$

∵ أ سـ = ج من اليمين × $أ^{-١}$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٨} \begin{pmatrix} -٥ & ١ & ٤ \\ ٢ & -٢ & ٠ \\ ١١ & ١ & -٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ ٦ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -١ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

∴ الحل هو (١، -١، ٢)

(٢١) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ، $\text{ر}(\text{أ}) = 1$

$|\text{أ}^*| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\text{ر}(\text{أ}^*) = 2 \neq \text{ر}(\text{أ})$ ∴ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق.

اختبار الكتاب المدرسي التراكمي على الوحدة الثالثة

(١) $\Delta = 5 = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ 7\text{س} & 7\text{ص} & 7\text{ع} \end{vmatrix} = 35 \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$

$= 35 \times 2 = 70$ الجواب (ء)

(٢) ∵ $\text{أ} \times \text{جـ} = \text{ب}$ بضرب الطرفين من اليمين × أ^{-1}

∴ $\text{جـ} = \text{أ}^{-1} \times \text{ب}$

∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$ ، $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{جـ} = \text{أ}^{-1} \times \text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\text{جـ} = \begin{pmatrix} -17 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ الجواب (جـ)

(٣) $\begin{vmatrix} 2 & \text{أ} \\ \text{أ} & 8 \end{vmatrix} = 0$ ∴ $16 - \text{أ}^2 = 0$ ∴ $\text{أ}^2 = 16$

∴ $\text{أ} = \pm 4$ الجواب (جـ)

(٤) $\text{أ}^{-1}\text{أ} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \text{أ}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$ ∴ ص = ٧ الجواب (جـ)

(٥) $\text{ع}_1 \Longleftarrow \text{ع}_1 + \text{ع}_2$ ∴ $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & 5 & \text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & 5 & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & 5 & \text{ب} \end{vmatrix}$

$= 5(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{جـ} \\ 1 & 1 & \text{أ} \\ 1 & 1 & \text{ب} \end{vmatrix}$ = صفر لأن $\text{ع}_1 = \text{ع}_2$ الجواب (ء)

(٦) ∵ للمعادلات حل وحيد ∴ $|\text{أ}| \neq 0$

بوضع $|\text{أ}| = 0$ ونحذف قيم ك الناتجة

∴ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & \text{ك} \\ 3 & \text{ك} & 2 \end{vmatrix} = 0$ ∴ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & \text{ك}-6 \\ 0 & \text{ك}-6 & -7 \end{vmatrix} = 0$

∴ $1 \times [49 - (\text{ك}-6)^2] = 0$ ∴ $(\text{ك}-6)^2 = 49$

$\text{ك} - 6 = \pm 7$ ، $\text{ك} = 13$ أ، $7 = -1$

∴ $\text{ك} = \text{ح} - \{-1 ، 13\}$ الجواب (ء)

(٧) ∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \end{vmatrix}$ ، $\text{ص}_2 \Leftarrow \text{ص}_2 + \text{ص}_1$ ،

$\text{ص}_3 \Leftarrow \text{ص}_3 - 3\text{ص}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ∴ $\text{ر}(\text{أ}) = 1$ الجواب (ب)

(٨) $|\text{أ}^{\text{مد}}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 4 + 1 \times 7 + 2 \times 2 = 15 \neq 0$

∴ $\text{ر}(\text{أ}^{\text{مد}}) = 3$ الجواب (د)

(٩) الأيمن = $\begin{vmatrix} 3\text{س} & 3\text{س} & 3\text{س} \\ 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+1 & \text{ب}+1 \end{vmatrix}$

$= 3\text{س} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+1 & \text{ب}+1 \end{vmatrix}$

$\text{ص}_3 \Leftarrow \text{ص}_3 + \text{ص}_2 = 3\text{س} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ}+\text{ب}+1 & \text{أ}+\text{ب}+1 & \text{أ}+\text{ب}+1 \end{vmatrix}$

$\text{ص}_3 \Leftarrow \text{ص}_3 - (\text{أ}+\text{ب}+1)\,\text{ص}_1 = 3\text{س} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = صفر = الأيسر

(١٠) $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٥ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢١ + ١ \times ٢١ + ٣ \times -٢١ = ٠$

∴ ر (أ) ≤ ٢ نبحث المحددات ٢ × ٢

مثلاً $\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ - ١ = ٧ \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٢

---

(١١) الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١+ص & ١ & ١ \\ ١ & ١+ص & ١ \end{vmatrix}$

ص٢ ⇐ ص٢ − ص١ ، ص٣ ⇐ ص٣ − ص١

∴ الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ص & ٠ & ٠ \\ ٠ & ص & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ص & ٠ \\ ٠ & ٠ & ص \end{vmatrix}$ = ص² = الأيسر

---

(١٢) المعادلات هى $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \\ ٩ \end{pmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢ - ٢ \times ٦ - ١ \times ٢ = -١٠$

أ مرافقات = $\begin{pmatrix} ٢ & -٦ & ٢ \\ -٥ & ٥ & ٠ \\ ١ & -٣ & -٤ \end{pmatrix}$

∵ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times$ أ مد ∴ $أ^{-١} = \frac{-١}{١٠} \begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ -٦ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٠ & -٤ \end{pmatrix}$

بضرب طرفى المعادلات من اليمين × $أ^{-١}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{-١}{١٠} \begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ -٦ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٠ & -٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \\ ٩ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ الحل هو : (١ ، ٢ ، ٣)

---

(١٣) الأيمن = $\begin{vmatrix} أ & س & س \\ ٠ & ب+س & س \\ ٠ & س & جـ+س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} س & س & س \\ س & ب+س & س \\ س & س & جـ+س \end{vmatrix}$

= أ [(ب+س) (جـ+س) − س²] + س $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ب+س & س \\ س & س & جـ+س \end{vmatrix}$

= أ [ب جـ + ب س + جـ س + س² − س²] + س $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ب & ٠ \\ ٠ & ٠ & جـ \end{vmatrix}$

= أ ب جـ + أ ب س + أ جـ س + ب جـ س

= أ ب جـ + س (أ ب + ب جـ + أ جـ) = الأيسر.

---

(١٤) $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -١ & ٥ \\ ٣ & -٥ & ٢ & -١ \end{array}\right)$

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \times ١ + ١ \times ٧ + ١ \times -١٩ = -١١ \neq ٠$

∴ ر (أ) = ٣ ، ر (أ*) = ٣

∴ ر (أ) = ر (أ*) = عدد المجاهيل

∴ يوجد للمعادلات حل وحيد فقط.

---

(١٥) ع١ ⇐ ع١ + ع٢ + ع٣

∴ $\begin{vmatrix} س+ص+ع+٢ & ص & ع+٢ \\ س+ص+ع+٢ & ص+٢ & ع \\ س+ص+ع+٢ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$

= (س + ص + ع + ٢) × $\begin{vmatrix} ١ & ص & ع+٢ \\ ١ & ص+٢ & ع \\ ١ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$

ع٢ ⇐ ع٢ − ص ع١ ، ع٣ ⇐ ع٣ − ع ع١

∴ (س + ص + ع + ٢) × $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = -٤$

∴ (س + ص + ع + ٢) × $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = -٤$

(س + ص + ع + ٢) × ٢ × ٢ × ١ = −٤

∴ س + ص + ع + ٢ = ١ ∴ س + ص + ع = ١٠

(١٦) (أ) $|أ| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$

= ١٥ + ٢ = ١٣ ≠ ٠ ∴ أ مصفوفة غير منفردة

(ب) $|ب| = \begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 32 = 0$

∴ ب مصفوفة منفردة

(جـ) $|جـ| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times -4 - 1 \times 2 + 3 \times -2 = -12 \neq 0$

∴ جـ مصفوفة غير منفردة

(د) $|د| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

ص٢ ⇐ ص٢ − ٢ص١ ، ص٣ ⇐ ص٣ − ٣ص١

∴ $|د| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = صفر ∴ د مصفوفة منفردة

المجموعة الرابعة

(١) $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$ $|أ| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

= ١ × ١ − ٢ × ٥ + ٣ × ٧ = ١٢ ≠ ٠ ∴ ر (أ) = ٣.

ر (أ*) < ٤ ∴ ر (أ*) = ٣ = ر (أ) = عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها حل وحيد فقط.

$أ^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -5 & -8 & 7 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ المعادلات أ س = ج بالضرب من اليمين × أ$^{-1}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -5 & -8 & 7 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

الحل هو (٢ ، ٠ ، ٤)

أ* الجديدة $= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 14 \end{array}\right)$ $|أ| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ، ∵ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ∴ ر(أ) = ٢

ر (أ*) < ٤ نبحث المحددات الثلاثية خلاف |أ|

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & -5 & -28 \\ 0 & -5 & -28 \end{vmatrix} = 0$ بالمثل باقي المحددات الثلاثية من أ*

∴ ر (أ*) = ٢ = ر (أ) = أقل من عدد المجاهيل ∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

---

(٢) (أ)

$أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 4 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right)$ ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3\times 2 - 1 \times -14 - 2 \times -34 = 6 + 14 + 68 = 88 \neq 0$

∴ ر (أ) = ٣ ، ر (أ*) = ٣ = ر (أ) = عدد المجاهيل ∴ يوجد حل وحيد ∵ $أ^{-1} = \frac{1}{88} \times أ^{مل}$

∴ $أ^{-1} = \frac{1}{88}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 17 \\ 14 & 5 & -13 \\ -34 & 13 & 19 \end{pmatrix}$ ∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{88}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 17 \\ 14 & 5 & -13 \\ -34 & 13 & 19 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

الحل هو (٢ ، −١ ، ٤)

(ب) $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & ل \\ م & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$ بوضع |أ| = ٠ ∴ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ م & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

أ × −١٦ − ١ (٢ − ٣م) + ١ × (١٠ + م) = ٠ ∴ −١٦ − ٢ + ٣م + ١٠ + م = ٠

∴ ٤ م = ٨ ∴ م = ٢ عندها ر (أ) = ٢

ر (أ*) < ٤ ∴ المحددات الثلاثية من أ* خلاف |أ| ص عند م = ٢

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & ل \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ∴ ١ × −٥ل − ١ × −٢ل + ٥ × ١٢ = ٠

−٣ل + ٦٠ = ٠ ∴ ل = ٢٠ ، عند ل = ٢٠

$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٢٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ١ \times -٢٠ - ١ \times -٤٠ + ٥ \times -٤$
$= -٢٠ + ٤٠ - ٢٠ = ٠$ ،

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ -١ & ٣ & ٢٠ \\ ٥ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ١ \times -٢٠ - ١ \times -١٠٠ + ٥ \times -١٦ = -٢٠ + ١٠٠ - ٨٠$

$= ٠$ ∴ عند ل = ٢٠ جميع المحددات الثلاثية

من أ* قيمة كل منها = ٠ ∴ ر (أ*) = ٢ = ر(أ) ∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول عند م = ٢ ، ل = ٢٠

(٣) (أ)

$ب^{-١} = \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ∴ $ب^{-١} ب^{-١} = \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ١٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} ١٢ & ٢٤ \\ -١٢ & ٨ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} ٩٦ & ٠ \\ ٠ & ٣٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} =$

(ب) $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ك+١ & -٢ & ٣ \\ ك-٢ & ك & ٥ \end{array}\right)$ بوضع $|أ| = ٠$ ∴ $\begin{vmatrix} ك+١ & -٢ \\ ك-٢ & ك \end{vmatrix} = ٠$

$ك^٢ + ك + ٢ك - ٤ = ٠$ ∴ $ك^٢ + ٣ك - ٤ = ٠$ $(ك - ١)(ك + ٤) = ٠$

∴ ك = ١ ، ك = − ٤ ر (أ*) < ٣ نبحث المحددات الثنائية

عند ك = ١ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ + ٣ = ١٣ \neq ٠$ ∴ ر(أ*) = ٢

عند ك = − ٤ $\begin{vmatrix} -٣ & ٣ \\ -٦ & ٥ \end{vmatrix} = -١٥ + ١٨ = ٣ \neq ٠$ ر(أ*) = ٢

∴ عند ك = ١ وعند ك = − ٤ ر (أ*) ≠ ر (أ) ∴ لا يوجد عدد لا نهائي على الإطلاق أى المعادلات يمثلها مستقيمان متوازيان.

(جـ) $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ك & -٣ & ١ \\ ١ & -٤ & ك \end{vmatrix} = ٠$

∴ $١ \times (٤ - ٣ك) - ١ \times (ك^٢ - ١) - ١ \times (٣ - ٤ك) = ٠$

$٤ - ٣ك - ك^٢ + ١ - ٣ + ٤ك = ٠$ ∴ $-ك^٢ + ك + ٢ = ٠$

∴ $ك^٢ - ك - ٢ = ٠$ $(ك - ٢)(ك + ١) = ٠$ ∴ ك = ٢ ، ك = − ١

∴ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول (أى لها حل خلاف الحل الصفرى) وذلك عند ك = ٢ ، ك = − ١

عند ك = −١

∴ المعادلات هى: $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ -١ & -٣ & ١ \\ ١ & -٤ & -١ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٠ & -٢ & ٠ \\ ٠ & -٥ & ٠ \end{vmatrix} = -٢ \times -٥ \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

∴ المعادلات هي ص = ٠ .... (١)

س + ص − ع = ٠ .... (٢)

بوضع ع = ل في (٢)

، ∵ ص = ٠ من (٢) ∴ س + ٠ − ل = ٠

س = ل ∴ صورة الحل هى (ل ، ٠ ، ل)

عند ك = ٢

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & -٤ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٠ & -٥ & ٣ \\ ٠ & -٥ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٠ & -٥ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

∴ المعادلات هى −٥ ص + ٣ ع = ٠ .... (١)

س + ص − ع = ٠ .... (٢)

بوضع ع = ٥ ل في (١) ∴ ص = ٣ ل من (٢)

س + ٣ل − ٥ ل = ٠ ∴ س = ٢ ل

صورة الحل هى (٢ل ، ٣ل ، ٥ل)

(٤) حلها هو حل رقم (٩) السابقة.

(٥) $أ^٢ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٨ & ٨ \\ ٨ & ٩ & ٨ \\ ٨ & ٨ & ٩ \end{pmatrix}$

الأيمن $= \begin{pmatrix} ٩ & ٨ & ٨ \\ ٨ & ٩ & ٨ \\ ٨ & ٨ & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & -٨ & -٨ \\ -٨ & -٤ & -٨ \\ -٨ & -٨ & -٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$ ∴ $أ^٢ - ٤أ - ٥I = \square$ بضرب الطرفين × $أ^{-١}$

∴ $أ - ٤I - ٥أ^{-١} = \square$ ∴ $٥أ^{-١} = ∴ ٥أ^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ٦ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٦ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

(٦) $|أ| = \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١\times١ - ١\times-١ + ٠ = ٢ \neq ٠$ ∴

لها معكوس ضربى

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢} \times أ^{مد} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ -١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٣ \\ ٧ \\ -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٣ \\ -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ -١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & -١ \end{pmatrix}\frac{١}{٢} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$$

∴ الحل هو (٣ ، ٧ ، - ٤)

---

(٧) محدد المصفوفة $\begin{vmatrix} -١ & ١ & ٢ \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٢\times-٧ - ١\times٧ - ١\times٧ = -٢٨ \neq ٠$

∴ رتبة المصفوفة = ٣

$أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} -١ & ١ & ٢ & ٦ \\ ١ & -١ & ٣ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ١ & ١ \end{array}\right)$ ∵ ر$(أ^{*}) < ٤$ ، ∵ ر(أ) = ٣

∴ ر (أ*) = ر (أ) = ٣ = عدد المجاهيل ∴ المعادلات لها حل وحيد

$$∵ أ^{-١} = \frac{١}{-٢٨}\begin{pmatrix} -٧ & -٥ & ١ \\ -٧ & ٧ & -٧ \\ ٧ & -٣ & -٥ \end{pmatrix} ∴ \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{-١}{٢٨}\begin{pmatrix} -٧ & -٥ & ١ \\ -٧ & ٧ & -٧ \\ ٧ & -٣ & -٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix}$$

الحل هو (٢ ، ١ ، - ١)

---

(٨) (أ) $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٣ & ٢ \\ ٢١ & ٥ & ١ \end{vmatrix} = ١\times-٦٨ + ١\times٤١ + ٢\times١٣ = -١ \neq$

∴ المصفوفة لها معكوس ضربى

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} -٦٨ & ٣١ & ٥ \\ -٤١ & ١٩ & ٣ \\ ١٣ & -٦ & -١ \end{pmatrix}$$

حل المعادلات هو

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -٦٨ & ٣١ & ٥ \\ -٤١ & ١٩ & ٣ \\ ١٣ & -٦ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ -١ \\ ٧٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

الحل هو (١ ، ٢ ، ٣)

(ب) $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \\ ٢ & ١ & \text{ل} & ٠ \end{array}\right)$ بوضع $|أ| = ٠$

∴ $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ \\ ٢ & ١ & \text{ل} \end{vmatrix} = ٠$ ∴ $١\times(\text{ل}+١) + ١\times(٢\text{ل}+٢) + ٣\times٠ = ٠$

(ل + ١) (١ + ٢) = ٠ $\boxed{\text{ل} = -١}$

∴ عند ل = - ١ ∴ |أ| = ٠ ∴ ر (أ) < ٣ ، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٣ \neq ٠$

∴ ر (أ) = ٢ ، ∵ ر (أ*) < ٤ ∴ نبحث المحددات الثلاثية من أ*

عند ل = - ١

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ١\times٠ = ٠ ، \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & ٠ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{vmatrix} = ١\times٠ = ٠$$

$$، \begin{vmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ١ & -١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix} = ١\times٠ = ٠ \quad ∴ ر\left(أ^{*}\right) = ٢$$

∴ ر (أ*) = ر (أ) = ٢ أقل من عدد المجاهيل

∴ يوجد للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول عند ل = - ١

$$|أ^{*}| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ & ١ \\ ٠ & ٣ & -٧ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

المعادلات هى ٣ ص - ٧ ع = -٢ .... (١)

س - ص + ٣ ع = ١ .... (٢)

من (١) بوضع ع = ل ∴ ٣ ص = ٧ ل - ٢

ص = $\frac{٧\text{ل} - ٢}{٣}$ من (١)

$- س + \frac{٧ل - ٢}{٣} + ٣ل = ١$ ، $س = ١ - ٣ل + \frac{٧ل - ٢}{٣}$

$س = \frac{٣ - ٩ل + ٧ل - ٢}{٣}$ ، $س = \frac{١ - ٢ل}{٣}$

صورة الحل هى $\left(\frac{١ - ٢ل}{٣} ، \frac{٧ل - ٢}{٣} ، ل \right)$

---

(٩) $م^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ك & ك \\ ك & ٢ & ٣ & -١ \end{array}\right)$

المعادلات لها حل وحيد عندما $|م| \neq ٠$

بوضع $|م| = ٠ \therefore \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ك \\ ك & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١\times(٣-٢ك) - ١\times(٣-ك^٢) + ١\times(٢-ك) = ٠$

$\therefore ٣ - ٢ك - ٣ + ك^٢ + ٢ - ك = ٠$

$\therefore ك^٢ - ٣ك + ٢ = ٠ \quad \therefore (ك - ٢)(ك - ١) = ٠ \quad \therefore ك = ٢ ، ل = ١$

$\therefore$ المعادلات لها حل وحيد فقط عندما $ك \in ح - \{٢ ، ١\}$

عندما $ك = ٢ \quad \therefore |م| = ٠ \quad ر(م) = ٢ ، ر(م^*) < ٤$

نبحث المحددات الثلاثية من $م^*$ مثل

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ١\times-٨ - ١\times-٥ + ١\times-١ = -٨ + ٥ - ١ = -٤ \neq ٠$

$\therefore ر(م^*) = ٣ \neq ر(م) \quad \therefore$ لا يوجد حل على الإطلاق عند $ك = ٢$

عند $ك = ١ \quad |م| = ٠ \quad \therefore ر(م) = ٢ ، ر(م^*) < ٤$ نبحث

المحددات الثلاثية من $م^*$ مثل $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = ١\times-٣ - ١\times-٢ + ١\times١ = ٠$

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ١\times-٤ - ١\times-٢ + ١\times٢ = ٠$ ،

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ١\times-٤ - ١\times-٣ + ١\times١ = ٠$ $\therefore$ جميع المحددات

الثلاثية من $م^*$ قيمها $= ٠ \quad \therefore ر(م^*) = ٢$

$\therefore ر(م^*) = ر(م) = ٢$ أقل من عدد المجاهيل $\therefore$ للمعادلات عدد

لا نهائي من الحلول عند $ك = ١$

---

(١٠) (م) $م_{٣\times٤} \therefore ر(م) \leq ٣$ توجد المحددات الثلاثية من م مثل

$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٢\times٠ - ١\times-٢ = ٢ \neq ٠$

$\therefore \boxed{ر(أ) = ٣}$

(ب) $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ & ك \\ ١ & ٤ & ١٠ & ك^٢ \end{array}\right)$ $\because |م| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٤ & ١٠ \end{vmatrix}$

$= ١\times٤ - ١\times٦ + ١\times٢ =$ صفر

$\therefore ر(م) < ٣ ، \because \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ - ١ = ١ \neq ٠ \quad \therefore ر(أ) = ٢$

$\therefore$ لا توجد قيمة $\in$ ك تجعل للمعادلات حل وحيد.

$\because ر(م^*) < ٤$ نبحث المحددات الثلاثية من $م^*$ خلاف $|م|$

$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ك \\ ١ & ٤ & ك^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ك-١ \\ ٠ & ٣ & ك^٢-١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ك-١ \\ ٠ & ٠ & ك^٢-٣ل+٢ \end{vmatrix}$

بوضع $ك^٢ - ٣ك + ٢ = ٠ \quad (ل - ١)(ل - ٢) = ٠$

$\therefore ك = ١ ، ك = ٢$

أيضاً

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٤ & ك \\ ١ & -١ & ك^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٣ & ك-١ \\ ٠ & ٩ & ك^٢-١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٣ & ك-١ \\ ٠ & ٠ & ك^٢-٣ك+٢ \end{vmatrix}$

بوضع $ك^٢ - ٣ك + ٢ = ٠$ نحصل على نفس قيم ك السابقة.

أيضاً

$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٢ & ٤ & ك \\ ٤ & ١٠ & ك^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & ك-٢ \\ ٠ & ٦ & ك^٢-٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & ك-١ \\ ٠ & ٠ & ك^٢-٣ك+٢ \end{vmatrix}$

بوضع $ك^٢ - ٣ك + ٢ = ٠$ نحصل على نفس قيم ك السابقة.

$\therefore$ عند $ك = ١ ، ك = ٢$ ر$(م^*) = ٢ = ر(م)$

= أقل من عدد المجاهيل

$\therefore$ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول عند $ك = ٢ ، ك = ١$

(١١) نفرض

$ا = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٣ \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{pmatrix}$ ∵ $|ا| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٣ \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٣ \\ ٢ & -١ & -٣ \end{vmatrix}$

$= ٠$ لأن ص٣ = ص٢ ∴ ر(ا) < ٣ ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -١ - ٦ \neq ٠$

∴ ر(ا) = ٢

نفرض $ب_{٣×٤} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & -٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -٢ & ٣ \end{array}\right)$ ر(ب) ≤ ٣

نبحث المحددات الثلاثية منها

$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$ لأن ع١ = ع٣ ، $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -٣ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$ لأن ع١ = ع٣ ،

$\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ٣ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ٣ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$

لأن ص١ = ص٣ ∴ ر(ب) = ٢

المعادلات: $ا^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & -٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -٢ & ٣ \end{array}\right)$ هى نفسها ب السابقة

وبالتالى فإن ر(ا*) = ٢ = ر(ا) = أقل من عدد المجاهيل ∴ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول أي لها أكثر من حل

(١٢) (ا) نفرض

$ا^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & -٢ & ٦ & ٤ \\ ٢ & ١ & -٢ & ٠ \\ ٤ & -٣ & ١٠ & ٨ \end{array}\right)$ ∵ $|ا| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٦ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٣ & ١٠ \end{vmatrix} =$

$= ١ × ٤ + ٢ × ٢٨ - ٦ × ١٠ = ٠$ ، ∵

∵ ر(ا*) ≤ ٣ ∴ نبحث المحددات الثلاثية من ا* خلاف |ا|

$\begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & -٣ & ٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٤ \\ ٠ & ٥ & -٨ \\ ٠ & ٥ & -٨ \end{vmatrix} = ٠$ لأن ص٢ = ص٣ ،

$\begin{vmatrix} ١ & ٦ & ٤ \\ ٢ & ٢٠ & ٠ \\ ٤ & ١٠ & ٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٦ & ٤ \\ ٠ & -١٤ & -٨ \\ ٠ & -١٤ & -٨ \end{vmatrix} = ٠$ لأن ص٢ = ص٣ ،

$\begin{vmatrix} -٢ & ٦ & ٤ \\ ١ & -٢ & ٠ \\ -٣ & -١ & ٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ١ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ١ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

∴ جميع المحددات الثلاثية قيمة كل منها = ٠ ∴ ر(ا*) = ٢

∵ ر(ا*) = ر(ا) = ٢ أقل من عدد المجاهيل ∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول لمجموعة المعادلات المعطاة.

(ب) $ا^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} ٢ & -١ & ١ \\ -٥ & ٤ & ٢ \\ ٩ & -٥ & ٣ \end{array}\right)$ ∵ $|ا^{*}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ -٥ & ٤ & ٢ \\ ٩ & -٥ & ٣ \end{vmatrix} =$

$= ٢ × ٢٢ + ١ × -٣٣ + ١ × -١١ = ٠$

$\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٥ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ - ٥ = ٣ \neq ٠$ ∴ ر(ا*) = ٢ ،

ر(ا) = ٢ = ر(ا*) = عدد المجاهيل ∴ يوجد للمعادلات حل وحيد

---

(١٣) (ا) $|ا| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١×-٧ - ٢×٩ + ٣×-١٣ = -٥٠ \neq ٠$

∴ يوجد للمصفوفة ا معكوساً ضربياً.

$ا^{-١} = \frac{١}{|ا|} × ا^{مل} = -\frac{١}{٥٠} \begin{pmatrix} ٧ & -١ & -١١ \\ -٩ & -١٣ & ٧ \\ -١٣ & ٩ & -١ \end{pmatrix}$

بضرب طرفي ا س = ب من اليمين × $ا^{-١}$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = -\frac{١}{٥٠} \begin{pmatrix} ٧ & -١ & -١١ \\ -٩ & -١٣ & ٧ \\ -١٣ & ٩ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ -٢ \\ ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -١ \\ ١ \end{pmatrix}$ ∴

الحل هو (١ ، -١ ، ١)

---

(١٤) $|ا| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٠ & -٧ & ٧ \\ ٠ & -٧ & ٧ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٠ & -٧ & ٧ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

∴ ر(ا) = ٢ أقل من عدد المجاهيل

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

المعادلات هي: -٧ ص + ٧ ع = ٠ .... (١)

س + ٣ ص -٢ ع = ٠ .... (٢)

من (١) بوضع ع = ل ∴ ص = ل

من (٢) س + ٣ل - ٢ ل = ٠ ، س = - ل

صورة الحل هى (-ل ، ل ، ل)

---

(١٥) (أ)
$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & -٢ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

، ∵ المعادلات متجانسة ∴ يوجد لها عدد لا نهائي من الحلول.

(ب) المصفوفة $\text{أ}^*_{٣\times٤}$ ∴ ر (أ*) ≤ ٣ نبحث المحددات الثلاثية

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -٢ & ٧ \\ ٢ & -٢ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & -٥ & ٤ \\ ٠ & -٣ & ٣ \end{vmatrix} = ٢\times(-١٥+١٢) = -٦ \neq ٠$$

ر (أ*) = ٣ ، ∵ $\text{أ}_{٤\times٢}$ ∴ ر (أ) ≤ ٢ ≠ ر (أ*) ∴

∴ المعادلات لا حل لها على الإطلاق.

---

(١٦)
$$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٢ & -٣ & \text{ك} \\ ٣ & -١ & ٢ & \text{ل} \\ ١ & -٥ & ٨ & \text{م} \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right) = |\text{أ}^*| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ & \text{ك} \\ ٣ & -١ & ٢ & \text{ل} \\ ١ & -٥ & ٨ & \text{م} \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ & \text{ك} \\ ٠ & -٧ & ١١ & \text{ل}-٣\text{ك} \\ ٠ & -٧ & ١١ & \text{م}-\text{ك} \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ & \text{ك} \\ ٠ & -٧ & ١١ & \text{ل}-٣\text{ك} \\ ٠ & ٠ & ٠ & \text{م}-\text{ل}+٢\text{ك} \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

∴ ر(أ) = ٢ ، عندما م - ل + ٢ك = ٠ تكون ر (أ*) = ٢ = ر (أ)

= أقل من عدد المجاهيل ∴ المعادلات لها أكثر من حل بشرط أن:

م - ل + ٢ك = ٠

---

(١٧) (أ)
$$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٣ & \text{ك} & ٢ & ٥ \\ \text{ك} & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & -١ & ٢ & \text{ك} \end{array}\right)$$
بوضع

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & \text{ك} & ٢ \\ \text{ك} & ٣ & ٢ \\ ٥ & -١ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ ٣ × (٨) - ك (٢ك - ١٠) + ٢ (-ك - ١٥) = ٠

٢٤ - ٢ك^٢ + ١٠ك - ٢ك - ٣٠ = ٠ ∴ -٢ك^٢ + ٨ك - ٦ = ٠

∴ ك^٢ - ٤ك + ٣ = ٠ ∴ (ك - ٣)(ك - ١) = ٠ ∴ ك = ٣ أ، ك = ١

∴ المعادلات لها حل وحيد عندما ك ≠ ٣ ، ك ≠ ١ أى عندما ك ∈ ح - {٣ ، ١}

عندما ك = ١ ∴ |أ| = ٠ ∴ ر (أ) = ٢

$$\text{أ}^* = \begin{pmatrix} ٣ & \text{ك} & ٢ & ٥ \\ \text{ك} & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & -١ & ٢ & \text{ك} \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

أضفنا صف أصفار لسهولة إيجاد ر (أ*) وذلك لأن إضافة صف أو عمود جميعها أصفار لا تؤثر فى الرتبة

عند ك = ١

$$∴ |\text{أ}^*| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & -١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & -٨ & -٤ & -١٠ \\ ١ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٠ & -١٦ & -٨ & -٢٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٠ & -٨ & -٤ & -١٠ \\ ١ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٠ & -٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

∴ ر (أ*) = ٣ ≠ ر (أ) ∴ لا يوجد حل على الإطلاق عند ك = ١

عند ك = ٣

$$|\text{أ}^*| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٣ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & -١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٥ & -١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & -١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

∴ ر (أ*) = ٢ = ر (أ) = أقل من عدد المجاهيل ∴ يوجد أكثر من حل عند ك = ٣

(ب) ∵ ر (أ) = ٢ ∴ |أ| = ٠

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ك & ١ \\ ٢ & -١ & -ك \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} = ١\times(٢+٢ك) - ك\times(-٤+٣ك) + ١\times٧ = ٠$$

∴ ٢+٢ك + ٤ك - ٣ك^{٢} + ٧ = ٠ ∴ -٣ك^{٢} + ٦ك + ٩ = ٠

∴ ك^{٢} - ٢ك - ٣ = ٠ (ك - ٣) (ك + ١) = ٠ ∴ ك = ٣ ، ك = -١

$$أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ك & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & -ك & ٢ \\ ٣ & ٢ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right) \therefore |أ^{*}| = \begin{vmatrix} ١ & ك & ١ & ٠ \\ ٢ & -١ & -ك & ٠ \\ ٣ & ٢ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

عند ك = ٣

$$\because \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٣ \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٣ & ٢ & -٢ \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} = ٠ \therefore ر(أ^{*}) = ٢$$

عند ك = -١

$$\because \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} = ١\times٠ + ١\times-٧ + ١\times٧ = ٠$$

$$\therefore ر(أ^{*}) = ٢$$

∴ عندما ك = ٣ ، ك = -١ تكون ر (أ*) = ر (أ) = ٢ = أقل من عدد المجاهيل ∴ يوجد للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول.

---

(١٨) $\because ر(ج) = ٢ \therefore |ج| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ك \\ ١ & ك & -٣ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ١ × (-٩ - ك^{٢}) - ١ × (-٦ - ك) + ٥ × (٢ك - ٣) = ٠

-٩ - ك^{٢} + ٦ + ك + ١٠ك - ١٥ = ٠ ∴ -ك^{٢} + ١١ك - ١٨ = ٠

∴ ك^{٢} - ١١ك + ١٨ = ٠ (ك - ٩) (ك - ٢) = ٠ ∴ ك = ٩ ، ك = ٢

عند ك = ٩

$$ج^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٩ & ٥ \\ ١ & ٩ & -٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right) \therefore |ج^{*}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٩ & ٥ \\ ١ & ٩ & -٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ & ٧ \\ ٠ & ١ & -١ & -٩ \\ ٠ & ٧ & -١٣ & -١٦ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ & ٧ \\ ٠ & ١ & -١ & -٩ \\ ٠ & ٠ & -٦ & ٤٧ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$\because \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{vmatrix} = ٦ \neq ٠$$

∴ ر (ج*) = ٣ ≠ ر (ج) ∴ عند ك = ٩ لا يوجد للمعادلات حل على الإطلاق

عند ك = ٢

$$ج^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٢ & -٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right) \therefore |ج^{*}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٢ & -٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ & ٧ \\ ٠ & ١ & -٨ & -٩ \\ ٠ & ١ & -٨ & -٩ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ & ٧ \\ ٠ & ١ & -٨ & -٩ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} \therefore ر(ج^{*}) = ٢$$

∴ عند ك = ٢ تكون ر (ج*) = ر (ج) = ٢ = أقل من عدد المجاهيل

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

---

(١٩) (أ)

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٥ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{vmatrix} = ٢\times٢١ + ١\times٢١ + ٣\times-٢١ = ٠$$

$$\because \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ - ١ = ٧ \neq ٠ \quad \therefore ر(أ) = ٢$$

(ب) $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{vmatrix} = ١\times٤ - ١\times-٥ + ٣\times٢ = ١٥ \neq ٠$ ∴ يوجد $أ^{-١}$

$$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \therefore أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ_{مد} = \frac{١}{١٥} \begin{pmatrix} ٤ & -٧ & ٢ \\ ٥ & -٥ & -٥ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$$

(٢٠) $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ & ك \\ ١ & ٤ & ١٠ & ك^٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$

$$|أ^*| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ & ك-١ \\ ٠ & ٣ & ٩ & ك^٢-١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ & ك-١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ك^٢-٣ك+٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

∵ ر(أ) = ٢ < ٣ ∴ لا توجد قيمة لـ ك تجعل للمعادلات حل وحيد

عندما $ك^٢ - ٣ك + ٢ = ٠$ ∴ (ك - ٢) (ك - ١) = ٠

∴ ك = ٢ ، ك = ١

عندها ر (أ*) = ٢ = ر (أ) = أقل من عدد المجاهيل أي يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

(٢١)

$$أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ك & ٣ \\ ١ & ك & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right) \quad |أ^*| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ك & ٣ \\ ١ & ك & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & ك+٢ & ١ \\ ٠ & ك-١ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & ك & ١ \\ ٠ & ٠ & -ك^٢-ك+٦ & -ك+٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$ عندما $-ك^٢ - ك + ٦ = ٠$

$ك^٢ + ك - ٦ = ٠$ (ك + ٣) (ك - ٢) = ٠

ك = - ٣ ، ك = ٢ تكون ر (أ) = ٢

عند ك = ٢ ∴ $|أ^*| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ∴ ر(أ*) = ر(أ) = ٢

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

عند ك = - ٣ ∴ $|أ^*| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & -٣ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ∴ ر(أ*) = ٣ ≠ ر(أ)

∴ لا يوجد حل على الإطلاق.

(٢٢) (أ) (س + ١) I - ٢ أ =

$$\begin{pmatrix} س+١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & س+١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س+١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢ & -٤ & ٠ \\ -١٠ & -٨ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} س-١ & -٤ & ٠ \\ -١٠ & س-٧ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س-١ \end{pmatrix}$$

قيمة محدد المصفوفة $= \begin{vmatrix} س-١ & -٤ & ٠ \\ -١٠ & س-٧ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س-١ \end{vmatrix}$

= (س - ١) [(س-١) (س-٧) - ٤٠] = (س-١) $(س^٢-٨س-٣٣)$

بوضع قيمة المحدد = ٠ ∴ (س-١) (س-١١) (س+٣) = ٠

∴ س = ١ ، س = ١١ ، س = - ٣ تجعل قيمة المحددة = ٠

∴ المصفوفة لها معكوس ضربي عندما قيمة المحدد ≠ ٠

أى عندما س ∈ ح - {١ ، ١١ ، -٣}

(ب) $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٠ & ك \\ ٠ & ٣ & -٢ & ١ \\ -١ & ٠ & ٣ك & ٢ \end{array}\right)$ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ -١ & ٠ & ٣ك \end{vmatrix} =$

= ٢ (٩ك) + ١× (- ٢) = ٢ (٩ك - ١) بوضع |أ| = ٠ ∴ ك = $\frac{١}{٩}$

∴ المعادلات لها حل وحيد عندما ك ≠ $\frac{١}{٩}$ أى ك ∈ ح - $\left\{\frac{١}{٩}\right\}$.

عند ك = $\frac{١}{٩}$

ر(أ) = ٢ ، ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & \frac{١}{٩} \\ ٠ & ٣ & ١ \\ -١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٢×٦ + ١×١ + $\frac{١}{٩}$×٣ = ١٣$\frac{١}{٣}$ ≠ ٠ ∴ ر(أ*) = ٣

∴ ر (أ*) ≠ ر (أ) ∴ لا يوجد للمعادلات حل عند ك = $\frac{١}{٩}$

لا توجد قيمة د لـ ل تجعل للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول.

(جـ) $|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & -١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & -٣ \end{vmatrix} = ٥\times-١-١\times-١٣-١\times٨ =$ صفر $\therefore ر(م) = ٢$

$\because$ المعادلات متجانسة، محدد المعاملات = ٠

$\therefore$ يوجد للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول.

اختبارات كتاب لامي على الوحدة

الاختبار الأول

[١] (أ) (١) - (٢) حل وحيد فقط.

(ب) (١) جـ (٢) ب

[٢] (أ) الأيمن $= \begin{vmatrix} أ+ب & أ+٢ب+جـ & جـ+أ \\ ب+جـ & أ+ب+٢جـ & أ+ب \\ جـ+أ & ٢أ+ب+جـ & ب+جـ \end{vmatrix}$ $ع_٢ \leftarrow ع_١ + ع_٢ + ع_٣$

$ع_٢ \leftarrow ع_٢ - ع_٣$

$= \begin{vmatrix} أ+ب & ٢ب & جـ+أ \\ ب+جـ & ٢جـ & أ+ب \\ جـ+أ & ٢أ & ب+جـ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} أ+ب & ب & جـ+أ \\ ب+جـ & جـ & أ+ب \\ جـ+أ & أ & ب+جـ \end{vmatrix}$

$ع_١ \leftarrow ع_١ - ع_٢$

$= ٢ \begin{vmatrix} أ & ب & جـ+أ \\ ب & جـ & أ+ب \\ جـ & أ & ب+جـ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ب & جـ & أ \\ جـ & أ & ب \end{vmatrix}$ $ع_٣ \leftarrow ع_٣ - ع_١$

= الأيسر.

(ب) $لـ_{٢\times٣} \therefore ر(أ) \leq ٢ \because \begin{vmatrix} ٣ & -٦ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠ ، \begin{vmatrix} ٣ & -٦ \\ ٥ & -١٠ \end{vmatrix} = ٠ ،$

$\begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٥ & -١٠ \end{vmatrix} = ٠ \quad \therefore ر(أ) = ١$

(ب) $= \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -٧ & -٣ \\ ٠ & -٥ & -٥ \end{vmatrix} = ١\times(٣٥-١٥) = ٢٠ \neq ٠ \quad \therefore ر(ب) = ٣$

[٣] (أ) المعادلات هى

$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ ....(١)

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١\times-١-٢\times-١-١\times-١ = ٢ \neq ٠ \quad \therefore$ يوجد $أ^{-١}$

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \because أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -١ & -٥ & ٩ \\ ١ & ٣ & -٥ \\ -١ & ١ & -١ \end{pmatrix}$

بضرب طرفى (١) من اليمين $\times أ^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -١ & -٥ & ٩ \\ ١ & ٣ & -٥ \\ -١ & ١ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ -١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ -٢ \end{pmatrix}$

$\therefore$ الحل هو (١ ، ٠ ، -٢)

(ب) $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & -٤ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٠ & -٥ & ٣ \\ ٠ & -٥ & ٣ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٠ & -٥ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$\therefore ر(أ) = ٢ =$ أقل من عدد المجاهيل

يوجد عدد لا نهائي من الحلول ، المعادلات ص

- ٥ ص + ٣ ع = ٠ .... (١)

س + ص - ع = ٠ .... (٢)

بوضع ع = ٥ ل من (١) $\therefore$ ص = ٣ ل

من (٢) س + ٣ ل - ٥ ل = ٠ $\therefore$ س = ٢ ل

صورة الحل هى (٢ ل ، ٣ ل ، ٥ ل)

الأختبار الثاني

[١] (أ) (١) = ١ × (- ٢ - ١٥) = - ١٧ (٢) ل ≠ ١

(ب) (١) محدد المصفوفة $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٦$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٦} \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٣} \end{pmatrix}$ الجواب (أ)

(٢) $أ^{-١} أ ب = I ب = ب = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٨ & ١٧ \\ ٥ & ١١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & -٥ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$

الجواب (ب)

[٢] (أ)

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{أس}+\text{ب جـ} & أ^{٢} \\ ٠ & \text{س}(\text{ب}-أ)-\text{جـ}(\text{ب}-أ) & (\text{ب}-أ)(\text{ب}+أ) \\ ٠ & \text{س}(\text{جـ}-أ)-\text{ب}(\text{جـ}-أ) & (\text{جـ}-أ)(\text{جـ}+أ) \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_{٢} \leftarrow \text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}$

$\text{ص}_{٣} \leftarrow \text{ص}_{٣} - \text{ص}_{١}$

$$(\text{ب}-أ)\ (\text{جـ}-أ) \begin{vmatrix} ١ & \text{أس}+\text{ب جـ} & أ^{٢} \\ ٠ & \text{س}-\text{جـ} & أ+\text{ب} \\ ٠ & \text{س}-\text{ب} & أ+\text{جـ} \end{vmatrix} = ٠ \text{ ، } \because أ \neq \text{ب} \neq \text{جـ}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & \text{أس}+\text{ب جـ} & أ^{٢} \\ ٠ & \text{س}-\text{جـ} & أ+\text{ب} \\ ٠ & \text{جـ}-\text{ب} & \text{جـ}-\text{ب} \end{vmatrix} \text{ص}_{٣} \leftarrow \text{ص}_{٣} - \text{ص}_{٢} = ٠$$

$$(\text{جـ}-\text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أس}+\text{ب جـ} & أ^{٢} \\ ٠ & \text{س}-\text{جـ} & أ+\text{ب} \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$= ٠ \leftarrow \text{ع}_{٢} \leftarrow \text{ع}_{٢} - \text{ع}_{٣} \text{ ، } \because \text{ب} \neq \text{جـ}$

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & \text{أس}+\text{ب جـ}+أ^{٢} & أ^{٢} \\ ٠ & \text{س}-أ-\text{ب}-\text{جـ} & أ+\text{ب} \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$\therefore ١ \times (\text{س} - أ - \text{ب} - \text{جـ}) \times ١ = ٠ \quad \therefore \text{س} = أ + \text{ب} + \text{جـ}.$

$$(\text{ب})\ |أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٦ & ٨ \\ ٤ & \text{ك} & ١٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & \text{ك}-٨ & ٠ \end{vmatrix}$$

$|أ| = ٠$ عندك = ٨

∴ ر (أ) = ٢ أقل من عدد المجاهيل

∴ عندك = ٨ يوجد عدد لا نهائى من الحلول.

والمعادلات ص .

س + ٢ ص + ٣ ع = ٠ .... (١)

- ع = ٠ .... (٢)

من (٢) ∴ ع = ٠ .... (١)

بوضع ص = ل ∴ س + ٢ل + ٠ = ٠

س = -٢ ل

صورة الحل هي (-٢ ل ، ل ، ٠)

[٣] (أ)

$$\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٢ & ٧ & ٣ \\ ٤ & -٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ \\ ٩ \\ ٧ \end{pmatrix} \text{......(١)}$$

$|أ| = ٣ \times ٢ - ١ \times -١٤ - ٢ \times -٣٤ = ٨٨ \neq ٠$ يوجد $أ^{-١}$

$$\because أ^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٧ & -٣ \\ -٢ & ٣ & -١ \end{pmatrix} \therefore أ^{-١} = \frac{١}{٨٨} \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ١٧ \\ ١٤ & ٥ & -١٣ \\ -٣٤ & ١٣ & ١٩ \end{pmatrix}$$

بضرب طرفى (١) × $أ^{-١}$ من اليمين

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{٨٨} \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ١٧ \\ ١٤ & ٥ & -١٣ \\ -٣٤ & ١٣ & ١٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٣ \\ ٩ \\ ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

الحل هو (٢ ، -١ ، ٤)

(ب) ∵ أ مصفوفة منفردة ∴ $|أ| = ٠$

$$\therefore \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ -٤ & -٤ & \text{ك} \\ ٢ & \text{ك} & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & \text{ك}+٦ \\ ٠ & \text{ك}-١ & -٢ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ٠ & \text{ك}-١ & -٢ \\ ٠ & ٠ & \text{ك}+٦ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ ٢ (ك − ١) (ك + ٦) = ٠ ∴ ك = ١ ، ك = -٦

∴ عندك = ١ ، ك = -٦ يكون $|أ| = ٠$ ∴ أ مصفوفة منفردة.

ثانيا: الهندسة الفراغية

إجابات الوحدة الأولى

الهندسة والقياس في بعدين وثلاث أبعاد

الهندسة و القياس في بعدين أو ثلاثة أبعاد

تمارين (١) النظام الإحداثي المتعامد في ثلاث ابعاد

المجموعة الأولى:

(١) أ (٣، ٠، ٠) ، ب (٣، ١٢، ٠) ،

هـ (٣، ١٢، ٤) ، م (٠، ١٢، ٤)

حـ (٠، ١٢، ٠) ، د (٣، ٠، ٤)

طول $\overline{\text{أجـ}} = \sqrt{١٢^٢ + ٣^٢} = \sqrt{١٥٣}$ وحدة طول

طول $\overline{\text{بن}} = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢ + ١٢^٢} = ١٣$ وحدة طول

طول $\overline{\text{دو}} = \sqrt{١٢^٢ + ٣^٢} = \sqrt{١٥٣}$ وحدة طول

طول $\overline{\text{جـد}} = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢ + ١٢^٢} = ١٣$ وحدة طول

طول $\overline{\text{أم}} = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢ + ١٢^٢} = ١٣$ وحدة طول

طول $\overline{\text{وهـ}} = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢ + ١٢^٢} = ١٣$ وحدة طول

منتصف $\overline{\text{بن}} = \left(\frac{٣+٠}{٢}، \frac{١٢+٠}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢}، ٦، ٢\right)$

منتصف $\overline{\text{وهـ}} = \left(\frac{٠+٣}{٢}، \frac{٠+١٢}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢}، ٦، ٢\right)$

منتصف $\overline{\text{أم}} = \left(\frac{٣+٠}{٢}، \frac{٠+١٢}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢}، ٦، ٢\right)$

منتصف $\overline{\text{جـد}} = \left(\frac{٠+٣}{٢}، \frac{١٢+٠}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢}، ٦، ٢\right)$

$\therefore$ $\overline{\text{بن}}$ ، $\overline{\text{وهـ}}$ ، $\overline{\text{أم}}$ ، $\overline{\text{جـد}}$ ينصف كل منهما الآخر

معادلة المستوى أ ب جـ و هى : ع = ٠

معادلة المستوى أ ب هـ د هى : س = ٣

معادلة المستوى أ و ن د هى : ص = ٠

معادلة المستوى ب جـ م هـ هى : ص = ١٢

(٢) اب $= \sqrt{٣^٢ + ٤^٢ + ١٢^٢} = ١٣$ وحدة طول

(٣) منتصف $\overline{\text{أب}}$ = (٢، ٥، ٨)

(٤) المركز هو منتصف القطر ، المركز هو (٣، ٠، ٥)

نق $= \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (-٢)^٢} = ٣$ وحدة طول

(٥) د (٠، ٠، ٠) ، $\text{جـد} = \sqrt{١^٢ + ٢^٢ + (-٢)^٢} = ٣$

(٦) معادلة الكرة هى :

$(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع + ٣)^٢ = ٤٩$

(٧) المركز هو (-٢، ٣، -٤)

نق $= \sqrt{٤ + ٩ + ١٦ + ٧} = ٦$ وحدات طول

(٨) المركز هو (٠، ٠، -٢)

نق $= \sqrt{٤ + ٢١} = ٥$ وحدات طول

(٩) $\because$ الدائرة تمس مستوى الاحداثيات س ص

$\therefore$ نق = ٧ وحدات طول

$\therefore$ معادلة الكرة هى : $(س - ٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع - ٧)^٢ = ٤٩$

(١٠) المركز هو (١، ٢، ١) $\therefore$ نق$^٢ = ٠ + ٩ + ١٦ = ٢٥$

$\therefore$ معادلة الكرة هى : $(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٢٥$

(١١) (١) المركز هو (٠، ٠، ٠) الجواب (ب)

(٢) طول نصف القطر = ٥ الجواب (جـ)

(١٢) منتصف $\overline{\text{أب}}$ هو (٢، ٠، ٥) الجواب (جـ)

(١٣) نفرض ب هي (س ، ص ، ع)

$\therefore \frac{٣ + س}{٢} = ٢ \quad \therefore س = ١$

، $\frac{٥ + ص}{٢} = ٣ \quad \therefore ص = ١$ ، $\frac{-١ + ع}{٢} = ٤ \quad \therefore ع = ٩$

$\therefore$ ب هى (١، ١، ٩) الجواب (أ)

(١٤) معادلة الكرة هى :

$(س - ٠)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع + ١)^٢ = ٢٥$

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٤ ص + ٢ع = ٢٠$ الجواب (جـ)

(١٥) نق $= \sqrt{٢^٢ + ٢^٢ + ١^٢} = ٣$

طول قطر الكرة = ٦ وحدات الجواب (ب)

(١٦)(١) المركز هو (٣، ٣، ٣) الجواب (ب)

(٢) $\because$ نق $= \sqrt{١^٢ + ٠ + ٢^٢} = \sqrt{٥}$

معادلة الكرة هى : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٦ س - ٦ ص - ٦ع + ٢٢ = ٠$

الجواب (د)

(١٧) $\because$ الكرة تمس مستوى الاحداثيات س ع $\therefore$ نق = ٥

الجواب (ب)

(١٨) $\because$ الكرة تمس مستوى الاحداثيات ص ع $\therefore$ نق = ٣

$\therefore$ طول القطر = ٦ الجواب (د)

(١٩) ء هى (١ ، ٣ ، ٤)

طول $\overline{\text{أء}} = \sqrt{٢^{٢} + ٢^{٢} + ١^{٢}} = ٣$ وحدات طول

الجواب (أ)

(٢٠) ∵ طول القطر = ١٠ وحدات ∴ نق = ٥ وحدات ،

الكرة فى الثمن الأول وتمس مستويات الإحداثيات الثلاثة.

∴ المركز هو (٥ ، ٥ ، ٥) الجواب (د)

المجموعة الثانية :

(١) جـ هى (٤ ، ٤ ، -١)

(٢) جـ هى (-١ ، ٢ ، ٥)

(٣) ∵ أجـ = جـء = ءهـ = هـب

∴ ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ ء هى (٤ ، ٠ ، ٨)

جـ منتصف $\overline{\text{أء}}$ ∴ جـ هى $\left(\frac{٧}{٢} ، \frac{-١}{٢} ، \frac{١٥}{٢}\right)$

، هـ منتصف $\overline{\text{ءب}}$ ∴ هـ هى $\left(\frac{٩}{٢} ، \frac{١}{٢} ، \frac{١٧}{٢}\right)$

(٤) ء هى (-١ ، -١ ، ٦)

جـ منتصف $\overline{\text{أء}}$ ∴ جـ هى $\left(\frac{-١}{٢} ، ١ ، ٥\right)$

، هـ منتصف $\overline{\text{ءب}}$ ∴ هـ هى $\left(\frac{-٣}{٢} ، -٣ ، ٧\right)$

(٥) أب $= \sqrt{١٦ + ١٠٠ + ٠} = \sqrt{١١٦} = ٢\sqrt{٢٩}$

ب جـ $= \sqrt{٠ + ٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

أجـ $= \sqrt{١٦ + ٦٤ + ١٦} = \sqrt{٩٦}$

∴ $(\text{أجـ})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢} = ١١٦ = (\text{أب})^{٢}$

∴ المثلث قائم الزاوية فى جـ.

(٦) $(\text{أب})^{٢} = ١٤٤ + ١٠٠ + ٤ = ٢٤٨$

$(\text{ب جـ})^{٢} = ٦٤ + ١٤٤ + ١٦ = ٢٢٤$

$(\text{جـ أ})^{٢} = ١٦ + ٤ + ٤ = ٢٤$

∴ $(\text{أب})^{٢} = (\text{ب جـ})^{٢} + (\text{جـ أ})^{٢}$

∴ المثلث قائم الزاوية عند جـ.

(٧) نفرض م = (١، ٢، ٣)

$(\text{أ م})^{٢} = ١^{٢} + ١^{٢} + ١٦ = ١٨$

$(\text{ب م})^{٢} = ١٦ + ١ + ١ = ١٨$

$(\text{جـ م})^{٢} = ٠ + ٩ + ٩ = ١٨$

$(\text{ء م})^{٢} = ٩ + ٩ + ٠ = ١٨$

∴ أم = ب م = جـ م = ء م

∴ أ ، ب ، جـ ، ء تقع على الكرة التى مركزها م (١، ٢، ٣)

(٨) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ١٠٠$

(٩) $\text{نق}^{٢} = ٩ + ١٦ + ١٤٤ = ١٦٩$

معادلة الكرة هى : $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} + (ع + ٣)^{٢} = ١٦٩$

(١٠) ∵ الكرة تمس مستوى الاحداثيات س ص ∴ نق = ٥

معادلة الكرة هى : $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع + ٥)^{٢} = ٢٥$

(١١) المركز هو (-٢، ٣، ٥) ، $\text{نق}^{٢} = ١٦ + ٤ + ٤ = ٢٤$

معادلة الكرة هى : $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٢٤$

(١٢) ملتقى متوسطات المثلث هو مركز الدائرة العظمى

∴ مركز الكرة هو م (١، ٣، ٤)

$\text{نق}^{٢} = (\text{أ م})^{٢} = ٤ + ٤ + ١ = ٩$

∴ معادلة الكرة هى : $(س - ١)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ٩$

(١٣) ∵ معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢}$ = معامل $ع^{٢}$ ولا تحتوى حدود بها س ص ، ص ع ، ع س ، س ص ع

∴ تمثل كرة مركزها هو (٢، -٣، ١)

$\text{نق}^{٢} = ٤ + ٩ + ١ + ١١ = ٢٥$

طول نصف قطرها = ٥ وحدات طول

(١٤) تمثل كرة لنفس الأسباب فى (١٣) المركز هو (-٥، -٣، -٤)

$\text{نق} = \sqrt{٢٥ + ٩ + ١٦ + ٣١} = ٩$ وحدة

(١٥) لا تمثل كرة لعدم وجود $س^{٢}$.

(١٦) تمثل كرة مركزها هو (٠، -٣، -٤)

$\text{نق}^{٢} = ٩ + ١٦ + ٠ = ٢٥$ ∴ نق = ٥ وحدات طول

(١٧) بالقسمة على ٢ : $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤س - ٦ص + ٨ع = ٢٠$

تمثل كرة مركزها (-٢، ٣، -٤)

$\text{نق}^{٢} = ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٠ = ٤٩$

∴ نق = ٧ وحدات طول

(١٨) معامل $س^2 \neq$ معامل $ص^2$ ∴ المعادلة لا تمثل كرة.

(١٩) ∵ النقطة على محور الصادات تكون على صورة (٠ ، ص ، ٠)

بالتعويض في معادلة الكرة ∴ $٠ + ص^2 + ٠ + ٠ + ٢ ص - ٠ - ١٥ = ٠$

$ص^2 + ٢ ص - ١٥ = ٠$ ، $(ص - ٣)(ص + ٥) = ٠$

ص = ٣ أو ص = -٥

النقط هي (٠ ، ٣ ، ٠) ، (٠ ، -٥ ، ٠)

$اب = \sqrt{٠ + ٦٤ + ٠} = ٨$ اب = ٨ وحدات

∵ المركز هو (-٣ ، ١ ، ١٢)

$نق^2 = ٩ + ١ + ١٤٤ + ١٥ = ١٦٩$

∴ نق = ١٣ ∴ طول القطر = ٢٦ وحدة

∴ $\overline{اب}$ ليس قطر في الكرة.

(٢٠) طول الحبل =

$\sqrt{(-٦٠٠)^2 + (٦٠٠)^2 + (-٣٠٠)^2} = ٩٠٠$ متر

إحداثيات المحطة هي (٢٥٠ ، -١٠٠٠ ، ٩٥٠)

(٢١) البعد بين الطائرتين =

$\sqrt{(١٢٠٠)^2 + (-٤٠٠)^2 + (٣٠٠)^2}$

١٣٠٠ متر < ١٥٠٠ متر

∴ الطائرتان تخالفان مبدأ السلامة موقع الانفجار هو نقطة المنتصف.

(٣٤٣ ، ٢١ ، ٢٧٠)

المجموعة الثالثة :

تمارين (١-١) من الكتاب المدرسي

(١) ع = صفر.

(٢) س ع الذي معادلته ص = ٠

(٣) ب هي (٦ ، ٤ ، ٠) ، جـ هي (٦ ، ٠ ، ٢)

(٤) منتصف $\overline{اب}$ هي $(\frac{١}{٢} ، -٢ ، ٣)$

(٥) $(س - ٢)^2 + (ص + ١)^2 + (ع - ٤)^2 = ٢٥$

(٦) ١ الجواب (د)

(٧) $\sqrt{٣^2 + ٤^2} = ٥$ وحدة طول الجواب (جـ)

(٨) $(١ ، \frac{٣}{٢} ، ٦)$ الجواب (أ)

(٩) $س^2 + ص^2 + ع^2 = ٢٥$ الجواب (د)

(١٠) ∵ الكرة تمس المستوى س ص ∴ نق = ع

∴ نق = ٤ ∴ معادلة الكرة هي :

$(س - ٢)^2 + (ص + ٣)^2 + (ع - ٤)^2 = ١٦$ الجواب (جـ)

(١١) (أ) البعد = $\sqrt{(٧-١)^2 + (٠)^2 + (٤-٠)^2}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٦} = ٢\sqrt{١٣}$ وحدة طول

(ب) البعد = $\sqrt{(٤-٢)^2 + (١-١)^2 + (٩-٦)^2}$

$= \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول

(جـ) البعد = $\sqrt{(١+٢)^2 + (١+٣)^2 + (-٧+٧)^2}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ وحدة طول

(١٢) نفرض أن النقط هي أ ، ب ، جـ

(أ) اب = $\sqrt{(-٢-٠)^2 + (-٥-٠)^2 + (٢-٢)^2}$

$(اب)^2 = ٤ + ٢٥ + ٠ = ٢٩$

$(ب جـ)^2 = (٠)^2 + (٤)^2 + (٢)^2 = ٢٠$

$(اجـ)^2 = (-٢ - ٠)^2 + (٥ - ٤)^2 + (٢ - ٠)^2 = ٤ + ١ + ٤ = ٩$

∴ $(اب)^2 = (ب جـ)^2 + (اجـ)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية في جـ

(ب) $(اب)^2 = (-٤ - ٢)^2 + (٤ + ١)^2 + (١ - ٢)^2$

$= ٣٦ + ٢٥ + ١ = ٦٢$

$(ب جـ)^2 = (٢ + ٢)^2 + (-١ - ٥)^2 + (٢ - ٠)^2$

$= ١٦ + ٣٦ + ٤ = ٥٦$

$(اجـ)^2 = (-٤ + ٢)^2 + (٤ - ٥)^2 + (١ - ٠)^2$

$= ٤ + ١ + ١ = ٦$

∴ $(اب)^2 = (ب جـ)^2 + (اجـ)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية في جـ.

(١٣) طول حرف المكعب = ٣

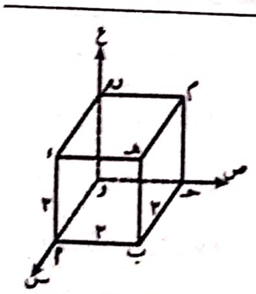
∴ احداثيات الرؤوس ص

أ (٣ ، ٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ٣ ، ٠)

جـ (٠ ، ٣ ، ٠) ، د (٣ ، ٠ ، ٣)

هـ (٣ ، ٣ ، ٣) ، م (٠ ، ٣ ، ٣)

ن (٠ ، ٠ ، ٣)



(١٤) نفرض أن النقط هى أ ، ب، جـ

$(أب)^٢ = (٧ - ٥)^٢ + (١ - ٣)^٢ + (٣ - ك)^٢$

$= ٤ + ٤ + ٩ - ٦ك + ك^٢$

$(أب)^٢ = ك^٢ - ٦ك + ١٧$ ....(١)

$(ب جـ)^٢ = (٥ - ٣)^٢ + (٣ - ٥)^٢ + (ك - ٣)^٢$

$= ٤ + ٤ + ك^٢ - ٦ ك + ٩ = ك^٢ - ٦ك + ١٧$ ....(٢)

من (١) ، (٢) ∴ أب = جب لجميع قيم ك

∴ المثلث متساوى الساقين لجميع قيم ك.

$(أجـ)^٢ = (٧ - ٣)^٢ + (١ - ٥)^٢ + (٣ - ٣)^٢ = ١٦ + ١٦ + ٠ = ٣٢$

∵ المثلث يكون متساوى الأضلاع ∴ $ك^٢ - ٦ ك + ١٧ = ٣٢$

∴ $ك^٢ - ٦ ك - ١٥ = ٠$

$$ك = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times -١٥}}{٢} = \frac{٦ \pm ٤\sqrt{٦}}{٢}$$

∴ $ك = ٣ + ٢\sqrt{٦}$ أو $ك = ٣ - ٢\sqrt{٦}$

(١٥) (أ) منتصف $\overline{أب}$ هو $\left(\frac{٥}{٢}، -\frac{١}{٢}، \frac{٣}{٢}\right)$

(ب) منتصف $\overline{أب}$ هو $\left(-\frac{٩}{٢}، \frac{٩}{٢}، \frac{١٣}{٢}\right)$

(١٦) نفرض إحداثيات النقطة أ ص $(س_١، ص_١، ع_١)$

∴ $\frac{س_١ + ٤}{٢} = -١$ ∴ $س_١ = -٦$ ،

$\frac{ص_١ - ٢}{٢} = ٤$ ∴ $ص_١ = ١٠$ ،

$\frac{ع_١ + ١}{٢} = -١$ ∴ $ع_١ = -١$ ،

نقطة أ هى (-٦، ١٠، -١)

(١٧) (أ) معادلة الكرة هى :

$(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ٧$

(ب) المركز هو $\left(\frac{٣}{٢}، ٣، -١\right)$

$نق^٢ = \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ + (١)^٢ + (٢)^٢ = \frac{٢٩}{٤}$

معادلة الكرة هى :

$\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ١)^٢ = \frac{٢٩}{٤}$

(جـ) $نق^٢ = (١ - ٢)^٢ + (-٦ + ١)^٢ + (١ - ٥)^٢$

$= ١ + ٢٥ + ١٦ = ٤٢$

معادلة الكرة هى : $(س - ١)^٢ + (ص + ٦)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٤٢$

(١٨) (أ) المركز (٠، ٠، ٠)، نق = ٣ وحدات

(ب) المركز (١، -٢، ٠)

$نق^٢ = ١ + ٤ - ٠ = ٥$ ∴ $نق = \sqrt{٥}$

(جـ) المركز (١، ٣، ٢)

$نق^٢ = ١ + ٩ + ٤ - ٥ = ٩$ ∴ نق = ٣ وحدات

(١٩) ∵ الكرة تمس مستويات الإحداثيات الموجبة ، نق = ٣

∴ المركز (٣، ٣، ٣)

معادلة الكرة هى : $(س - ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

(٢٠) نفرض أن : أ = (س، ٠، ٠) ، ب = (٠، ص، ٠)، جـ = (٠، ٠، ع)

∵ منتصف $\overline{أب}$ هو (١، -١، ٠)

∴ $\left(\frac{س}{٢}، \frac{ص}{٢}، ٠\right) = (١، -١، ٠)$

∴ س = ٢ ، ص = -٢

∴ أ = (٢، ٠، ٠) ، ب = (٠، -٢، ٠)

∵ منتصف $\overline{ب جـ}$ هو (٠، -١، ٢)

∴ $\left(٠، \frac{ص}{٢}، \frac{ع}{٢}\right) = (٠، -١، ٢)$

∴ ع = ٤ ، جـ = (٠، ٠، ٤) ، منتصف $\overline{أجـ}$ = (١، ٠، ٢)

(٢١) أى نقطة على محور السينات هى (س، ٠، ٠)

بالتعويض فى معادلة الكرة

∴ $(س - ٢)^٢ + ٩ + ١ = ١٤$ $س^٢ - ٤ س = ٠$

س (س - ٤) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٤

النقطتين أ (٠، ٠، ٠) ، ب (٤، ٠، ٠)

طول $\overline{أب} = \sqrt{(٠ - ٤)^٢ + ٠ + ٠} = ٤$ وحدات طول

(٢٢) المستوى الذى تقع فيه النقط (س، ص، ٢) معادلته هو ع = ٢

(٢٣) حل زياد هو الصواب لأن أشرف اعتبر جـ منتصف $\overline{أب}$ وهذا خطأ

تمارين (٢) على المتجهات في الفراغ

المجموعة الأولى:

(١) $\| \overline{\text{أ}} \| = \sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢} + ١٢^{٢}}$ = ١٣ وحدة طول

(٢) $\frac{١}{٢}\overline{\text{أ}} + \frac{١}{٣}\overline{\text{ب}} = (٤ ، ٣ ، ١٢)$

$\| \frac{١}{٢}\overline{\text{أ}} + \frac{١}{٣}\overline{\text{ب}} \| = ١٣$ وحدة

(٣) $\overline{\text{أ}} + \frac{١}{٢}\overline{\text{ب}} = ٥\,\text{س} + ٥\,\text{ص} - \text{ع}$

(٤) $\overline{\text{جـ}} = -\text{س} + ٨\,\text{ص}$

(٥) $\overline{\text{أب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}} = \text{س} - ٢\,\text{ص} + ٢\,\text{ع}$

$\| \overline{\text{أب}} \| = \sqrt{١ + ٤ + ٤} = ٣$

∴ قيمة الوحدة فى إتجاه $\overline{\text{أب}}$ هو $\frac{\overline{\text{أب}}}{٣}$

أى هو $\left(\frac{١}{٣} ، -\frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

(٦) ∵ $\text{جتا}^{٢}\,٦٠ + \text{جتا}^{٢}\,٩٠ + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$

$\frac{١}{٤} + ٠ + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$ ، $\text{جتا}^{٢}\theta = \frac{٣}{٤}$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ الزوايا مع الإتجاهات الموجبة

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $\theta = ٣٠^{\circ}$

(٧) $\text{ك}^{٢} + ٤ + ١٦ = ٣٦$ ∴ $\text{ك}^{٢} = ١٦$ ∴ $\text{ك} = \pm ٤$

(٨) $\| \overline{\text{ب}} \| = \sqrt{٤ + ١ + ٤} = ٣$

$\text{ي}_{\text{ب}} = \left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

∴ $(\text{جتا}\,\theta_{\text{س}} ، \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} ، \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}}) = \left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

(٩) $\overline{\text{ق}}$ = ٢٤ × متجه الوحدة فى إتجاه $\overline{\text{أب}}$

$\overline{\text{أب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}} = (-٢ ، ١ ، -٢)$

$\| \overline{\text{أب}} \| = \sqrt{٤ + ١ + ٤} = ٣$

$\text{ي}_{\text{أب}} = \left(-\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، -\frac{٢}{٣}\right)$ ∴ $\overline{\text{ق}} = (-١٦ ، ٨ ، -١٦)$

∴ $\overline{\text{ق}} = -١٦\,\text{س} + ٨\,\text{ص} - ١٦\,\text{ع}$

(١٠) ∵ $\overline{\text{أ}} = \overline{\text{ب}}$ ∴ ل = ٢ ، ك = ٣ ، م = −٥

(١١) $\| \overline{\text{أ}} \| = \sqrt{١٦ + ٩ + ١٤٤} = ١٣$

$\text{ي}_{\text{أ}} = \left(\frac{-٤}{١٣} ، \frac{٣}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ = جيوب تمام زوايا الاتجاه

الجواب (ب)

(١٢) $\overline{\text{ب}} = (٤ ، ٦ ، -٢) = ٤\,\text{س} + ٦\,\text{ص} - ٢\,\text{ع}$ الجواب (جـ)

(١٣) $\overline{\text{ب}} = -\text{س} - ٥\,\text{ص} - ٦\,\text{ع} = (-١ ، -٥ ، -٦)$

الجواب (أ)

(١٤) ∵ $\overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}} = \overline{\text{و}}$ ∴ $\overline{\text{أ}} = -\overline{\text{ب}}$

∴ $\| \overline{\text{أ}} \| = \| \overline{\text{ب}} \|$ الجواب (د)

(١٥) $\overline{\text{أب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}} = (-٤ ، -٣ ، -١٢)$ ∴ $\| \overline{\text{أب}} \| = ١٣$

∴ $\text{ي}_{\text{أب}} = \left(\frac{-٤}{١٣} ، \frac{-٣}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$ ∴ $\overline{\text{ق}} = ٢٦ \times \text{ي}_{\text{أب}}$

∴ $\overline{\text{ق}} = -٨\,\text{س} - ٦\,\text{ص} - ٢٤\,\text{ع}$ الجواب (أ)

(١٦) $\text{جتا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$

∴ $٣\,\text{جتا}^{٢}\theta = ١$ $\text{جتا}^{٢}\theta = \frac{١}{٣}$ $\text{جتا}\,\theta = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∵ θ مع الاتجاهات الموجبة ∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ الجواب (جـ)

(١٧) ∵ $\| \overline{\text{أ}} \| + \| \overline{\text{ب}} \| = ١٢$ ∴ $\| \overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}} \|$ أقل من ١٢

الجواب (أ)

(١٨) ∵ $\overline{\text{أ}}$ فى المستوى س ع ∴ ص = ٠

∴ ك − ٢ = ٠ ∴ ك = ٢ الجواب (جـ)

(١٩) $\overline{\text{ب أ}} = \overline{\text{أ}} - \overline{\text{ب}} = (-٧ ، ٢٤ ، -٢٥)$

$\| \overline{\text{ب أ}} \| = ٢٥\sqrt{٢}$

∴ $\text{ي}_{\text{ب أ}} = \left(\frac{-٧}{٢٥\sqrt{٢}} ، \frac{٢٤}{٢٥\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ الجواب (أ)

(٢٠) ∵ جتا²٩٠ + جتا²θ + جتا²٣٠ = ١

، ∴ ٠ + جتا²θ + ٣/٤ = ١ ∴ جتا²θ = ١/٤

∴ جتا θ = ± ١/٢ ∵ الزوايا مع الإتجاهات الموجبة

∴ جتا θ = ١/٢ ، ى₁ = (٠ ، ١/٢ ، √٣/٢)

∴ آ = ‖آ‖ × ى₁ = (٠ ، ٥ ، ٥√٣) الجواب (جـ)

المجموعة الثانية:

(١) ∵ آ = ٢ب + ٣جـ ∴ ٢ب = آ − ٣جـ

∴ ب = ١/٢ (آ − ٣جـ) = ١/٢ (٢ ، ٤ ، −٤)

∴ ب = س + ٢ص − ٢ع

‖ب‖ = √(١ + ٤ + ٤) = ٣

ى_ب = ١/٣ س + ٢/٣ ص − ٢/٣ ع

(٢) آ + ب + جـ = (٢، −٤ ، ٨)

(٣) ٢ آ − ٣ ب + جـ = (−٣، −٢٧ ، ٤٤)

(٤) آ − ١/٢ ب − ١/٣ جـ = (٣، −١ ، ٤)

(٥) د = و − (آ + ب − جـ)

د = − آ − ب + جـ = (−٨ ، −١٤ ، ١٦)

(٦) ∵ ب = ك آ

(أ) ∴ ٩س + م ص + ن ع = (٣ك، ٢ك، −٢ك)

∴ ٣ك = ٩ ، ك = ٣

م = ٢ك ، م = ٦

ن = −٢ك ، ن = −٦

(ب) ‖آ‖ = √(٩ + ٤ + ٤) = √١٧

‖ب‖ = √(٨١ + ٣٦ + ٣٦) = √١٥٣

‖ب‖ = ٣√١٧ = ك × √١٧

∴ ‖ب‖ = ك × ‖آ‖

(٧) ‖آ‖ = √(٩ + ١٤٤ + ١٦) = ١٣

ى₁ = (−٣/١٣ ، ١٢/١٣ ، ٤/١٣)

∴ ق = −١٢س + ٤٨ص + ١٦ع

(٨) في الشكل ب هي (٢، ٤، ٠) ، ك هي (٠، ٠، ٤)

ب ك = ك − ب = (−٢ ، −٤ ، ٤)

‖ب ك‖ = √(٤ + ١٦ + ١٦) = ٦

ى_بك = (−١/٣ ، −٢/٣ ، ٢/٣)

∵ ق = ‖ق‖ × ى_بك ∴ ق = (−٦ ، −١٢ ، ١٢)

، جـ هي (٠ ، ٤ ، ٠) ، د هي (٢ ، ٠ ، ٤)

، ∵ جـد = د − جـ = (٢ ، −٤ ، ٤)

‖جـد‖ = ٦ ∴ ى_جد = (١/٣ ، −٢/٣ ، ٢/٣)

∴ ش = (٨ ، −١٦ ، ١٦)

ق + ش = (٢ ، −٢٨ ، ٢٨)

ق + ش = ٢س − ٢٨ص + ٢٨ع

(٩) د هي (١ ، −١ ، ٢)

آد = د − آ = (−١ ، −٢ ، −٢)

‖آد‖ = √(١ + ٤ + ٤) = ٣

ى_آد = (−١/٣ ، −٢/٣ ، −٢/٣)

∴ ق = ٣٠ (−١/٣ ، −٢/٣ ، −٢/٣)

ق = −١٠س − ٢٠ص − ٢٠ع

(١٠) ‖ق‖ = √(٩ك² + ١٤٤ك² + ١٦ك²) = ٥٢

∴ ١٣|ك| = ٥٢ ∴ |ك| = ٤

∴ ك = ±٤

∵ ب = |ك| آ ∴ ب = ٤س + ٨ص − ٨ع

‖ب‖ = √(١٦ + ٦٤ + ٦٤) = ١٢ وحدة

المجموعة الثالثة:

تمارين (٢-١) من الكتاب المدرسي

(١) $\|\overline{أ}\| = \sqrt{٩+١٦+٤} = \sqrt{٢٩}$

(٢) $\overline{أ} - \overline{ب} = \overline{س} - ٥\overline{ص} + ٤\overline{ع}$

(٣) $\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (٤ ، -٣ ، ٢)$

$\|\overline{أب}\| = \sqrt{١٦+٩+٤} = \sqrt{٢٩}$

$ي_{أب}$ = قيمة الوحدة فى إتجاه $\overline{أب}$

$= \frac{٤}{\sqrt{٢٩}}\overline{س} - \frac{٣}{\sqrt{٢٩}}\overline{ص} + \frac{٢}{\sqrt{٢٩}}\overline{ع}$

(٤) $جتا\,\theta = \frac{\overline{أ} . \overline{س}}{\|\overline{أ}\|} = \frac{٣}{\sqrt{٩+١+٤}} = \frac{٣}{\sqrt{١٤}}$

$\therefore ق(\theta°) = ٣٦َ\ ٤٢°$

حل آخر : $\|\overline{أ}\| = \sqrt{٩+١+٤} = \sqrt{١٤}$

جيوب تمام الإتجاه $\left(\frac{٣}{\sqrt{١٤}} ، \frac{١}{\sqrt{١٤}} ، \frac{-٢}{\sqrt{١٤}}\right)$

$جتا\,\theta = \frac{٣}{\sqrt{١٤}}$ $\therefore ق\,\theta = ٣٦َ\ ٤٢°$

(٥) $\theta = ٩٠°$

(٦) $\|\overline{أ}\|^٢ = ٩ \therefore ٤ + ك^٢ + ١ = ٩$

$ك^٢ = ٤$ $\therefore ك = \pm ٢$ الجواب (جـ)

(٧) $\because جتا^٢ ٣٠ + جتا^٢ ٧٠ + جتا^٢ \theta = ١$

$\therefore جتا^٢ \theta = ١ - \frac{٣}{٤} - جتا^٢ ٧٠$

$\therefore جتا\,\theta = ٠,٣٦٤٧ \therefore ق(\theta) = ٦٨,٦°$ الجواب (د)

(٨) $\overline{جـ} = \overline{س} - (٢\overline{س} + ٦\overline{ص} - \overline{ع})$

$\overline{جـ} = -\overline{س} - ٦\overline{ص} + \overline{ع}$ الجواب (ب)

(٩) $\|\overline{أ}\| = \sqrt{٤+١+٤} = ٣$

جيوب تمام الإتجاه $\left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$ الجواب (ب)

(١٠) (أ) $\overline{أ} + \overline{ب} = (٦ ، -٥ ، ١)$

(ب) $٣\overline{أ} - \frac{١}{٣}\overline{جـ} = (٦ ، -٩ ، ٣) - (-٢ ، ٠ ، ١)$

$= (٨ ، -٩ ، ٢)$

(جـ) $\frac{٣}{٢}\overline{ب} + \frac{٢}{٣}\overline{جـ} = (٦ ، -٣ ، ٠) + (-٤ ، ٠ ، ٢)$

$= (٢ ، -٣ ، ٢)$

(١١) (أ) $٢\overline{أ} + \overline{ب} = ٤\overline{س} - ٢\overline{ص} + ٨\overline{ع}$

(ب) $\frac{١}{٢}\overline{ب} - \overline{جـ} = (٠ ، ٢ ، -١) - (٤ ، ٥ ، -٦)$

$= (-٤ ، -٣ ، ٥)$

(جـ) $٣\overline{أ} - ٢\overline{جـ} = (٦ ، -٩ ، ١٥) - (٨ ، ١٠ ، -١٢)$

$= (-٢ ، -١٩ ، ٢٧)$.

(١٢) (أ) $\|\overline{أ}\| = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥}$

(ب) $\|\overline{ب}\| = \sqrt{١+٤+٤} = ٣$

(جـ) $\|\overline{جـ}\| = ١$

(د) $\|\overline{د}\| = \sqrt{١+١٦} = \sqrt{١٧}$

(١٣) الأيمن = $\|ك\overline{أ}\| = \sqrt{ك^٢ + ٠ + ٠} = |ك|$

$= |ك| \times ١ = |ك|\,\|\overline{س}\|$ = الأيسر

(١٤) $\overline{بأ} = \overline{أ} - \overline{ب}$ ، $\because$ أ (٠ ، ١ ، ٢)، ب (٢ ، ٠ ، ٠)

$\therefore \overline{بأ} = (-٢ ، ١ ، ٢)$،

$\because \|\overline{بأ}\| = \sqrt{٤+١+٤} = ٣$

، $\because \overline{ق}$ تعمل فى $\overline{بأ}$ ،

$\|\overline{ق}\| = ٢١$

$\therefore \overline{ق} = (٢١) \times (ي_{بأ}) = ٢١\left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

$= (-١٤ ، ٧ ، ١٤) = -١٤\overline{س} + ٧\overline{ص} + ١٤\overline{ع}$

(١٥) $\because \overline{أ}$ يكون على الصورة = (ثابت ، ص ، ع)

أى المركبة السينية دائماً مقدار ثابت.

(١٦) $\|\overline{أ} + \overline{ب}\|$ لا يساوى $\|\overline{أ}\| + \|\overline{ب}\|$

لكن $\|\overline{أ} + \overline{ب}\| < \|\overline{أ}\| + \|\overline{ب}\|$

(١٧) ∵ المتجه يصنع مع محاور الإحداثيات زوايا متساوية القياس

∴ نفرض أن كل منها = θ

∴ $\text{جتا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta = ١$

∴ $\text{جتا}^٢\theta = \frac{١}{٣}$ ، ∴ $\text{جتا}\,\theta = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\overline{\text{أ}} = ٥\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

$= \frac{٥}{\sqrt{٣}}\,\overline{\text{س}} + \frac{٥}{\sqrt{٣}}\,\overline{\text{ص}} + \frac{٥}{\sqrt{٣}}\,\overline{\text{ع}}$

أو $\overline{\text{أ}} = ٥\left(-\frac{١}{\sqrt{٣}} ، -\frac{١}{\sqrt{٣}} ، -\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

$= -\frac{٥}{\sqrt{٣}}\,\overline{\text{س}} - \frac{٥}{\sqrt{٣}}\,\overline{\text{ص}} - \frac{٥}{\sqrt{٣}}\,\overline{\text{ع}}$

تمارين (٣) على ضرب المتجهات

المجموعة الأولى :

(١) (أ) $\overline{\text{ص}} . \overline{\text{ع}} = ٠$ من شرط التعامد

(ب) $\overline{\text{ص}} \times \overline{\text{ع}} = \overline{\text{س}}$

(٢) (أ) $\overline{\text{س}} . \overline{\text{س}} = ١$

(ب) $\overline{\text{س}} \times \overline{\text{س}} = \overline{\text{و}}$ = المتجه الصفرى

(٣) (أ) $\overline{\text{أ}} . \overline{\text{ب}} = -١٠ + ٦ - ٦ = -١٠$

(ب) $\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$

$= -٤\,\overline{\text{س}} + ١٠\,\overline{\text{ص}} - ٤\,\overline{\text{ع}}$

(٤)

$\overline{\text{ب}} \times \overline{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٣ & ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٥\,\overline{\text{س}} - ٥\,\overline{\text{ص}} + ٥\,\overline{\text{ع}}$

$\overline{\text{أ}} . \overline{\text{ب}} \times \overline{\text{جـ}} = (٢ ، ١ ، ١) \times (٥ ، -٥ ، ٥) = ١٠ - ٥ + ٥ = ١٠$

(٥) (أ) متوازيان. (ب) متعامدان.

(٦) (أ) $\text{جتا}\,\theta = \frac{\overline{\text{أ}} . \overline{\text{ب}}}{\|\overline{\text{أ}}\|\,\|\overline{\text{ب}}\|} = \frac{٣ + ٢ + ٢}{\sqrt{١ + ٤ + ١}\,\sqrt{٩ + ١ + ٤}}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{٧}{\sqrt{٦}\,\sqrt{١٤}} = ٠,٧٦٣٨$ ∴ $\text{ق}(\theta) = ٤٠° \; ١٢'$

(ب) $\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$

$= -٣\,\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}} - ٥\,\overline{\text{ع}}$

$\|\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}}\| = \sqrt{٩ + ١ + ٢٥} = \sqrt{٣٥}$

مساحة سطح $\Delta = \frac{\sqrt{٣٥}}{٢}$ وحدة مربعة

(٧) $\overline{\text{أب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}} = (٧ ، -٦ ، ٤)$

الشغل = $\overline{\text{ق}} . \overline{\text{أب}} = (٢ ، -٥ ، ٣) \times (٧ ، -٦ ، ٤)$

$= ١٤ + ٣٠ + ١٢ = ٥٦$ وحدة شغل

(٨) (أ) ∵ $\overline{\text{أ}}$ عمودى على $\overline{\text{ب}}$ ∴ $\overline{\text{أ}} . \overline{\text{ب}} = ٠$

∴ $١٠ - ٦ - \text{ك} = ٠$ ∴ $\text{ك} = ٤$

(ب) ∵ $\overline{\text{أ}} \parallel \overline{\text{ب}}$ ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{بس}} = \frac{\text{أص}}{\text{بص}} = \frac{\text{أع}}{\text{بع}}$

∴ $\frac{٢}{٥} \neq \frac{٣}{-٢}$

∴ لا يوجد قيمة لـ ك تجعل $\overline{\text{أ}} \parallel \overline{\text{ب}}$

(٩) $\overline{\text{س}} . \overline{\text{ص}} \times \overline{\text{ع}} = \overline{\text{س}} . \overline{\text{س}} = ١$ الجواب (ب)

(١٠) $\overline{\text{س}} \times \overline{\text{ص}} + \overline{\text{س}} \times \overline{\text{ع}} = \overline{\text{ع}} - \overline{\text{ص}}$

$= -\overline{\text{ص}} + \overline{\text{ع}}$ الجواب (جـ)

(١١) ∵ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متعامدان ∴ $\overline{\text{أ}} . \overline{\text{ب}} = ٠$ الجواب (جـ)

(١٢) ∵ $\overline{\text{أ}} = \text{ك}\,\overline{\text{ب}}$ ∵ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متوازيان

∴ $\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}} = \overline{\text{و}}$ الجواب (ب)

(١٣) $\|\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}}\|$ = مساحة سطح متوازى الأضلاع الجواب (جـ)

(١٤) $\|\overline{\text{أ}} \bullet \overline{\text{ب}}\| = ٦ + ٣ + ٢٠ = ٢٩$ الجواب (أ)

(١٥) الشغل = $\overline{\text{ق}} . \overline{\text{ف}} = ١٠ + ٢٠ + ٢٠ = ٥٠$ وحدة شغل الجواب (أ)

(١٦) ∵ $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ متعامدان ∴ $\overline{أ} . \overline{ب} = ٠$

∴ $٥ \times ٢ - ك + ٤٠ = ٠$ ∴ $ك = ٥٠$ الجواب (أ)

(١٧) ∵ المتجهان متوازيان ∴ $\frac{ب_س}{أ_س} = \frac{ب_ص}{أ_ص} = \frac{ب_ع}{أ_ع}$

∴ $\frac{٩}{٣} = \frac{ك}{٥} = \frac{م}{-٤}$ ∴ $ك = ١٥$ ∴ $م = -١٢$

∴ (ك ، م) = (١٥ ، −١٢) الجواب (أ)

(١٨) $جتا\,\theta = \frac{٤ - ٤ - ٨}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}} = \frac{-٨}{١٨}$

$= \frac{-٤}{٩}$ ∴ $ق(\theta) = ١١٦^\circ\ ٢٣'$ الجواب (د)

(١٩) $\overline{ب} \times \overline{ج} = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ١ & ٥ & ٣ \\ ٣ & ٤ & -٢ \end{vmatrix}$

$= -٢٢\,س + ١١\,ص - ١١\,ع$

$\overline{أ} . \overline{ب} \times \overline{ج} = -٤٤ + ٣٣ - ١١ = -٢٢$

∴ حجم متوازى السطوح = ٢٢ وحدة حجم الجواب (ب)

المجموعة الثانية :

(١) (أ) $\|\overline{أ} . \overline{ب}\| = \|\overline{أ}\| . \|\overline{ب}\|\, جتا\,\theta = -٢٠$

(ب) $\overline{أ} . \overline{ب} = ٢ - ٦ + ٢٠ = ١٦$

(جـ) $\overline{أ} . \overline{ب} = ٣ - ٢ - ٣ = -٢$

(٢) (أ) $\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٣ & -٢ & ٥ \\ ١ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$

$= -٨\,س + ٨\,ص + ٨\,ع$

(ب) $\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٢ & ١ & -٣ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ١١\,س - ص + ٧\,ع$

$\|\overline{أ} \times \overline{ب}\| = \sqrt{٩ + ١ + ٢٥} = \sqrt{٣٥}$

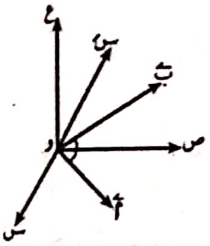
مساحة سطح $\Delta = \frac{\sqrt{٣٥}}{٢}$ وحدة مربعة

(جـ) $\|\overline{أ} . \overline{ب}\| = \left(\|\overline{أ}\| . \|\overline{ب}\|\, جا\,\theta\right) \overline{ي}$

$= \left(٨ \times ٤\sqrt{٣} \times جا\,١٢٠\right) \overline{ع}$

$= \left(٨ \times ٤\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) \overline{ع}$

$= ٤٨\,\overline{ع}$



(٣) (أ) $جتا\,\theta = \frac{-٣ + ٦ + ٨}{\sqrt{٩ + ٤ + ٤}\sqrt{١ + ٩ + ١٦}}$

$جتا\,\theta = \frac{١١}{\sqrt{١٧} \times \sqrt{٢٦}} = ٠٫٥٢٣٢٢$ ∴ $\theta = ٥٨^\circ\ ٢٧'$

مركبة $\overline{أ}$ فى إتجاه $\overline{ب}$ = $\|\overline{أ}\|\, جتا\,\theta$

$= \sqrt{١٧}\, جتا\ ٥٨^\circ\ ٢٧' = ٢٫١٥٧٣$

(ب) $جتا\,\theta = \frac{٦ + ٥ - ٤}{\sqrt{٩}\sqrt{٣٩}} = \frac{٨}{\sqrt{٩ \times ٣٩}}$

$جتا\,\theta = ٠٫٤٢٧٠٠٨$ ∴ $ق(\theta^\circ) = ٦٤^\circ\ ٤٣'$

مسقط $\overline{ب}$ فى إتجاه $\overline{أ}$ = $\|\overline{ب}\|\, جتا\,\theta$

$= \sqrt{٣٩} \times \frac{٨}{٣\sqrt{٣٩}} = \frac{٨}{٣}$ وحدة

(جـ) $جتا\,\theta = \frac{٦ - ٢ - ٣}{\sqrt{١١}\sqrt{١٤}} = \frac{١}{\sqrt{١١ \times ١٤}}$

$جتا\,\theta = ٠٫٠٨٠٥٨$ ∴ $\theta = ٨٥^\circ\ ٢٣'$

(٤) ∵ $\overline{ج} \times \overline{أ} = \overline{و}$ ∴ $\overline{ج} // \overline{أ}$

∴ $\overline{ج} = |ك|\,\overline{أ} = (٢|ك| ، ٣|ك| ، -٤|ك|)$

∵ $\overline{ج} . \overline{ب} = ٢٢$

∴ $-٤|ك| + ٣|ك| + ١٢|ك| = ٢٢$

∴ $١١|ك| = ٢٢$ ∴ $|ك| = ٢$ ∴ $ك = \pm ٢$

عندما ك = ٢ ∴ $\overline{أ}$ ، $\overline{ج}$ فى إتجاه واحد ، $\overline{ج}$ = (٤ ، ٦ ، −٨)

عندما ك = −٢ ∴ $\overline{أ}$ تضاد $\overline{ج}$ اتجاهاً ، $\overline{ج}$ = (−٤ ، −٦ ، ٨)

(٥) $\because \overline{\text{أ}} \cdot \overline{\text{ب}} = ١٢ + ٣ - ١٥ = ٠$ $\therefore$ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متعامدان

(أ) مركبة $\overline{\text{ق}}$ فى إتجاه $\overline{\text{أ}} = \dfrac{\overline{\text{ق}} \cdot \overline{\text{أ}}}{\|\overline{\text{أ}}\|}$

$= \dfrac{٢١ + ٣ + ٤٠}{\sqrt{٩ + ١ + ٢٥}} = \dfrac{٦٤}{\sqrt{٣٥}}$ وحدة.

(ب) مركبة $\overline{\text{ق}}$ فى إتجاه $\overline{\text{ب}} = \dfrac{\overline{\text{ق}} \cdot \overline{\text{ب}}}{\|\overline{\text{ب}}\|}$

$= \dfrac{٢٨ + ٩ - ٢٤}{\sqrt{٤٩ + ٩ + ٦٤}} = \dfrac{١٣}{\sqrt{١٢٢}} = \dfrac{١٣\sqrt{١٢٢}}{١٢٢}$ وحدة.

---

(٦) (أ) $\overline{\text{ب جـ}} = \text{جـ} - \text{ب} = (٢ ، -١ ، -٦)$

$\overline{\text{ب د}} = \text{د} - \text{ب} = (٣ ، ٠ ، -٨)$

$$\overline{\text{ب جـ}} \times \overline{\text{ب د}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٢ & -١ & -٦ \\ ٣ & ٠ & -٨ \end{vmatrix} = ٨\,\text{س} - ٢\,\text{ص} + ٣\,\text{ع}$$

$\|\overline{\text{ب جـ}} \times \overline{\text{ب د}}\| = \sqrt{٦٤ + ٤ + ٩} = \sqrt{٧٧}$

$\therefore$ مساحة سطح Δ ب جـ د $= \dfrac{١}{٢}\sqrt{٧٧}$ وحدة مربعة

(ب) $\overline{\text{ب جـ}} = (٤ ، -٣ ، ٠)$ ، $\overline{\text{ب د}} = (٧ ، ١ ، -٤)$

$$\overline{\text{ب جـ}} \times \overline{\text{ب د}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٤ & -٣ & ٠ \\ ٧ & ١ & -٤ \end{vmatrix}$$

$= ١٢\,\text{س} + ١٦\,\text{ص} + ٢٥\,\text{ع}$

$\|\overline{\text{ب جـ}} \times \overline{\text{ب د}}\| = \sqrt{١٢^٢ + ١٦^٢ + ٢٥^٢} = ٥\sqrt{٤١}$

$\therefore$ مساحة سطح Δ ب جـ د $= \dfrac{٥\sqrt{٤١}}{٢}$ وحدة مربعة

(جـ) $$\overline{\text{ب جـ}} \times \overline{\text{ب د}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix}$$

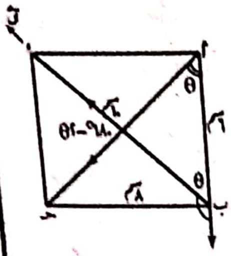
$= ٧\,\text{س} - ٢\,\text{ص} - ١٧\,\text{ع}$

$\|\overline{\text{ب جـ}} \times \overline{\text{ب د}}\| = \sqrt{٣٤٢} = ٣\sqrt{٣٨}$

$\therefore$ مساحة سطح Δ ب جـ د $= \dfrac{٣\sqrt{٣٨}}{٢}$ وحدة مربعة

---

(٧) فى الشكل :



أ جـ = ب د = ١٠ سم

(فيثاغورث)

(أ) $\overline{\text{أ ب}} \cdot \overline{\text{أ جـ}} = ٦ \times ١٠ \times \text{جتا}\,\theta$

$\overline{\text{أ ب}} \cdot \overline{\text{أ جـ}} = ٦ \times ١٠ \times \dfrac{٦}{١٠} = ٣٦$ وحدة

(ب) $\overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{أ جـ}} = (٦ \times ١٠ \times \text{جا}\,\theta)(-\overline{\text{ي}})$

$\overline{\text{أ ب}} \cdot \overline{\text{أ جـ}} = -٤٨\,\overline{\text{ي}}$ وحدة

(جـ) $\overline{\text{أ ب}} \cdot \overline{\text{جـ د}} = ٦ \times ٦ \times \text{جتا}\,١٨٠$

$\overline{\text{أ ب}} \cdot \overline{\text{جـ د}} = -٣٦$ وحدة

(د) $\overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{جـ د}} = \overline{\text{و}}$ من شرط التوازى

(هـ) $\overline{\text{أ جـ}} \cdot \overline{\text{ب د}} = ١٠ \times ١٠ \times \text{جتا}\,(١٨٠ - ٢\theta)$

$= -١٠٠\,\text{جتا}\,٢\theta \quad = -١٠٠\,(٢\,\text{جتا}^٢\,\theta - ١)$

$= -١٠٠ \times -٠,٢٨ = ٢٨$ وحدة

(و) $\overline{\text{أ جـ}} \times \overline{\text{ب د}} = ١٠ \times ١٠ \times (\text{جا}\,(١٨٠ - ٢\theta))(-\overline{\text{ي}})$

$\overline{\text{أ جـ}} \times \overline{\text{ب د}} = ١٠٠ \times \dfrac{٢٤}{٢٥}(-\overline{\text{ي}}) = -٩٦\,\overline{\text{ي}}$

(ز) مركبة $\overline{\text{ب د}}$ فى إتجاه $\overline{\text{ب جـ}} = \dfrac{\overline{\text{ب د}} \cdot \overline{\text{ب جـ}}}{\|\overline{\text{ب جـ}}\|}$

$= \dfrac{١٠ \times ٨\,\text{جتا}\,(٩٠ - \theta)}{٨} = \dfrac{١٠ \times ٨ \times ٨}{٨ \times ١٠} = ٨$ وحدة.

(ح) مركبة $\overline{\text{أ ب}}$ فى إتجاه $\overline{\text{ب د}} = \dfrac{\overline{\text{أ ب}} \cdot \overline{\text{ب د}}}{\|\overline{\text{ب د}}\|}$

$= \dfrac{٦ \times ١٠\,\text{جتا}\,(١٨٠ - \theta)}{١٠} = -٣,٦$

---

(٨) (أ) $$\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$= ٤\,\text{س} - ٥\,\text{ص} + ٢\,\text{ع}$

متجهة الوحدة العمودى على $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}} = \dfrac{\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}}}{\|\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}}\|}$

$$= \frac{٤\,\overline{\text{س}} - ٥\,\overline{\text{ص}} + ٢\,\overline{\text{ع}}}{\sqrt{١٦ + ٢٥ + ٤}}$$

$$= \frac{٤}{\sqrt{٤٥}}\,\overline{\text{س}} - \frac{٤}{\sqrt{٤٥}}\,\overline{\text{ص}} + \frac{٢}{\sqrt{٤٥}}\,\overline{\text{ع}}$$

(ب) $\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٢ & -٣ & -٢ \\ -٣ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$

$$= -١٠\,\overline{\text{س}} - ٢\,\overline{\text{ص}} - ٧\,\overline{\text{ع}}$$

$$\|\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}}\| = \sqrt{١٠٠ + ٤ + ٤٩} = \sqrt{١٥٣}$$

متجه الوحدة في اتجاه عمودي على مستوى $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ $= \dfrac{\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}}}{\|\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}}\|}$

$$= -\frac{١٠}{\sqrt{١٥٣}}\,\overline{\text{س}} - \frac{٢}{\sqrt{١٥٣}}\,\overline{\text{ص}} - \frac{٧}{\sqrt{١٥٣}}\,\overline{\text{ع}}$$

(٩) (أ) $\overrightarrow{\text{أب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}} = (-١ ، -١ ، -١)$

$\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overline{\text{جـ}} - \overline{\text{ب}} = (٣ ، ٢ ، -٢)$

$$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ -١ & -١ & -١ \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٤\,\overline{\text{س}} - ٥\,\overline{\text{ص}} + \overline{\text{ع}}$$

$$\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{ب جـ}}\| = \sqrt{١٦ + ٢٥ + ١} = \sqrt{٤٢}$$

∴ مساحة سطح متوازي الأضلاع = $\sqrt{٤٢}$ وحدة مربعة

(ب) $\overrightarrow{\text{أد}} = \overline{\text{د}} - \overline{\text{أ}} = (١ ، -٤ ، ٣)$

$\overrightarrow{\text{د جـ}} = \overline{\text{جـ}} - \overline{\text{د}} = (٢ ، ٣ ، ٢)$

$$\overrightarrow{\text{أد}} \times \overrightarrow{\text{د جـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ١ & -٤ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= -١٧\,\overline{\text{س}} + ٤\,\overline{\text{ص}} + ١١\,\overline{\text{ع}}$$

$$\|\overrightarrow{\text{أد}} \times \overrightarrow{\text{د جـ}}\| = \sqrt{(-١٧)^٢ + (٤)^٢ + (١١)^٢}$$

$$\|\overrightarrow{\text{أد}} \times \overrightarrow{\text{د جـ}}\| = \sqrt{٤٢٦}$$

∴ مساحة سطح متوازي الأضلاع = $\sqrt{٤٢٦}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overline{\text{جـ}} - \overline{\text{ب}} = (٥ ، ٠ ، -٥)$

$\overrightarrow{\text{جـ د}} = \overline{\text{د}} - \overline{\text{جـ}} = (٢ ، ١ ، ٢)$

$$\overrightarrow{\text{ب جـ}} \times \overrightarrow{\text{جـ د}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٥ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٥\,\overline{\text{س}} - ٢٠\,\overline{\text{ص}} + ٥\,\overline{\text{ع}}$$

$$\|\overrightarrow{\text{ب جـ}} \times \overrightarrow{\text{جـ د}}\| = \sqrt{٥^٢ + ٢٠^٢ + ٥^٢}$$

$$= \sqrt{٤٥٠} = ١٥\sqrt{٢}$$

∴ مساحة سطح متوازي الأضلاع = $١٥\sqrt{٢}$ وحدة مربعة

(١٠) (أ)

$$\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{٢}{-٤} = -\frac{١}{٢} \text{ ، } \frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{٣}{-٦} = -\frac{١}{٢}$$

$$\frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}} = \frac{-١}{٢} \quad ∴ \quad \frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$$

∴ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متوازيان

(ب) ∵ $\overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}} = ١٢ + ٨ - ٢٠ = ٠$ ∴ $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ متعامدان

(جـ) $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ غير متوازيان لأن $\dfrac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} \neq \dfrac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}}$

وغير متعامدان لأن $\overline{\text{أ}} . \overline{\text{ب}} \neq ٠$

∴ هما غير متوازيان وغير متعامدان.

(١١) (أ) $\overline{\text{ب}} \times \overline{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$$= -١١\,\overline{\text{س}} + ٦\,\overline{\text{ص}} + ٧\,\overline{\text{ع}}$$

$$\overline{\text{أ}} . \overline{\text{ب}} \times \overline{\text{جـ}} = (٥ ، ٣ ، ١) . (-١١ ، ٦ ، ٧)$$

$$= -٥٥ + ١٨ + ٧ = -٣٠$$

∴ حجم متوازي السطوح = $|-٣٠| = ٣٠$ وحدة مكعبة

(ب) $\overline{\text{ب}} \times \overline{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٢ & ٠ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{vmatrix} = ٤\,\overline{\text{ص}} - ٢\,\overline{\text{ع}}$

$$\overline{\text{أ}} . \overline{\text{ب}} \times \overline{\text{جـ}} = (٤ ، ٢ ، ٣) . (٠ ، ٤ ، -٢)$$

$$= ٠ + ٨ - ٦ = ٢$$

∴ حجم متوازي السطوح = ٢ وحدة مكعبة

(جـ) $ب \times جـ = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٢ & -٣ & ٥ \end{vmatrix}$

$= ٤\,س - ٩\,ص - ٧\,ع$

$أ \,.\, ب \times جـ = (٠،٥،٠)\,.\,(٤،-٩،-٧)$

$= ٠ - ٤٥ + ٠ = -٤٥$

∴ حجم متوازى السطوح $= |-٤٥| = ٤٥$ وحدة مكعبة

المجموعة الثالثة :

تمارين (١-٣) من الكتاب المدرسي

(١) $س \,.\, ص = ٠$

(٢) $ص \times ع = س$

(٣) مركبة أ في إتجاه ب $= \frac{أ \,.\, ب}{\|ب\|}$

$= \frac{٦ + ٤}{\sqrt{٩ + ١٦}} = ٢$ وحدة.

(٤) متعامدان.

(٥) متوازيان.

(٦) $جتا\,\theta = \frac{|(٣،-١)\,.\,(-٤،٦)|}{\sqrt{٩+١}\,\sqrt{١٦+٣٦}}$

$جتا\,\theta = \frac{|-١٢-٦|}{\sqrt{١٠}\,\sqrt{٥٢}} = \frac{١٨}{\sqrt{٥٢٠}}$

∴ $(\theta^\circ) = ٣٧^\circ\ ٥٢'$

(٧) $\overline{أب} = ب - أ = (٦،٢،٣)$

الشغل $ش = ق \,.\, \overline{أب} = (٣،٠،٧) \bullet (٦،٢،٣)$

$= ١٨ + ٢١ = ٣٩$ وحدة شغل

(٨) $س \times ص = ع$ الجواب (د)

(٩) $(أ - ٢ب)\,.\,(٣أ + ٥ب)$

$= ٣(أ\,.\,أ) + ٥(أ\,.\,ب)$

$- ٦(ب\,.\,أ) - ١٠(ب\,.\,ب)$

$= ٣ \times ١ +$ صفر $-$ صفر $- ١٠ \times ١ = -٧$ الجواب (ب)

(١٠) $أ \,.\, ب \in [-١،١]$ الجواب (جـ)

(١١) $جتا\,\theta = \frac{|(٢،-٢،٢)\,.\,(١،١،٢٤)|}{\sqrt{٤+٤+٤}\,\sqrt{١+١+١٦}}$

$جتا\,\theta = \frac{|٢-٢+٨|}{\sqrt{١٢}\,\sqrt{١٨}} = \frac{٨}{٦\sqrt{٦}}$

∴ $(\theta^\circ) = ٥٧,٠٢^\circ$ الجواب (أ)

(١٢) ∵ المتجهان متوازيان فإن :

$\frac{٢}{٤} = \frac{ك}{٦} = \frac{-٣}{-٦}$ ∴ $ك = ٣$ الجواب (ب)

(١٣) (أ) $أ \,.\, ب = (٥،١،-٢)\,.\,(٤،-٤،٣)$

$= ٢٠ - ٤ - ٦ = ١٠$

(ب) $أ \,.\, ب = -١٨ - ٨ - ٢ = -٢٨$

(جـ) $أ \,.\, ب = ١ \times ٠ + ٠ \times ٢ + ٠ \times ١٠ = ٠$

(١٤) (أ) $جتا\,\theta = \frac{|٥+١+٢|}{\sqrt{٢٥+١+٤}\,\sqrt{١+١+١}} = \frac{٨}{\sqrt{٩٠}}$

∴ $\theta^\circ = ٣٢^\circ\ ٣١'$

(ب) $جتا\,\theta = \frac{|١٤+١٢-٤٠|}{\sqrt{٤٩+٤+١٠٠}\,\sqrt{٤+٣٦+١٦}}$

$جتا\,\theta = \frac{١٤}{\sqrt{١٥٣}\,\sqrt{٥٦}}$ ∴ $\theta^\circ = ٨١^\circ\ ١٨'$

(جـ) $جتا\,\theta = \frac{|٢-٢+٠|}{\sqrt{٤+١+١٦}\,\sqrt{١+٤+٠}} = ٠$

∴ $\theta^\circ = ٩٠^\circ$

(١٥) (أ) $أ \times ب = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & -٤ \end{vmatrix}$

$= -١٥\,س - ٧\,ص - ٩\,ع$

(ب) $أ \times ب = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ -١ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٣ & -٥ \end{vmatrix}$

$= ١٠\,س - ٥\,ص - ٣\,ع$

(جـ) $أ \times ب = ٦ \times ٨$ جا $٦٠\,ي = ٢٤\sqrt{٣}\,ي$

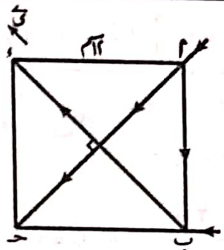
(١٦) (أ) أ ب . أ جـ

= ١٢ × ١٢ √٢ × جتا ٤٥ = ١٤٤

(ب) أ ب × جـ أ =

= ١٢ × ١٢ √٢ × جا ١٣٥ ي

أ ب . جـ أ = ١٤٤ ي



(جـ) ب جـ . أ د = ١٢ × ١٢ × ١ = ١٤٤

(د)

ب د . أ جـ = ١٢ √٢ × ١٢ √٢ × ١ × ي = ٢٨٨ ي

(هـ) أ ب . ب جـ = ٠ من شروط التعامد

(و) أ ب × ب جـ = ١٢ × ١٢ × ١ • ي = − ١٤٤ ي

---

(١٧) $\text{أ} \times \text{ب} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٢ & -٣ & ١ \\ -١ & ٢ & -٣ \end{vmatrix}$

= ٧ س + ٥ ص + ع

‖أ × ب‖ = √(٤٩ + ٢٥ + ١) = √٧٥

متجة الوحدة العمودى على المستوى هو :

$\left(\frac{٧}{\sqrt{٧٥}} ، \frac{٥}{\sqrt{٧٥}} ، \frac{١}{\sqrt{٧٥}}\right)$

---

(١٨) (أ) د هـ = هـ − د = (−١ ، −٥ ، ٥)

د و = و − د = (−٣ ، ٣ ، ٢)

$\text{د هـ} \times \text{د و} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -١ & -٥ & ٥ \\ -٣ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

= −٢٥ س − ١٣ ص − ١٨ ع

∵ مساحة Δ د هـ و = $\frac{١}{٢}$ ‖د هـ × د و‖

= $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٥^{٢} + ١٣^{٢} + ١٨^{٢}}$

= $\frac{١}{٢}\sqrt{١١١٨}$ = ١٦٫٧٢ وحدة مربعة تقريباً

(ب) د هـ = هـ − د = (−٢ ، ١ ، ٣)

د و = و − د = (−٥ ، ٠ ، −٣)

$\text{د هـ} \times \text{د و} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -٢ & ١ & ٣ \\ -٥ & ٠ & -٣ \end{vmatrix}$

= −٣ س − ٢١ ص + ٥ ع

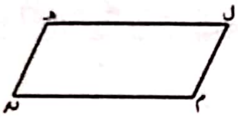
∵ مساحة Δ د هـ و = $\frac{١}{٢}\sqrt{٣^{٢} + ٢١^{٢} + ٥^{٢}}$

= $\frac{٥}{٢}\sqrt{١٩}$ وحدة مربعة

---

(١٩) (أ) ل م = م − ل = (١ ، ٢)

م ن = ن − م = (٣ ، ١)



$\text{ل م} \times \text{م ن} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = -٥\,\text{ع}$

مساحة سطح متوازى الأضلاع = ‖ − ٥ ع ‖

= ٥ وحدات مربعة

(ب) ل م = م − ل = (−١ ، ٣ ، ٢)

م ن = ن − م = (١ ، ١ ، ٢)

$\text{ل م} \times \text{م ن} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

= ٤ س + ٤ ص − ٤ ع

مساحة سطح متوازى الأضلاع = ‖ ل م × م ن ‖

= √(١٦ + ١٦ + ١٦) = ٤ √٣ وحدة مربعة

---

(٢٠) حجم متوازى السطوح = | أ . ب × جـ |

$\text{ب} \times \text{جـ} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٢ & ١ & ٤ \\ ٥ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$

= −٦ س + ٢٤ ص − ٣ ع

أ . ب × جـ = (١ ، ١ ، ٣) . (−٦ ، ٢٤ ، −٣)

= −٦ + ٢٤ − ٩ = ٩

∴ مساحة متوازى السطوح = |٩| = ٩ وحدة مربعة

(٢١) (أ) $\overline{أ} . \overline{ب} = (٠،٢،٢) . (٣،٠،-٤)$

$= ٠ + ٠ - ٨ = -٨$ غير متعامدان

$$\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٠ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & -٤ \end{vmatrix}$$

$= -٨ \overline{س} + ٦ \overline{ص} - ٦ \overline{ع} \ne \overline{و}$ غير متوازيان

(ب) $\overline{هـ} . \overline{و} = (١٠،٤٠،٠) . (٠،-٣،٨)$

$= ٠ - ١٢٠ + ٠ \ne ٠$ غير متعامدان

$\overline{هـ} \times \overline{و} \ne \overline{و}$ غير متوازيان

وبطريقة أخرى :

$\frac{هـ_س}{و_س} = \frac{١٠}{٠}$ ، $\frac{هـ_ص}{و_س} = \frac{٤}{٣٠} \ne \frac{هـ_س}{و_س}$

∴ غير متوازيان

(جـ) $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{-٢}{٨} = -\frac{١}{٤}$ ، $\frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{١}{-٣} = -\frac{١}{٤}$

$\frac{أ_ع}{ب_ع} = \frac{-٢}{٨} = -\frac{١}{٤}$ ∴ متوازيان

تمارين كتاب المدرسة العامة على الوحدة الأولى

(١) س ع الذى معادلته ص = صفر

(٢) (أ) إحداثيات ء هى (٦،٨،٠)

(ب) إحداثيات جـ هى (٠،٨،٠)

(جـ) زوايا الإتجاه للمتجه $\overline{وء}$ هى :

∵ وء = ١٠ ، جتا $\theta_س = \frac{٦}{١٠}$ ،

جتا $\theta_ص = \frac{٨}{١٠}$ ، $\theta_ع = ٩٠°$

∴ زوايا الإتجاه هى (٥٣° ٨َ ، ٣٦° ٥٢َ ، ٩٠°)

(٣) $\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (٥،-٣،٢)$

(٤) ∵ النقطة تقع على الكرة ∴ تحقق معادلتها

∴ $٠ + ٩ + (م - ٣)^2 = ٢٥$ ∴ $(م - ٣)^2 = ١٦$

∴ م - ٣ = ±٤ ، م = ٧ أو م = -١

(٥) ∵ $\overline{أ} // \overline{ب}$ ∴ $\frac{ك}{-٢} = \frac{٣}{٩} = \frac{-٤}{م}$

∴ $ك = -\frac{٢}{٣}$ ∴ م = -١٢

(٦) ∵ $\overline{أ} . \overline{ب} = \|\overline{أ} \times \overline{ب}\|$

$= \|\overline{أ}\| . \|\overline{ب}\|$ جتا $\theta = \|\overline{أ}\| . \|\overline{ب}\|$ جا θ

∴ جتا θ = جا θ ∴ ظا $\theta = ١$ ∴ $\theta = ٤٥°$

(٧) ص = صفر الجواب (ب)

(٨) $نق^2 = ٩ + ١ + ٤ = ١٤$

المعادلة : $س^2 + ص^2 + ع^2 = ١٤$ الجواب (د)

(٩) منتصف $\overline{ءهـ}$ هو $(٤، ١، -\frac{١}{٢})$ الجواب (جـ)

(١٠) ∵ $\overline{أ} // \overline{ب}$ ∴ $\overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{و}$

∴ $\|\overline{أ} \times \overline{ب}\| = ٠$ الجواب (جـ)

(١١) الجواب (جـ)

(١٢) $ك^2 + هـ^2 + و^2 = ١$ الجواب (جـ)

(١٣) ∵ $\overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{و}$ ∴ $\overline{أ} // \overline{ب}$

∵ $\overline{أ} . \overline{جـ} = ٠$ ∴ $\overline{أ} \perp \overline{جـ}$

∴ $\overline{ب} . \overline{جـ} = ٠$ ، لأن $\overline{ب} // \overline{أ}$ ∴ $\overline{ب} \perp \overline{جـ}$ الجواب (أ)

(١٤) محور ص الجواب (جـ)

(١٥) نفرض الرؤوس أ ، ب ، جـ

$(أب)^2 = (٧ - ٥)^2 + (١ - ٣)^2 + (٣ - ٤)^2$

$= ٤ + ٤ + ١ = ٩$ أب = ٣

$(أجـ)^2 = (٧ - ٣)^2 + (١ - ٥)^2 + (٠)^2$

$= ١٦ + ١٦ = ٣٢$ $أجـ = ٤\sqrt{٢}$

$(ب جـ)^2 = (٥ - ٣)^2 + (٣ - ٥)^2 + (٤ - ٣)^2$

$= ٤ + ٤ + ١ = ٩$ ب جـ = ٣

∴ أب = ب جـ ∴ المثلث متساوى الساقين

(١٦) الكرة $س^2 + ص^2 + ع^2 - ٦ع = صفر$

المركز (٠،٠،٣) ، $نق = \sqrt{٩} = ٣$

(١٧) $\overline{أب} = \sqrt{(١+٢)^2 + (٤-٣)^2 + (-٢-٥)^2}$

$\overline{أب} = \sqrt{٩+١+٤٩} = \sqrt{٥٩}$ وحدة طول

(١٨) $\|\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{١+٤+٤} = \sqrt{٩} = ٣$

$\overrightarrow{ي}_{جـ}$ = متجه الوحدة فى إتجاه $\overrightarrow{جـ} = \left(\frac{١}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

(١٩) (أ) ∵ $جتا^٢\theta + جتا^٢ ٦٠ + جتا^٢ ٨٠ = ١$

∴ $جتا^٢\theta = ١ - جتا^٢ ٦٠ - جتا^٢ ٨٠$

∴ $جتا^٢\theta = ٠٫٧١٩٨٤$ ∴ $جتا\,\theta = ٠٫٨٤٨٤$

∴ $(\theta^\circ) = ٣١^\circ\ ٥٧'$

(ب) $\overrightarrow{أ}$ = ١٢ (جتا ٦٠ ، جتا ٨٠ ، جتا ٣١٥٧)

$= \left(\frac{١٣}{٢} ، ٢٫٢٦ ، ١١٫٠٣\right)$

(٢٠) ∵ $\overrightarrow{أ} \,//\, \overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{١}{ك} = \frac{٦}{٣} = \frac{٢}{م}$

∴ $ك = \frac{١}{٢}$ ، $م = ١$ ∴ $\overrightarrow{جـ} = \left(\frac{١}{٢} ، ١ ، \frac{٣}{٢}\right)$

∴ $\|\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{\frac{١}{٤}+١+\frac{٩}{٤}} = \frac{١}{٢}\sqrt{١٤}$

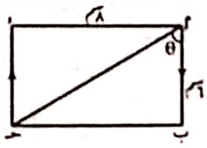
(٢١) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (١ \times ١\ جا\,\theta)\ \overrightarrow{ي}$

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = جا\,\theta = ١$ ∴ $\theta = ٩٠^\circ$

الشرط هو أن المتجهين متعامدين

(٢٢) أ جـ = ١٠ سم

(فيثاغورث)



(أ) $\overrightarrow{أب} . \overrightarrow{اجـ} = ٦ \times ١٠ \times جتا\,\theta$

$\overrightarrow{أب} . \overrightarrow{اجـ} = ٦ \times ١٠ \times \frac{٦}{١٠} = ٣٦$ وحدة

(ب) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{جـ د} = ٦ \times ٦ \times جتا ١٨٠$

$\overrightarrow{أب} . \overrightarrow{اجـ} = -٣٦$ وحدة

(جـ) مركبة $\overrightarrow{جـ د}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب جـ} = \frac{\overrightarrow{جـ د} . \overrightarrow{ب جـ}}{\|\overrightarrow{ب جـ}\|} = ٠$

(٢٣) $\overrightarrow{ق} = (٢ ، ٤ ، -٢) - (١ ، -١ ، ٠) = (١ ، ٥ ، -٢)$

الشغل = $\overrightarrow{ق} . \overrightarrow{ف} = (٢ ، -٣ ، ٥) \cdot (١ ، -١ ، ٠)$

$= ٢ - ١٥ - ١٠ = -٢٣$ وحدة شغل

(٢٤) $\overrightarrow{ق} = ١٠\,\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ف} = -٤٠\,\overrightarrow{س}$

ش = −٤٠٠ وحدة شغل

(٢٥) (أ) $\|\overrightarrow{أ}\|^٢ . \|\overrightarrow{ب}\|^٢ جا^٢\theta + \|\overrightarrow{أ}\|^٢ . \|\overrightarrow{ب}\|^٢ جتا^٢\theta$

∴ الأيمن = $\|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢ (جا^٢\theta + جتا^٢\theta)$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢$ = الأيسر

(ب) ∵ $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠$ ∴ إما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$

أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ..... (١)

، ∵ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ ∴ إما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$

أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{أ} \,//\, \overrightarrow{ب}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) إما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

إختبار كتاب المدرسة التراكمي على الوحدة الأولى

(١) البعد = | -٤ | = ٤ وحدة طول

(٢) ∵ النقطة تقع فى المستوى س ع ∴ ص = صفر

∴ ب + ٣ = صفر ∴ ب = -٣

(٣) نقطة منتصف $\overline{أب}$ هى $(٢ ، -\frac{١}{٢} ، ١)$

(٤) (أ) ب هى (٠ ، ٨ ، ٤) (ب) جـ هى (٠ ، ٠ ، ٤)

(٥) $نق^٢ = (١ + ٢)^٢ + (-٣ + ١)^٢ + (-١ + ١)^٢$

$= ٩ + ٤ + ٠ = ١٣$

معادلة الكرة هى : $(س - ١)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع + ١)^٢ = ١٣$

(٦) $٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}$

$= (-٤ ، ٦ ، ٢) - (٠ ، ٦ ، -٦) + (١ ، -٣ ، ٥) = (-٣ ، -٣ ، ١٣)$

(٧) $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٢٥+٤+٩} = \sqrt{٣٨}$

∴ متجه الوحدة فى إتجاه $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ي}_١ =$

$\left(\frac{٥}{\sqrt{٣٨}} ، \frac{-٢}{\sqrt{٣٨}} ، \frac{٣}{\sqrt{٣٨}}\right)$

(٨) $\|\overrightarrow{أ}\|^٢ = ٩ + ٤ + م^٢ = ٢٢$

∴ $م^٢ = ٩$ ∴ $م = \pm ٣$

الجواب (جـ)

(٩) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = ٨ - ٣ - ٠ = ٥$

الجواب (أ)

(١٠) مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ص} = \frac{\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ص}}{\|\overrightarrow{ص}\|} = \frac{-٣}{١} = -٣$

الجواب (جـ)

(١١) مركبة $\overline{أ}$ في إتجاه $\overline{ب}$

$$= \frac{\overline{أ} \cdot \overline{ب}}{\|\overline{ب}\|} = \frac{٦ + ١٢ - ٠}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{١٨}{٥}$$ الجواب (ب)

(١٢) $\because$ جتا² ٤٥ + جتا² ٤٥ + جتا² θ = ١

$\therefore$ جتا² θ = $١ - \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = ٠$

$\therefore$ جتا θ = صفر $\therefore$ θ = ٩٠° الجواب (ب)

(١٣) نفرض النقط هي أ، ب، جـ

(أب)² = ٢² + ٢² + ١² = ٩

(ب جـ)² = ٢² + (−٤)² + ٤² = ٣٦

(أجـ)² = ٠ + (٦)² + (٣)² = ٤٥

$\because$ (أجـ)² = (أب)² + (ب جـ)²

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في ب.

(١٤) $\because$ الكرة تمس المستوى س ع $\therefore$ نق = ص = ٤

$\therefore$ معادلة الكرة هي : س² + (ص − ٤)² + ع² = ١٦

(١٥) $\|\overline{أ}\| = \sqrt{١ + ٩ + ٤} = \sqrt{١٤}$ وحدة

$\overline{أ} + \overline{ب}$ = (١، −١، ٥)

$\|\overline{أ} + \overline{ب}\| = \sqrt{١ + ١ + ٢٥} = \sqrt{٢٧} = ٣\sqrt{٣}$ وحدة

(١٦) $\because$ جتا² θ + جتا² θ + جتا² θ = ١

$\therefore$ ٣ جتا² θ = ١ $\therefore$ جتا² θ = $\frac{١}{٣}$

$\therefore$ جتا θ = $\pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ الزوايا مع الإتجاهات الموجبة للمحاور

$\therefore$ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ $\overline{أ} = ٢١\sqrt{٣}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}، \frac{١}{\sqrt{٣}}، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ = (٢١، ٢١، ٢١)

(١٧) $\overline{وأ} = \overline{أ} - \overline{و} = \overline{أ}$ = (٢، ٤، ٣)

$\|\overline{أ}\| = \sqrt{٤ + ١٦ + ٩} = \sqrt{٢٩}$

$\overline{ق} = ١٢\sqrt{٢٩}\left(\frac{٢}{\sqrt{٢٩}}، \frac{٤}{\sqrt{٢٩}}، \frac{٣}{\sqrt{٢٩}}\right)$

= (٢٤، ٤٨، ٣٦)

(١٨) $\overline{ق}_١ = \frac{\overline{ق} \cdot \overline{أ}}{\|\overline{أ}\|}\left(\frac{\overline{أ}}{\|\overline{أ}\|}\right) = \frac{\overline{ق} \cdot \overline{أ}}{\|\overline{أ}\|^٢}(\overline{أ})$ ،

$\because$ $\overline{ق} = \overline{ق}_١ + \overline{ق}_٢$ $\therefore$ $\overline{ق}_٢ = \overline{ق} - \overline{ق}_١$

$\therefore$ $\overline{ق}_٢ = \overline{ق} - \frac{\overline{ق} \cdot \overline{أ}}{\|\overline{أ}\|^٢}(\overline{أ})$

(١٩) $\overrightarrow{أب} = \overline{ب} - \overline{أ}$ = (١، ٠، −١)

$\overrightarrow{أجـ} = \overline{جـ} - \overline{أ}$ = (٠، ١، −١)

$$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$= \overline{س} + \overline{ص} + \overline{ع}$

$\|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}\| = \sqrt{١ + ١ + ١} = \sqrt{٣}$

$\therefore$ متجه الوحدة العمودي على المستوى =

$$= \frac{١}{\sqrt{٣}}\left(\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}\right) = \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}، \frac{١}{\sqrt{٣}}، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$$

(٢٠) $\|\overline{جـ}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ٢٥} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$

$\therefore$ $\overline{ي} = \left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}}، \frac{-٤}{٥\sqrt{٢}}، \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

جتا $\theta_{س}$ = $\frac{٣}{٥\sqrt{٢}}$ $\theta_{س}$ = ٦٤° ٥٤'

جتا $\theta_{ص}$ = $\frac{-٤}{٥\sqrt{٢}}$ $\theta_{ص}$ = ١٢٤° ٢٧'

جتا $\theta_{ع}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\theta_{ع}$ = ٤٥°

إختبارات كتاب لامي على الوحدة الاولى

الاختبار الأول

(١) (أ) (١) ∵ $\overline{\text{أ}} \,.\, \overline{\text{ب}}$ متعامدان ∴ $\overline{\text{أ}} \,.\, \overline{\text{ب}} = ٠$

∴ -٤ك + ٤ + ٢٤ = ٠ ∴ ك = ٧

(٢) منتصف $\overline{\text{أب}}$ هو (٤، ٢، ٤)

(ب) (١) المركز هو (-٢، ٤، -٦) الجواب (ب)

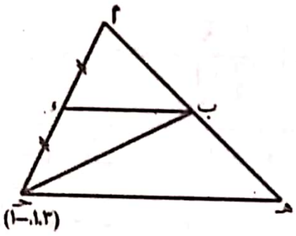
(٢) نق^{٢} = ٥ ∴ طول القطر = ١٠ الجواب (د)

(٢) ء هى (٢، ٢، ٢) ∵ $\overrightarrow{\text{هـ جـ}} \times \overrightarrow{\text{ب ء}} = \vec{\text{و}}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ جـ}} \;//\; \overrightarrow{\text{ب ء}}$

∵ ء منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

∴ ب منتصف $\overline{\text{أهـ}}$



نفرض أن هـ (س، ص، ع)

$\frac{\text{س} + ١}{٢} = -٢$ ∴ س = -٥

$\frac{\text{ص} + ٣}{٢} = ٧$ ∴ ص = ١١

$\frac{\text{ع} + ٥}{٢} = ٤$ ∴ ع = ٣ ∴ هـ هى (-٥، ١١، ٣)

$\overrightarrow{\text{أهـ}} = \text{هـ} - \text{أ} = (-٦، ٨، -٢)$

$\overrightarrow{\text{أجـ}} = \text{جـ} - \text{أ} = (٢، -٢، -٦)$

$$\overrightarrow{\text{أهـ}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ -٦ & ٨ & -٢ \\ ٢ & -٢ & -٦ \end{vmatrix}$$

$= -٥٢\,\hat{\text{س}} - ٤٠\,\hat{\text{ص}} - ٤\,\hat{\text{ع}}$

$\|\overrightarrow{\text{أهـ}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}\| = \sqrt{(-٥٢)^{٢} + (-٤٠)^{٢} + (-٤)^{٢}}$

∴ مساحة Δ أهـجـ = $\frac{١٢\sqrt{٣٠}}{٢}$

= $٦\sqrt{٣٠}$ وحدة مربعة

∵ Δ أب ء، Δ أهـجـ متشابهان

∴ $\frac{\Delta\text{أب ء}}{\Delta\text{أجـهـ}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

∴ مساحة سطح Δ أب ء = $\frac{٦\sqrt{٣٠}}{٤}$

= $\frac{٣}{٢}\sqrt{٣٠}$ وحدة مربعة

(٣) $$\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & -٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

$= ١٥\,\hat{\text{س}} + ١٥\,\hat{\text{ص}} - ٥\,\hat{\text{ع}}$

$\|\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{جـ}}\| = \sqrt{(١٥)^{٢} + (١٥)^{٢} + (-٥)^{٢}}$

= $٥\sqrt{١٩}$ وحدة مربعة

(أ) مساحة سطح Δ = $\frac{٥\sqrt{١٩}}{٢}$ وحدة مربعة

$\vec{\text{أ}} \,.\, \vec{\text{ب}} \times \vec{\text{جـ}} = (٢، ٣، ٥) \,.\, (١٥، ١٥، -٥)$

= ٣٠ + ٤٥ - ٢٥ = ٥٥

(ب) ∴ مساحة متوازى السطوح = ٥٥ وحدة مكعبة

(جـ) ∵ حجم متوازى السطوح = مساحة القاعدة فى الارتفاع

∴ ٥٥ = $٥\sqrt{١٩}$ × الارتفاع

∴ الارتفاع المطلوب = $\frac{٥٥}{٥\sqrt{١٩}} = \frac{١١\sqrt{١٩}}{١٩}$ وحدة طول

(٤) (أ) المركز هو (١، ٤، ١)

نق = $\sqrt{٢^{٢} + ١^{٢} + (-٦)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

معادلة المستوى هى: (س - ١)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٤١

طول القطر = ١٠ الجواب (د)

(ب) ∵ الكرة تمس مستوى الإحداثيات س ع ∴ نق = ٥

∴ معادلة الكرة هى:

(س - ٢)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٢٥

(٥) بالتعويض بالنقطة (٢، ٣، -٤) فى معادلة الكرة:

الأيمن = ٤ + ٩ + ١٦ + ٨ - ٦ - ٢٤ = ٧ الأيسر

∴ النقطة تقع على الكرة $\overrightarrow{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} = (١، ٢، ٢)$

$\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{١ + ٤ + ٤} = ٣$

$\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{آب}} = \left(\frac{١}{٣}،\ \frac{٢}{٣}،\ \frac{٢}{٣}\right)$

$\overrightarrow{\text{ق}} = ١٢ \times \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{آب}} = (٤،\ ٨،\ ٨)$

∵ $\overline{\text{آجـ}}$ قطر فى الدائرة ∴ مركز الدائرة ينصف $\overline{\text{آجـ}}$

∴ المركز (-٢، ١، -٣)

$\overrightarrow{\text{آجـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{آم}} = ٢\left(\text{م} - \text{آ}\right) = ٢\ (-٤،\ -٢،\ ١)$

$= (-٨،\ -٤،\ ٢)$

الشغل = $\overrightarrow{\text{ق}} \bullet \overrightarrow{\text{آجـ}}$ = (٤، ٨، ٨) . (-٨، -٤، ٢)

= -٣٢ - ٣٢ + ١٦ = -٤٨ وحدة شغل

الإختبار الثاني

(١) (أ) (١) $\overrightarrow{\text{آ}} . \overrightarrow{\text{ب}} = ٢ + ١٥ - ٣ = ١٤$

(٢) $\overrightarrow{\text{آ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٥ & -٣ \end{vmatrix}$

$= -١٤\ \text{س} + ٧\ \text{ص} + ٧\ \text{ع}$

(ب) (١) مركبة $\overrightarrow{\text{آ}}$ فى إتجاه $\overrightarrow{\text{ب}} = \frac{\overrightarrow{\text{آ}} . \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

$= \frac{٦ - ١٠ - ٢}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = \frac{-٦}{٣} = -٢$ الجواب (ب)

(٢) $\overrightarrow{\text{آ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٣ & ٥ & -٢ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$

$= \text{س} - ٧\ \text{ص} - ١٦\ \text{ع}$

$\|\overrightarrow{\text{آ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{١ + ٤٩ + ٢٥٦} = \sqrt{٣٠٦}$

∴ مساحة سطح $\Delta = \frac{١}{٢} \sqrt{٣٠٦}$ الجواب (جـ)

(٢) م هى (١، ٣، -١)

نق^٢ = ١ + ٩ + ١ + ١٤ = ٢٥ نق = ٥ وحدات.

(أ) ١ م = $\sqrt{٩ + ٢٥ + ١٦} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$ > نق

∴ ١ تقع خارج الكرة.

(ب) معادلة الكرة هى :

$(\text{س} - ٤)^٢ + (\text{ص} + ٢)^٢ + (\text{ع} - ٣)^٢ = ٥٠$

(٣) $\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٤ & -٢ & ٣ \\ -١ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$

$= -٢٣\ \text{س} - ١٩\ \text{ص} + ١٨\ \text{ع}$

$\overrightarrow{\text{آ}} . \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣، ٢، ٥) . (-٢٣، -١٩، ١٨)

= + ٦٩ - ٣٨ + ٩٠ = ١٢١

∴ حجم متوازى السطوح = ١٢١ وحدة مكعبة

المساحة السطحية = ٢ (مجموع مساحات سطوح ثلاثة أوجه تتلاقى فى نقطة)

$= ٢\left(\|\overrightarrow{\text{آ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}\| + \|\overrightarrow{\text{جـ}} \times \overrightarrow{\text{آ}}\|\right)$

$\overrightarrow{\text{آ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -٣ & ٢ & ٥ \\ ٤ & -٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$= ١٦\ \text{س} + ٢٩\ \text{ص} - ٢\ \text{ع}$

$\|\overrightarrow{\text{آ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{١٦^٢ + ٢٩^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{١١٠١}$

$\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٤ & -٢ & ٣ \\ -١ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$

$= -٢٣\ \text{س} - ١٩\ \text{ص} + ١٨\ \text{ع}$

$\|\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}\| = \sqrt{(-٢٣)^٢ + (-١٩)^٢ + (١٨)^٢}$

$= \sqrt{١٢١٤}$

$\overrightarrow{\text{جـ}} \times \overrightarrow{\text{آ}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -١ & ٥ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$

$= ١٧\ \text{س} - ٧\ \text{ص} + ١٣\ \text{ع}$

$\|\overrightarrow{\text{جـ}} \times \overrightarrow{\text{آ}}\| = \sqrt{٥٠٧}$

∴ المساحة السطحية لمتوازى السطوح =

$٢\left(\sqrt{١١٠١} + \sqrt{١٢١٤} + \sqrt{٥٠٧}\right)$ وحدة مربعة

(٤) (أ) قـ = ٥ سَ + ٨ صَ + ١٢ عَ

فَ = (٠، ١٠، ٠) أو فَ = (٠، −١٠، ٠)

الشغل = قـ . فَ

∴ إما أن الشغل = ٨٠ وحدة شغل أو الشغل = - ٨٠ وحدة شغل

(ب) ∴ جـ × بَ = و ∴ جـ // بَ

∴ جـ = ك بَ = (ك ، −٣ك ، ٢ك)

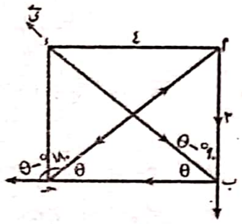
جـ . آ = ٣٩ ∴ ٢ك + ١٥ك − ٤ك = ٣٩

∴ ١٣ك = ٣٩ ∴ ك = ٣

∴ جـ = (٣ ، −٩ ، ٦)

---

(٥) فى الشكل أ جـ = ٥ سم



(أ) أ ب . ب جـ = ٠

(ب) أ ب × ب جـ =

= ٣ × ٤ × جا ٩٠ (−يَ) = − ١٢ يَ

(جـ) ب جـ . جـ أ = ٤ × ٥ جا $(١٨٠ - \theta)$ (−يَ)

= ٤ × ٥ × $\frac{٣}{٥}$ (−يَ) = − ١٢ يَ

(د) مركبة أ ب فى إتجاه ب ء = $\frac{\text{أ ب . ب ء}}{\|\text{ب ء}\|}$

= $\frac{٣ \times ٥ \text{ جتا } (٩٠ - \theta)}{٥}$ = ٣ × $\frac{٣}{٥}$ = ١٫٨ وحدة

(هـ) مركبة أ جـ فى إتجاه ء ب = $\frac{\text{أ جـ . ء ب}}{\|\text{ء ب}\|}$

= $\frac{٥ \times ٥ \text{ جتا } (١٨٠ - ٢\theta)}{٥}$ = −٥ جتا ٢ θ

= −٥ (٢ جتا^{٢} θ − ١) = −٥ × $\frac{٧}{٢٥}$ = ١٫٤ وحدة

إجابات الوحدة الثانية

الخطوط المستقيمة والمستويات في الفراغ

تمارين (٤) معادلة المستقيم في الفراغ

المجموعة الأولى:

(١) (أ) $\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overline{\text{ه}}_1 . \overline{\text{ه}}_2|}{\|\overline{\text{ه}}_1\| \, \|\overline{\text{ه}}_2\|} = \frac{\text{١٨}}{\sqrt{\text{٩}}\,\sqrt{\text{٤٥}}} = \frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٥}}}$

$\text{ق}(\theta^\circ) = \text{٢٦}^\circ \; \text{٣٤}'$

(ب) $\text{جتا}\,\theta = \frac{|\text{١١}|}{\sqrt{\text{١٧}}\,\sqrt{\text{١٤}}}$ ، $\theta = \text{٤٤}^\circ \; \text{٣١}'$

(جـ) $\overline{\text{ه}}_1 = (\text{٢، ٣، ٢})$ ، $\overline{\text{ه}}_2 = (\text{٣، ٢، ٤})$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{٢٠}}{\sqrt{\text{١٧}}\,\sqrt{\text{٢٩}}}$ ، $\theta = \text{٢٥}^\circ \; \text{٤٥}'$

(٢) $\overline{\text{ر}} = (\text{٣، ٤، ٢}) + \text{ك}\,(\text{٣، ١، -١})$

---

(٣) (أ) $\overline{\text{ه}} = (\text{٢، ١، ٤})$ (ب) $\overline{\text{ه}} = (\text{١، -٢، -٢})$

---

(٤) (أ) $\|\overline{\text{ه}}\| = \sqrt{\text{١+٤+٩}} = \sqrt{\text{١٤}}$

∴ (ل ، م ، ن) جيوب تمام الاتجاه هى

$\left(\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١٤}}} ، \frac{-\text{٢}}{\sqrt{\text{١٤}}} ، \frac{\text{٣}}{\sqrt{\text{١٤}}}\right)$

(ب) (ل ، م ، ن) هى $\left(\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٥}}} ، \text{٠} ، \frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٥}}}\right)$

---

(٥) (أ) $\overline{\text{ه}} = (\text{٢، -٢، ١})$

جيوب تمام الاتجاه هى $\left(\frac{\text{٢}}{\text{٣}} ، \frac{-\text{٢}}{\text{٣}} ، \frac{\text{١}}{\text{٣}}\right)$

(ب) $\overline{\text{ه}} = \sqrt{\text{٩+١+١٦}} = \sqrt{\text{٢٦}}$

جيوب تمام الاتجاه هى $\left(\frac{\text{٣}}{\sqrt{\text{٢٦}}} ، \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢٦}}} ، \frac{\text{٤}}{\sqrt{\text{٢٦}}}\right)$

---

(٦) الصورة المتجهة هى :

$\overline{\text{ر}} = (\text{-١، ٥، ٤}) + \text{ك}\,(\text{٢، ٣، ١})$ الجواب (جـ)

---

(٧) $\overline{\text{ه}}_1 . \overline{\text{ه}}_2 = \text{-٦ - ٦ + ١٢ = ٠}$

∴ المستقيمان متعامدان الجواب (ب)

(٨) $\text{جتا}\,\theta = \frac{|\text{١٧}|}{\sqrt{\text{٥٠}}\,\sqrt{\text{١٤}}}$ ، $\theta = \text{٥٠}^\circ \; \text{١}'$ الجواب (ب)

---

(٩) المعادلة المتماثلة هى

$\frac{\text{س} - \text{٢}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص} + \text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع} + \text{١}}{\text{٥}}$ الجواب (جـ)

---

(١٠) متجه الاتجاه $\overline{\text{ه}} = (\text{٣، ١، ٧})$

المعادلة المتجهة هى : $\overline{\text{ر}} = (\text{٢، ٣، ٤}) + \text{ك}\,(\text{٣، ١، ٧})$

الجواب (أ)

---

(١١) $\overline{\text{ه}} = (\text{٢، ٢، ١})$ ، نفرض ب (٤، ٢، ٦)

حيث ب نقطة على المستقيم ∴ مسقط $\overline{\text{أب}}$ على $\overline{\text{ه}} = \frac{\overline{\text{أب}} . \overline{\text{ه}}}{\|\overline{\text{ه}}\|}$

$= \frac{(\text{٠، ٣، ٣}) . (\text{٢، ٢، ١})}{\text{٣}} = \frac{\text{٩}}{\text{٣}} = \text{٣}$

$\|\overline{\text{أب}}\| = \sqrt{\text{٠+٩+٩}} = \sqrt{\text{١٨}}$

طول العمود = $\sqrt{\|\overline{\text{أب}}\|^2 - \text{مربع المسقط}}$

$= \sqrt{\text{١٨} - \text{٩}} = \text{٣}$ وحدة طول الجواب (د)

المجموعة الثانية:

(١) (أ) $\overline{\text{ه}} = (\text{٢، ١، -٢})$ المعادلة المتجهة

هى : $\overline{\text{ر}} = (\text{٣، ٢، ١}) + \text{ك}\,(\text{٢، ١، -٢})$

(ب) $\overline{\text{ر}} = (\text{٢، ٣، ٤}) + \text{ك}\,(\text{١، ٢، -١})$

(جـ) من شرط التوازى ∴ $\overline{\text{ه}}_2 = \overline{\text{ه}}_1$

∴ $\overline{\text{ر}} = (\text{٥، -١، ٢}) + \text{ك}\,(\text{١، -١، ٣})$

(د) متجه اتجاه المستقيم = متجه اتجاه الموازى

∴ $\overline{\text{ه}} = (\text{٤، ٣، ٦})$ ∴ المعادلة هى

$\overline{\text{ر}} = (\text{١، ٤، -١}) + \text{ك}\,(\text{٤، ٣، ٦})$

---

(٢) (أ) الصورة المتجهة هى : $\overline{\text{ر}} = (\text{٢، ١، ٣}) + \text{ك}\,(\text{٣، -١، ١})$

الصورة البارامترية هى : س = ٢ + ٣ك ، ص = ١ - ك ، ع = ٣ + ك

الصورة المتماثلة هى : $\frac{\text{س} - \text{٢}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص} - \text{١}}{-\text{١}} = \frac{\text{ع} - \text{٣}}{\text{١}}$

(ب) $\overrightarrow{ه} = (٢ ، -١ ، ٢)$ المعادلة المتجهة

هى $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢ ، -١) + ك\,(٢ ، -١ ، ٢)$

الصورة البارامترية : س = ١ + ٢ك ، ص = ٢ - ك ، ع = -١ + ٢ك

الصورة المتماثلة : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{-١} = \frac{ع + ١}{٢}$

(جـ) الصورة المتجهة هى : $\overrightarrow{ر} = (-١ ، -٢ ، ٥) + ك\,(٢ ، ٢ ، ١)$

الصورة البارامترية هى : س = -١ + ٢ك ، ص = -٢ + ٢ك ،

ع = ٥ + ك

الصورة المتماثلة هى : $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص + ٢}{٢} = \frac{ع - ٥}{١}$

(٣) (أ) $\overrightarrow{ه}_{١} = (٥ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ه}_{٢} = (-١ ، ٣ ، ٣)$

$جتا\,\theta = \frac{|\overrightarrow{ه}_{١} \cdot \overrightarrow{ه}_{٢}|}{\|\overrightarrow{ه}_{١}\|\,\|\overrightarrow{ه}_{٢}\|}$ ∴ $جتا\,\theta = \frac{|-٥ - ٣ + ٦|}{\sqrt{٣٠}\,\sqrt{١٩}}$

$\theta = ٨٩^{\circ}\ ٤٨'$

(ب) $\overrightarrow{ه}_{١} = (٣ ، ٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ه}_{٢} = (١ ، ٣ ، ٢)$

$جتا\,\theta = \frac{|١١|}{\sqrt{١٤}\,\sqrt{١٤}} = \frac{١١}{١٤}$

$\theta^{\circ} = ٣٨^{\circ}\ ١٣'$

(جـ) $جتا\,\theta = \frac{|-٢ - ٢ + ٤|}{\sqrt{٩}\,\sqrt{٩}}$ = صفر ∴ $\theta = ٩٠^{\circ}$

(٤) (أ) شرط التعامد أن : $أ_{١}أ_{٢} + ب_{١}ب_{٢} + جـ_{١}جـ_{٢}$ = صفر

(ب) شرط التوازى أن : $\frac{أ_{١}}{أ_{٢}} = \frac{ب_{١}}{ب_{٢}} = \frac{جـ_{١}}{جـ_{٢}}$

(جـ) شرط التقاطع أن : $٢ + أ_{١}ك_{١} = -١ + أ_{٢}ك_{٢}$ ،

$٣ + ب_{١}ك_{١} = ٢ + ب_{٢}ك_{٢}$ ، $٥ + جـ_{١}ك_{١} = ١ + جـ_{٢}ك_{٢}$

(٥) $\overrightarrow{ه} = (٥ ، -١ ، -١)$

$\overrightarrow{ر} = (١ ، ١ ، ٠) + ك\,(٥ ، -١ ، -١)$

المعادلة المتماثلة هى : $\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص - ١}{-١} = \frac{ع}{-١}$

بالتعويض بالنقطة

الأيمن = -٣ ، الأوسط = -٣ ، الأيسر = -٣

∴ النقطة تقع على المستقيم لأنها تحققه

(٦) ∵ $\frac{-٢}{١} = -٢$ ، $\frac{-٤}{٢} = -٢$ ، $\frac{٦}{-٣} = -٢$

∴ المستقيمان متوازيان

∵ (٢ ، ٣ ، ٥) تقع على المستقيم الأول ولتكن أ (٢ ، ٣ ، ٥)،

ب (-١ ، ٤ ، ٦) $\overrightarrow{أب} = (٣ ، -١ ، -١)$،

$\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{١١}$ ، $= \frac{|\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{ه}_{٢}|}{\|\overrightarrow{ه}_{٢}\|}$

$= \frac{|(٣ ، -١ ، -١) \cdot (-٢ ، -٤ ، ٦)|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ٣٦}}$

$= \frac{|-٦ + ٤ - ٦|}{\sqrt{٥٦}} = \frac{٨}{\sqrt{٥٦}}$

طول العمود = البُعد بين المستقيمين المتوازيين

$= \sqrt{\|\overrightarrow{أب}\|^{٢} - \text{مربع المسقط}} = \sqrt{١١ - \frac{٦٤}{٥٦}} = \sqrt{\frac{٦٩}{٧}}$

= ٣,١٣٩٦ = ٣,١٤ وحدة تقريباً

(٧) (أ) $٣ + ٢ك_{١} = ٤ + ك_{٢}$

∴ $ك_{٢} = ٢ك_{١} - ١$ ....(١)

$٤ - ك_{١} = -٤ + ٢ك_{٢}$ من (١)

$٤ - ك_{١} = -٤ + ٤ك_{١} - ٢$

$١٠ = ٥ك_{١}$ ∴ $\boxed{ك_{١} = ٢}$

∴ $ك_{٢} = ٤ - ١$ $\boxed{ك_{٢} = ٣}$

، ∵ $١ + ٣ك_{١} = ١٠ - ك_{٢}$

الأيمن = ٧ الأيسر = ٧ ∴ المستقيمان متقاطعان،

س = ٧ ، ص = ٢ ، ع = ٧ ∴ نقطة التقاطع هى (٧ ، ٢ ، ٧)

(ب) $١ + ٣ك_{١} = -١ - ٤ك_{٢}$. $ك_{١} = \frac{-٢ - ٤ك_{٢}}{٣}$ (١)

$٢ + ٢ك_{١} = ١ - ٣ك_{٢}$ من (١)

$٢ + \frac{٢(-٢ - ٤ك_{٢})}{٣} = ١ - ٣ك_{٢}$ ،

بالضرب × ٣ : $٦ - ٤ - ٨ك_{٢} = ٣ - ٩ك_{٢}$

$\boxed{ك_{٢} = ١}$ ، $ك_{١} = \frac{-٢ - ٤}{٣} = -٢$، $\boxed{ك_{١} = -٢}$

$٣ + ٢ك_{١} = -٣ + ٢ك_{٢}$ بالتعويض

الأيمن = - ١ ، الأيسر = - ١

∴ يتقاطعان س = - ٥ ، ص = - ٢ ،

ع = - ١ ∴ نقطة التقاطع هى (- ٥ ، - ٢ ، - ١)

(جـ) س - ٢ = ٢ ك$_1$ ∴ س = ٢ ك$_1$ + ٢

، س - ١٠ = ٣ ك$_2$ س = ١٠ + ٣ ك$_2$

∴ ٢ ك$_1$ + ٢ = ١٠ + ٣ ك$_2$

ك$_1$ = $\frac{\text{٣ك}_2 + ٨}{٢}$ (١)

ص + ٢ = ٢ ك$_1$ ∴ ص = ٢ ك$_1$ - ٢

، ص - ٤ = ٢ ك$_2$ ص = ٢ ك$_2$ + ٤

∴ ٢ ك$_1$ - ٢ = ٢ ك$_2$ + ٤ من (١)

٣ ك$_2$ + ٨ - ٢ = ٢ ك$_2$ + ٤

$\boxed{\text{ك}_2 = -٢}$ من (١) $\boxed{\text{ك}_1 = ١}$

ع - ٤ = - ك$_1$ ∴ ع = ع - ك$_1$

، ع - ٧ = ٢ ك$_2$ ∴ ع = ٢ ك$_2$ + ٧

بالتعويض

الأيمن = ٤ - ١ = ٣

الأيسر = - ٤ + ٧ = ٣

∴ المستقيمان متقاطعان

س = ٤ ، ص = ٠ ، ع = ٣

نقطة التقاطع هى (٤ ، ٠ ، ٣)

---

(٨) ∵ $\overline{\text{هـ}}_1 . \overline{\text{هـ}}_2$ = ٠ + ٥ - ٥ = ٠

∴ المستقيمان متعامدان

، ∵ ٣ = - ٢ + ٥ ك$_2$ ∴ $\boxed{\text{ك}_2 = ١}$

، - ٣ - ٥ ك$_1$ = - ٣ - ك$_2$ ∴ ك$_2$ = ١

- ٣ - ٥ ك$_1$ = ٣ - ١ ∴ $\boxed{\text{ك}_1 = -١}$

ع = ٥ - ٥ = ٠ من الأول

من الثانى ع = ١ - ١ = ٠

∴ يتقاطعان ، س = ٣ ، ص = ٢

∴ نقطة التقاطع هى (٣ ، ٢ ، ٠)

---

(٩) $\overline{\text{هـ}}_1$ = (٢ ، - ١ ، ١) ، $\overline{\text{هـ}}_2$ = (- ٢ ، ٧ ، ١١)

$\overline{\text{هـ}}_1 . \overline{\text{هـ}}_2$ = - ٤ - ٧ + ١١ = صفر ∴ المستقيمان متعامدان

س = ١ + ٢ ك$_1$ ، س - ١ = - ٢ ك$_2$

س = ١ - ٢ ك$_2$ ∴ ك$_1$ = - ك$_2$ (١)

ص = ٢ - ك$_1$ ، ص - ١ = ٧ ك$_2$. ص = $\boxed{\text{١ + ٧ك}_2}$ من (١)

∴ ١ + ٧ ك$_2$ = ٢ + ٢

∴ ك$_2$ = $\frac{١}{٦}$ ، ك$_1$ = $-\frac{١}{٦}$

ع = ٤ + ك$_1$ = ٤ - $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٢٣}{٦}$

، ع - ١ = ١١ ك$_2$ ∴ ع = ١ + $\frac{١١}{٦}$ = $\frac{١٧}{٦}$

∴ ك$_1$ = $-\frac{١}{٦}$ ، ك$_2$ = $\frac{١}{٦}$

لا تحققان المعادلة الثالثة (لإيجاد قيمة ع) ∴ المستقيمان متخالفان

---

(١٠) نفرض أن المستقيمان متقاطعان فى نقطة جـ ∴ جـ ∈ المستقيم المعلوم س = ١ + ٢ك، ص = ٢ك - ١ ، ع = ٢ - ك

∴ جـ (١ + ٢ك، ٢ك - ١ ، ٢ - ك)

$\overline{\text{هـ}}_1$ = قيمة اتجاه المعلوم = (٢ ، ٢ ، - ١)

$\overline{\text{هـ}}_2$ = قيمة اتجاه المستقيم المطلوب = $\overline{\text{اجـ}}$ = $\overline{\text{جـ}} - \overline{\text{ا}}$ =

(١ + ٢ك، ٢ك - ١ ، ٢ - ك) - (٢ ، - ١ ، ٣)

$\overline{\text{هـ}}_2$ = (٢ك - ١ ، ٢ك ، - ك - ١)

من التعامد $\overline{\text{هـ}}_1 . \overline{\text{هـ}}_2$ = ٠ ∴ ٤ك - ٢ + ٤ك + ك + ١ = ٠

٩ك = ١ ∴ ك = $\frac{١}{٩}$

∴ $\overline{\text{هـ}}_2$ = $\left(\frac{-٧}{٩} ، \frac{٢}{٩} ، -\frac{١٠}{٩}\right)$ = (- ٧ ، ٢ ، - ١٠)

، ∵ ا (٢ ، - ١ ، ٣) ∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :

$\overline{\text{ر}}$ = (٢ ، - ١ ، ٣) + ك (- ٧ ، ٢ ، - ١٠)

---

(١١) ا (٢ ، ١ ، - ٤) ، نفرض النقطة أعلى المستقيم ب (١ ، - ١ ، ٢)

$\overline{\text{اب}}$ = $\overline{\text{ب}} - \overline{\text{ا}}$ = (- ١ ، - ٢ ، ٦)

$\|\overline{\text{اب}}\| = \sqrt{١+٤+٣٦} = \sqrt{٤١}$

$|\overline{\text{اب}}.\overline{\text{هـ}}| = |(-١ ، -٢ ، ٦) . (٤ ، ٦ ، -٤)|$

$= |-٤-١٢-٢٤| = ٤٠$

طوع المستقيم $= \dfrac{|\overline{\text{اب}} . \overline{\text{هـ}}|}{\|\overline{\text{هـ}}\|} = \dfrac{٤٠}{\sqrt{٦٨}}$

طول العمود $= \sqrt{\|\overline{\text{اب}}\|^{٢} - \text{مربع المسقط}}$

$= \sqrt{٤١ - \dfrac{١٦٠٠}{٦٨}} = \sqrt{\dfrac{٢٩٧}{١٧}} = \sqrt{١٧٫٤٧} = ٤٫١٨$

(١٢) (أ) $\overline{\text{هـ}} = (-٢ ، ٣ ، ١) - (٠ ، ٠ ، ٠) = (-٢ ، ٣ ، ١)$

$\therefore \overline{ر} = (٠ ، ٠ ، ٠) + ل\,(-٢ ، ٣ ، ١) \quad \therefore \overline{ر} = ل\,(-٢ ، ٣ ، ١)$

المعادلات البارامترية هى : س = -٢ل ، ص = ٣ل ، ع = ل

(ب) $\overline{ر} = (٢ ، -١ ، ٣) + ل\,(٤ ، -٢ ، ٥)$

المعادلات البارامترية هي : س = ٢ + ٤ل ، ص = -١ - ٢ل ،

ع = ٣ + ٥ل

(١٣) لإثبات أن المستقيمان متخالفان يجب إثبات أنهما غير متوازيان وغير متقاطعان.

$\because \dfrac{٤}{١} \neq \dfrac{١}{-١}$ ∴ هما غير متوازيان (١)

$س = ٣ + ٤ل_{١} = ٠ + ل_{٢} \quad \therefore ل_{٢} = ٣ + ٤ل_{١}$ (١)

$ص = -١ + ل_{١} = ٤ - ل_{٢}$ من (١)

$\therefore -١ + ل_{١} = ٤ - ٣ - ٤ل_{١} \quad \therefore ٥ل_{١} = ٢ \quad \therefore ل_{١} = \dfrac{٢}{٥}$

من (١) $\therefore ل_{٢} = ٣ + \dfrac{٨}{٥} = \dfrac{٢٣}{٥}$

$ع = ٢ + ٣ل_{١} = ٢ + \dfrac{٦}{٥} = \dfrac{١٦}{٥}$

$، ع = -١ + ٢ل_{٢} = -١ + \dfrac{٤٦}{٥} = \dfrac{٤١}{٥}$

∴ لا توجد قيمة لـ $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ تحقق المعادلات البارامترية الثلاثة

∴ المستقيمان غير متقاطعان (٢)

من (١) ، (٢) ∴ المستقيمان متخالفان

(١٤) ∵ المستقيم يصنع مع المحاور الموجبة زوايا متساوية القياس ولتكن كل منها = θ

$\therefore \text{جتا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١ \quad ، \quad \text{جتا}^{٢}\theta = \dfrac{١}{٣}$

$\therefore \text{جتا}\theta = \pm \dfrac{١}{\sqrt{٣}}$ ،

∵ الزاوية مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات $\therefore \text{جتا}\theta = \dfrac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ جيوب تمام الاتجاه هى : $\left(\dfrac{١}{\sqrt{٣}} ، \dfrac{١}{\sqrt{٣}} ، \dfrac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

∴ قيمة الاتجاه $\overline{\text{هـ}} = (١ ، ١ ، ١)$ ∴ معادلة المستقيم المتجهة هى

$\overline{ر} = (٤ ، ٣ ، ٢) + ل\,(١ ، ١ ، ١)$

الصورة البارامترية هى: س = ٤ + ل ، ص = ٣ + ل ، ع = ٢ + ل

الصورة المتماثلة هى : س - ٤ = ص - ٣ = ع - ٢

(١٥) (أ) $\overline{\text{هـ}} = (١ ، -٢ ، ٢)$ ، $\|\overline{\text{هـ}}\| = ٣$

∴ جيوب تمام الاتجاه هـ : $\left(\dfrac{١}{٣} ، \dfrac{-٢}{٣} ، \dfrac{٢}{٣}\right)$

معادلة المستقيم هـ : $\overline{ر} = (٤ ، ١ ، ٣) + ل\,(١ ، -٢ ، ٢)$

(ب) $\|\overline{\text{هـ}}\| = \sqrt{١٦+٤+١} = \sqrt{٢١}$

∴ جيوب تمام الاتجاه هى $\left(\dfrac{٤}{\sqrt{٢١}} ، \dfrac{٢}{\sqrt{٢١}} ، \dfrac{١}{\sqrt{٢١}}\right)$

(جـ) $\|\overline{\text{هـ}}\| = \sqrt{٩+١٦+١٤٤} = ١٣$

∴ جيوب تمام الاتجاه هى : $\left(\dfrac{٣}{١٣} ، \dfrac{-٤}{١٣} ، \dfrac{١٢}{١٣}\right)$

المجموعة الثالثة:

تمارين (٢-١) من الكتاب المدرسي

(١) $\overline{ر} = (٢ ، -١ ، ٣) + ل\,(-١ ، ٤ ، ٢)$

(٢) معادلة المستقيم الأول هي : $\dfrac{س}{\frac{١}{٢}} = \dfrac{ص}{\frac{١}{٣}} = \dfrac{ع}{-١}$

$\overline{\text{هـ}}_{١} = \left(\dfrac{١}{٢} ، \dfrac{١}{٣} ، -١\right)$

معادلة المستقيم الثاني هي: $\dfrac{س}{\frac{١}{٦}} = \dfrac{ص}{-١} = \dfrac{ع}{-\frac{١}{٤}}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}_٢ = \left(\frac{١}{٦} ، -١ ، -\frac{١}{٤}\right)$

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}}_١ \cdot \overrightarrow{\text{هـ}}_٢|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}_١\|\,\|\overrightarrow{\text{هـ}}_٢\|} = \frac{\left|\frac{١}{١٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}\right|}{\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{١}{٩} + ١}\ \sqrt{\frac{١}{٣٦} + ١ + \frac{١}{١٦}}} = \text{صفر}$$

∴ $\theta = ٩٠^\circ$

---

(٣) $$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\sqrt{٣} - ١ - \sqrt{٣} - ١ + ٨|}{\sqrt{١ + ١ + ٤}\ \sqrt{(\sqrt{٣} - ١)^٢ + (-\sqrt{٣} - ١)^٢ + ١٦}}$$

$$= \frac{٦}{\sqrt{٦}\ \sqrt{٢٤}} = \frac{١}{٢} \qquad \therefore \theta = ٦٠^\circ$$

---

(٤) $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -١ ، ١)$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{١١}$ ، $\text{جتا}\,\theta_٢ = \frac{١}{\sqrt{١١}}$

---

(٥) $\overrightarrow{\text{هـ}} = (٢ ، -٢ ، ١)$

---

(٦) (أ) $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{١ + ٤ + ٩} = \sqrt{١٤}$

جيوب تمام الاتجاه هي $\left(\frac{-١}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٢}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٤}}\right)$

(ب) $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{١ + ١ + ١} = \sqrt{٣}$

جيوب تمام الاتجاه هي $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

---

(٧) (أ) $\overrightarrow{ر} = (٤ ، -٢ ، ٥ ، ٥) + \text{ل}\,(٢ ، ١ ، -١)$

(ب) من شرط التوازي ∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}_١ = \overrightarrow{\text{هـ}}_٢ = (٤ ، -٢ ، ٢)$

∴ معادلة المستقيم هي: $\overrightarrow{ر} = (٣ ، -١ ، ٥) + \text{ل}\,(٤ ، -٢ ، ٢)$

(جـ) $\overrightarrow{\text{هـ}} = (٣ ، -٦ ، -١)$

معادلة المستقيم هي: $\overrightarrow{ر} = (٣ ، -٢ ، ٠) + \text{ل}\,(٣ ، -٦ ، -١)$

(د) نفرض قياس كل زاوية = θ

∴ $\text{جتا}^٢\,\theta + \text{جتا}^٢\,\theta + \text{جتا}^٢\,\theta = ١$

∴ $\text{جتا}^٢\,\theta = \frac{١}{٣}$ ∴ $\text{جتا}\,\theta = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∵ الزوايا مع الاتجاهات الموجبة

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{هـ}} = (١ ، ١ ، ١)$

معادلة المستقيم هي: $\overrightarrow{ر} = (٣ ، ٢ ، ٥) + \text{ل}\,(١ ، ١ ، ١)$

---

(٨) $\overrightarrow{\text{هـ}} = (١ ، ٦ ، -٣)$

معادلة المستقيم هي: $\overrightarrow{ر} = (١ ، -٢ ، ٤) + \text{ل}\,(١ ، ٦ ، -٣)$

المعادلات البارامترية هي: س = ١ + ل ، ص = −٢ + ٦ل ،

ع = ٤ − ٣ل

---

(٩) (أ) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-٢ ، ٢ ، -٤)$

معادلة المستقيم $\overrightarrow{ر}$: $= (١ ، -٢ ، ١) + \text{ل}\,(-٢ ، ٢ ، -٤)$

(ب) $\overrightarrow{ب\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{ب} = (٤ ، ١ ، ١)$

من شرط التوازي ∴ $\overrightarrow{\text{هـ}} = (٤ ، ١ ، ١)$

∴ معادلة المستقيم هي: $\overrightarrow{ر} = (٨ ، ١ ، ٤) + \text{ل}\,(٤ ، ١ ، ١)$

(جـ) ∵ المستقيم يقطع $\overleftrightarrow{أب}$

∴ نفرض نقطة التقاطع هى نقطة ن ، ∵ ن ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

، ∵ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى $\overrightarrow{ر} = (١ ، -٢ ، ١) + \text{ل}\,(-٢ ، ٢ ، -٤)$

∴ ن تكون على الصورة (١ − ٢ل ، −٢ + ٢ل ، ١ − ٤ل)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب هو $\overrightarrow{\text{هـ}}_٢ = \overrightarrow{\text{جـ}ن} = \overrightarrow{ن} - \overrightarrow{\text{جـ}}$

= (١ − ٢ل ، −٢ + ٢ل ، ١ − ٤ل) − (٣ ، ١ ، −٢)

= (−٢ − ٢ل ، −٣ + ٢ل ، ٣ − ٤ل)

∵ المستقيم المطلوب ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ ∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}_٢ \cdot \overrightarrow{\text{هـ}}_١ = ٠$

∵ $\overrightarrow{\text{هـ}}_١ = (-٢ ، ٢ ، -٤)$

∴ ٤ + ٤ل − ٦ + ٤ل − ١٢ + ١٦ل = ٠

∴ ٢٤ل = ١٤ $\qquad \text{ل} = \frac{٧}{١٢}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}_٢ = \left(-\frac{١٩}{٦} ، \frac{-١١}{٦} ، -\frac{٤}{٣}\right)$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}_٢$ يمكن اعتبارها (−١٩ ، −١١ ، −٨)

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي:

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، ١ ، -٢) + \text{ل}\,(-١٩ ، -١١ ، -٨)$

(١٠) (أ) $\overline{ه}_١$ = (٥ ، ٣ ، -٦) ، $\overline{ه}_٢$ = (٣ ، ٤ ، ١)

جتا $\theta = \frac{|\overline{ه}_١ . \overline{ه}_٢|}{\|\overline{ه}_١\| \|\overline{ه}_٢\|} = \frac{|١٥+١٢-٦|}{\sqrt{٢٥+٩+٣٦}\sqrt{٩+١٦+١}}$

$= \frac{٢١}{\sqrt{٧٠}\sqrt{٢٦}} = ٠,٤٩٢٢٥$

∴ $\theta = ٦٠° ٣١'$

(ب) ∵ $\overline{ه}_١$ = (-١ ، ٤ ، ٢) ، $\overline{ه}_٢$ = (١ ، ١ ، ٣)

جتا $\theta = \frac{|-١+٤+٦|}{\sqrt{١+١٦+٤}\sqrt{١+١+٩}} = \frac{٩}{\sqrt{٢١}\sqrt{١١}}$

∴ $\theta = ٥٣° ٤١'$

(جـ) ل١ : $\frac{س}{\frac{١}{٢}} = \frac{ص}{\frac{١}{٣}} = \frac{ع}{\frac{١}{٤}}$

∴ $\overline{ه}_١ = \left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}\right)$ أي $\overline{ه}_١$ = (٦ ، ٤ ، ٢)

$\overline{ه}_٢$ = (٣ ، -٢ ، -٥)

جتا $\theta = \frac{|١٨-٨-١٠|}{\sqrt{٣٦+١٦+٤}\sqrt{٩+٤+٢٥}}$ = صفر

∴ $\theta = ٩٠°$

---

(١١) (أ) $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

(ب) أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + جـ١ جـ٢ = ٠

(جـ) يتقاطعان إذا كان: س١ + أ١ ك١ = س٢ + أ٢ ك٢ ،

ص١ + ب١ ك١ = ص٢ + ب٢ ك٢ ،

ع١ + جـ١ ك١ = ع٢ + جـ٢ ك٢

ومنها: $\frac{س_١ - س_٢}{أ_٢ ك_٢ - أ_١ ك_١} = \frac{ص_١ - ص_٢}{ب_٢ ك_٢ - ب_١ ك_١} = \frac{ع_١ - ع_٢}{جـ_٢ ك_٢ - جـ_١ ك_١}$

---

(١٢) $\overline{بجـ}$ = جـ - ب = (٥ ، -١ ، -١)

∵ المستقيم // $\overline{بجـ}$ ∴ $\overline{ه}$ = (٥ ، -١ ، -١)

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي:

$\overline{ر}$ = (١ ، -١ ، ٠) + ك (٥ ، -١ ، -١)

∵ $\overline{أد}$ = د - أ = (-١٥ ، ٣ ، ٣) = -٣ (٥ ، -١ ، -١)

∴ $\overline{أد}$ // المستقيم المار بنقطة أ

وهما يشتركان في النقطة أ ∴ د تقع على المستقيم

---

(١٣) المستقيم الأول: ل١ : $\overline{ر}$ = (٣ ، -١ ، ن) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣)

المستقيم الثاني هو: ل٢ : $\overline{ر}_٢$ = (٠ ، ٤ ، -١) + ك٢ (١ ، -١ ، ٢)

∵ س = ٣ + ٤ك١ = ٠ + ك٢ ∴ ك٢ = ٣ + ٤ك١ ... (١)

ص = -١ + ك١ = ٤ - ك٢ من (١)

∴ -١ + ك١ = ٤ - ٣ - ٤ك١ ∴ ٥ك١ = ٢ ∴ $\boxed{ك_١ = \frac{٢}{٥}}$

من (١) $\boxed{ك_٢ = \frac{٢٣}{٥}}$

المعادلة الثالثة : ع = ن + ٣ك١ = -١ + ٢ك٢

∵ $ك_١ = \frac{٢}{٥}$ ، $ك_٢ = \frac{٢٣}{٥}$

∴ $ن = -١ + ٢ \times \frac{٢٣}{٥} - ٣ \times \frac{٢}{٥}$ $\boxed{ن = ٧}$

---

(١٤) (أ) خطأ :والصحيح مجموع مربعات جيوب تمام زوايا الاتجاه=١

(ب) خطأ : والصحيح

نسب الاتجاه للمستقيم = (س٢ - س١ ، ص٢ - ص١ ، ع٢ - ع١)

(جـ) خطأ : والصحيح

جتا $\theta = \frac{|أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢|}{\sqrt{أ_١^٢ + ب_١^٢ + جـ_١^٢}\sqrt{أ_٢^٢ + ب_٢^٢ + جـ_٢^٢}}$

تمارين (٥) معادلة المستوى في الفراغ

المجموعة الأولى:

(١) معادلة المستوى هى : $\overline{ن} . \overline{ر} = \overline{ن} . \overline{أ}$

∴ هي: (١ ، -١ ، ٣) . $\overline{ر}$ = (١ ، -١ ، ٣) . (٢ ، ٣ ، ٤)

= ٢ - ٣ + ١٥ = ١٤ ∴ المعادلة هى : (١ ، -١ ، ٣) . $\overline{ر}$ = ١٤

---

(٢) طول العمود ل =

$= \frac{|٤×٣ - ١٢×-٣ + ٤×٥ - ٣|}{\sqrt{٣^٢ + (-١٢)^٢ + ٤^٢}} = \frac{٦٥}{١٣} = ٥$ وحدة طول

---

(٣) $\overline{ن}_١$ = (٢ ، ١ ، -٢) ، $\overline{ن}_٢$ = (١ ، ٢ ، ٢)

جتا $\theta = \frac{|\overline{ن}_١ . \overline{ن}_٢|}{\|\overline{ن}_١\| \|\overline{ن}_٢\|} = \frac{|٢+٢-٤|}{\sqrt{٩}\sqrt{٩}}$ = صفر

∴ $\theta = ٩٠°$ ∴ المستويان متعامدان

(٤) من شرط التوازى ∴ $\overline{ن}_١ = \overline{ن}_٢ = (١ ، ٤ ، -٥)$

∴ معادلة المستوى هى $(١ ، ٤ ، -٥) . \overline{ر} = (١ ، ٤ ، -٥) . (٥ ، ٦ ، -١)$

∴ هى $(١ ، ٤ ، -٥) . \overline{ر} = ٣٤$

---

(٥) من شرط التعامد ∴ $\overline{ن}_١ . \overline{ن}_٢ = ٠$

∴ $(٢ ، ٣ ، -٤) . (٣ ، ٢ ، ك) = ٠ ، ٦ + ٦ - ٤ك = ٠$ $\boxed{ك = ٣}$

---

(٦) من شرط التوازى ∴ $\frac{٦}{٣} = \frac{٨}{ك} = \frac{ن}{٢}$

∴ ك = ٤ ، ن = ٤ .

---

(٧) معادلة المستوى هى : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{٥} = ١$

---

(٨) ٣ س + ٥ ص - ٤ ع = ١٢ بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{\frac{١٢}{٥}} + \frac{ع}{-٣} = ١$ ∴ أ = ٤ ، ب = $\frac{١٢}{٥}$ ، جـ = -٣

---

(٩) (٢ ، ٣ ، -٢) . (س ، ص ، ع) = ٥

∴ الصورة العامة هى : ٢ س + ٣ ص - ٢ ع = ٥

---

(١٠) $جتا\theta = \frac{|\overline{ن}_١ . \overline{ن}_٢|}{\|\overline{ن}_١\| \|\overline{ن}_٢\|} = \frac{|٢٦|}{\sqrt{٩}\sqrt{١٦٩}} = \frac{٢}{٣}$

$\theta = ٤٨° \; ١١' \; ٢٣''$

---

(١١) ∵ النقطة تقع على المستوى ∴ تحقق معادلته

∴ ٦ + ٦ - ٤ك = ٤ ∴ $\boxed{ك = ٢}$

---

(١٢) ∵ النقطة تقع على المستوى ∴ تحقق معادلته

∴ $س_١ + ٢ص_١ + ٣ع_١ = ١٥$

---

(١٣) النقطة (١ ، ٢ ، - ٣) تحقق المعادلة

∴ تقع على المستوى الجواب (أ)

---

(١٤) ∵ ٣س + ٥ ص - ٢ ع = ١٥ ÷ ١٥

$\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{\frac{١٥}{-٢}} = ١$

يقطع من محور الصادات جزء طوله = ٣ الجواب (ب)

حل آخر : أى نقطة على محور الصادات هى (٠ ، ص ، ٠)

∴ ٠ + ٥ ص + ٠ = ١٥ ∴ ص = ٣

النقطة (٠ ، ٣ ، ٠) ∴ يقطع من محور

الصادات جزء طوله = ٣ الجواب (ب)

---

(١٥) ∵ ٢ س + ٣ ص - ع = ٦ ÷ ٦

$\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} + \frac{ع}{-٦} = ١$

أ + ب + جـ = ٣ + ٢ - ٦ = -١ الجواب (جـ)

---

(١٦) طول العمود = ل = $\frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$

$= \frac{|٩ + ٨ + ١٢ + ١٠|}{\sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤}} = \frac{٣٩}{١٣} = ٣$ الجواب (د)

(١٧) ∵ المستوى يوازى مستوى الإحداثيات س ع

∴ المتجه العمودى = $\overline{ص}$ ∴ معادلة المستوى هى

$\overline{ص} . \overline{ر} = \overline{ص} . (-١ ، ٢ ، -٣)$ $\boxed{ص = ٢}$ الجواب (أ)

---

(١٨) من شرط التوازى ∴ $\overline{ن}_١ = \overline{ن}_٢ = (٢ ، -١ ، ٣)$

∴ معادلة المستوى ص: $(٢ ، -١ ، ٣) . \overline{ر} = ٣٢$ الجواب (أ)

---

(١٩) $\overline{ن} = (٣ ، -٢ ، -٢)$

∴ معادلة المستوى هي: $(٣ ، -٢ ، -٢) . \overline{ر} = ١٣$ ∴ هى

٣ س - ٢ ص - ٢ ع = ١٣ × -١

-٣ س + ٢ ص + ٢ ع + ١٣ = ٠ الجواب (ب)

---

(٢٠) $\overline{ن}_١ = (٢ ، ٥ ، ٣)$ ، $\overline{ن}_٢ = (١ ، ٢ ، -٢)$

∴ $جتا\theta = \frac{|٢ + ١٠ - ٦|}{\sqrt{٤ + ٢٥ + ٩}\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = \frac{٦}{٣\sqrt{٣٨}} = \frac{٢}{\sqrt{٣٨}}$

$\theta = ٧١° \; ٤'$ الجواب (د)

المجموعة الثانية:

(١) ∵ المتجهين $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ د}$ يقعان فى المستوى

∴ العمودى عليهما يكون عمودياً على المستوى

$$\overline{ب جـ} \times \overline{جـ د} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٢ & -١ & ٥ \\ ٣ & -٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٦\overline{س} + ٧\overline{ص} - \overline{ع}$$

= متجه عمودى على المستوى ∴ $\bar{\text{ن}}$ = (٦، ٧، -١)

∴ معادلة المستوى هى $\bar{\text{ن}}.\bar{\text{ر}} = \bar{\text{ن}}.\bar{\text{أ}}$

∴ هى : (٦، ٧، -١) . $\bar{\text{ر}}$ = (٦، ٧، -١) . (١، ٥، ٣)

∴ هى : (٦، ٧، -١) . $\bar{\text{ر}}$ = ٣٨.

---

(٢) (أ) $\overline{\text{أب}} = \bar{\text{ب}} - \bar{\text{أ}}$ = (١، -١، -٣)

$\overline{\text{أجـ}} = \bar{\text{جـ}} - \bar{\text{أ}}$ = (-١، ٢، ٢)

$$\overline{\text{أب}} \times \overline{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ١ & -١ & -٣ \\ -١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٤\bar{\text{س}} + \bar{\text{ص}} + \bar{\text{ع}}$$

∴ المتجه العمودى على المستوى = $\bar{\text{ن}}$ = (٤، ١، ١)

معادلة المستوى : $\bar{\text{ن}}.\bar{\text{ر}} = \bar{\text{ن}}.\bar{\text{أ}}$

(٤، ١، ١) . $\bar{\text{ر}}$ = (٤، ١، ١) . (٢، ٣، ١)، (٤، ١، ١) . $\bar{\text{ر}}$ = ١٢

(ب) $\overline{\text{أب}} = \bar{\text{ب}} - \bar{\text{أ}}$ = (١، -٦، ١) ،

$\overline{\text{أجـ}} = \bar{\text{جـ}} - \bar{\text{أ}}$ = (-٢، -٣، -٢)

$$\overline{\text{أب}} \times \overline{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ١ & -٦ & ١ \\ -٢ & -٣ & -٢ \end{vmatrix}$$

= ١٥$\bar{\text{س}}$ - ١٥$\bar{\text{ع}}$ عمودى على المستوى

∴ متجه الاتجاه العمودى $\bar{\text{ن}}$ = (١، ٠، -١)

∴ معادلة المستوى هى : $\bar{\text{ن}}.\bar{\text{ر}} = \bar{\text{ن}}.\bar{\text{أ}}$ ، (١، ٠، -١) . $\bar{\text{ر}}$ = -٢

---

(٣) (أ) س = ٣ + ك_1 = ٢ + ك_2 ∴ $\text{ك}_2 = \text{ك}_1$ + ١ .... (١)

ص = ١ + ٢ك_1 = ٥ - ك_2 من (١) ∴ ١ + ٢ك_1 = ٥ - ك_1 - ١

∴ ٣ك_1 = ٣ ∴ ك_1 = ١ ∴ ك_2 = ٢

ع = -١ + ٣ك_1 = ٢ ، ع = ك_2 = ٢ ∴ المستقيمان

متقاطعان فى النقطة (٤، ٣، ٢)

$$\because \bar{\text{هـ}}_1 \times \bar{\text{هـ}}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix}$$

= ٥$\bar{\text{س}}$ + ٢$\bar{\text{ص}}$ - ٣$\bar{\text{ع}}$ عمودى على المستوى

∴ $\bar{\text{ن}}$ = (٥، ٢، -٣) والنقطة (٤، ٣، ٢) تقع فى المستوى

∴ معادلة المستوى هي: $\bar{\text{ن}}.\bar{\text{ر}} = \bar{\text{ن}}.\bar{\text{أ}}$ ، (٥، ٢، -٣) . $\bar{\text{ر}}$ = ٢٠

(ب) المستقيمان متقاطعان فى النقطة (٠، ٠، ٠)

∵ ل_1: $\frac{\text{س}}{٦} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٣}$ ، ل_2: $\frac{\text{س}}{١٠} = \frac{\text{ص}}{١٥} = \frac{\text{ع}}{٦}$

∴ $\bar{\text{هـ}}_1$ = (٦، ٤، ٣) ، $\bar{\text{هـ}}_2$ = (١٠، ١٥، ٦)

$$\bar{\text{هـ}}_1 \times \bar{\text{هـ}}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ٦ & ٤ & ٣ \\ -١ & ١٥ & ٦ \end{vmatrix} = -٢١\bar{\text{س}} - ٦\bar{\text{ص}} + ٥٠\bar{\text{ع}}$$

∴ $\bar{\text{ن}}$ = (-٢١، -٦، ٥٠)

∴ معادلة المستوى هي : $\bar{\text{ن}}.\bar{\text{ر}} = \bar{\text{ن}}.\bar{\text{أ}}$

(-٢١، -٦، ٥٠) . $\bar{\text{ر}}$ = صفر

(جـ) س = ٢ + ٢ك_1 = ٣ + ٣ك_2 ∴ $\text{ك}_1 = \frac{٣\text{ك}_2 + ١}{٢}$ .... (١)

ص = ٣ + ٣ك_1 = ٧ + ٢ك_2 من (١)

٣ + ٣ × $\frac{٣\text{ك}_2 + ١}{٢}$ = ٧ + ٢ك_2

∴ بالضرب × ٢ : ٦ + ٩ك_2 + ٣ = ١٤ + ٤ك_2

٥ك_2 = ٥ ∴ $\boxed{\text{ك}_2 = ١}$

من (١) ∴ $\text{ك}_1 = \frac{٣ + ١}{٢}$ = ٢ ∴ $\boxed{\text{ك}_1 = ٢}$

∴ ع = ١ - ك_1 = ١ - ٢ = -١

، ع = -٥ + ٤ك_2 = -٥ + ٤ = -١

∴ المستقيمان متقاطعان فى النقطة (٦، ٩، -١) تقع فى المستوى

∵ $\bar{\text{هـ}}_1$ = (٢، ٣، -١)، $\bar{\text{هـ}}_2$ = (٣، ٢، ٤)

$$\therefore \bar{\text{هـ}}_1 \times \bar{\text{هـ}}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٤\bar{\text{س}} - ١١\bar{\text{ص}} - ٥\bar{\text{ع}}$$

= متجه عمودى على المستوى ∴ $\bar{\text{ن}}$ = (١٤، -١١، -٥)

∴ معادلة المستوى هي: $\bar{\text{ن}}.\bar{\text{ر}} = \bar{\text{ن}}.\bar{\text{أ}}$

(١٤، -١١، -٥) . $\bar{\text{ر}}$ = (١٤، -١١، -٥) . (٦، ٩، -١)

∴ المعادلة هي : (١٤، -١١، -٥) . $\bar{\text{ر}}$ = -١٠

(٤) (أ) الصورة القياسية هى

أ (س − س$_١$) + ب (ص − ص$_١$) + جـ (ع − ع$_١$) = ٠

∴ هى : ٢ (س − ٣) + (ص + ٥) + (ع − ٢) = ٠

الصورة العامة هى : ٢ س + ص + ع − ٣ = ٠

(ب) الصورة القياسية هى : (س + ٣) − (ص − ٤) + ٣ (ع − ٢) = ٠

الصورة العامة هى : س − ص + ٣ ع + ١ = ٠

---

(٥) (أ) $\bar{ن}_١$ = (٢ ، ١ ، ٤) ، $\bar{ن}_٢$ = (٣ ، −١ ، ٢)

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\bar{ن}_١ \cdot \bar{ن}_٢|}{\|\bar{ن}_١\|\,\|\bar{ن}_٢\|} = \frac{|٦ - ١ + ٨|}{\sqrt{٤+١+١٦}\,\sqrt{٩+١+٤}}$$

$$= \frac{١٣}{\sqrt{٢١}\,\sqrt{١٤}} \quad ، \quad \theta = ٤٢^{\prime}\ ٤٠^{\circ}$$

(ب) $\bar{ن}_١$ = (١ ، −٣ ، ٢) ، $\bar{ن}_٢$ = (٢ ، ١ ، −١)

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|١ - ٣|}{\sqrt{١٤}\,\sqrt{٦}} = \frac{٣}{\sqrt{١٤}\,\sqrt{١٦}}$$

$$\theta = ٥٤^{\prime}\ ٧٠^{\circ}$$

(جـ) $\bar{ن}_١$ = (٣ ، ٢ ، −٥) ، $\bar{ن}_٢$ = (٣ ، ٣ ، ٣)

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{صفر}}{\sqrt{٣٨}\,\sqrt{٢٧}} = \text{صفر}$$

∴ $\theta = ٩٠^{\circ}$ أى أن المستويان متعامدان.

---

(٦) من شرط التعامد ∴ $\bar{ن}_١ \cdot \bar{ن}_٢$ = صفر ،

∵ $\bar{ن}_١$ = (أ ، ٢ ، ٣) ، $\bar{ن}_٢$ = (١ ، −٣ ، ١)

∴ أ − ٦ + ٣ = ٠ ∴ $\boxed{أ = ٣}$

---

(٧) من شرط التوازى ∴ $\bar{ن}_١ \,/\!/\, \bar{ن}_٢$ ∴ $\frac{٢}{١} = \frac{-١}{م} = \frac{ك}{٤}$

∴ م = $-\frac{١}{٢}$ ، ك = −٢

---

(٨) (أ) ∵ $\frac{٢}{١} = \frac{٦}{٣} = \frac{-٨}{-٤}$ ∴ المستويان متوازيان

نفرض نقطة على الأول ولتكن (س ، ٠ ، ٠)

∴ ٢ س + ٠ − ٠ = ٤ ∴ س = ٢

النقطة هى (٢ ، ٠ ، ٠)

$$ل = \frac{|٢ + ٠ - ٠ - ١٥|}{\sqrt{١ + ٩ + ١٦}} = \frac{١٣}{\sqrt{٢٦}} = \frac{\sqrt{٢٦}}{٢} \text{ وحدة طول}$$

(ب) ∵ $\frac{٣}{١} = \frac{٦}{٢} = \frac{٦}{٢}$ ∴ المستويان متوازيان

نأخذ نقطة على الأول ولتكن (س ، ٠ ، ٠)

∴ ٣ س + ٠ + ٠ = ٩ ∴ س = ٣

النقطة هى (٣ ، ٠ ، ٠)

المستوى الثانى هو س + ٢ ص + ٢ ع − ١٢ = ٠

$$\therefore \text{طول العمود} = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$

$$= \frac{|٣ \times ١ + ٠ + ٠ - ١٢|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = \frac{٩}{٣} = ٣ \text{ وحدات طول}$$

---

(٩) (أ) المستوى معادلته هى : ٢ س + ٢ ص − ع − ٥ = ٠

$$ل = \text{طول العمود} = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$

$$= \frac{|١ \times ٢ - ١ \times ٢ + ٧ \times - ١ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = \frac{١٢}{٣} = ٤ \text{ وحدات طول.}$$

(ب) معادلة المستوى هى : س − ٣ ص + ٢ ع − ١٥ = ٠

$$\text{طول العمود} = \frac{|-٢ - ٣ - ٨ - ١٥|}{\sqrt{١ + ٩ + ٤}}$$

$$= \frac{٢٨}{\sqrt{١٤}} = ٢\sqrt{١٤} \text{ وحدة طول}$$

$$\text{(جـ) طول العمود} = ل = \frac{|١٢ + ١٥ + ٢٤ - ١٢|}{\sqrt{١٦ + ٩ + ١٤٤}}$$

$$= \frac{٣٩}{١٣} = ٣ \text{ وحدة طول}$$

---

(١٠) معادلة المستوى هى :

(أ) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٤} + \frac{ع}{٥} = ١$ (ب) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{٤} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{-٣} + \frac{ع}{٣} = ١$

(د) ∵ أ ب = ٢ (١) ، أ جـ = ٣ .... (٢)

ب جـ = ٦ .... (٣) ∴ بضرب (١) × (٢) ÷ ٣

$$\frac{أ^٢ ب جـ}{ب جـ} = \frac{٦}{٦} = ١ \quad \therefore أ = \pm ١$$

∵ أ > ٠ ∴ $\boxed{أ = ١}$ ، من (١) ∴ $\boxed{ب = ٢}$ من (٢) ∴ $\boxed{جـ = ٣}$

∴ معادلة المستوى هي : $\frac{س}{١} + \frac{ص}{٢} + \frac{ع}{٣} = ١$

(١١) (أ) ٢ س + ٣ ص + ٤ ع = ١٢ ÷ ١٢

$\frac{\text{س}}{٦} + \frac{\text{ص}}{٤} + \frac{\text{ع}}{٣} = ١$ ∴ أ (٦، ٠، ٠)، ب (٠، ٤، ٠)، جـ (٠، ٠، ٣)

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (−٦، ٤، ٠) ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = جـ − أ = (−٦، ٠، ٣)

$$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ -٦ & ٤ & ٠ \\ -٦ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ١٢\overline{\text{س}} + ١٨\overline{\text{ص}} + ٢٤\overline{\text{ع}}$$

∵ $\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}\|$ = ٢ × مساحة سطح Δ أ ب جـ

∴ $\sqrt{١٢^٢ + ١٨^٢ + ٢٤^٢}$ = ٢ مساحة Δ

∴ مساحة سطح Δ أ ب جـ = $\frac{٦\sqrt{٢٩}}{٢} = ٣\sqrt{٢٩}$ وحدة مربعة.

(ب) ٣ س − ٢ ص − ٣ ع = ١٢ ÷ ١٢

$\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{-٦} + \frac{\text{ع}}{-٤} = ١$

∴ أ = (٤، ٠، ٠)، ب (٠، −٦، ٠)، جـ (٠، ٠، −٤)

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (−٤، −٦، ٠)، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = جـ − أ = (−٤، ٠، −٤)

$$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ -٤ & -٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & -٤ \end{vmatrix} = ٢٤\overline{\text{س}} - ١٦\overline{\text{ص}} - ٢٤\overline{\text{ع}}$$

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}\|$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤^٢ + (-١٦)^٢ + (-٢٤)^٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٨\sqrt{٢٢} = ٤\sqrt{٢٢}$ وحدة مربعة

(جـ) بالقسمة على ٢٠ ∴ $\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{١٠} + \frac{\text{ع}}{١٠} = ١$

∴ أ (٤، ٠، ٠)، ب (٠، ١٠، ٠) جـ (٠، ٠، ١٠)

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = (−٤، ١٠، ٠)، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (−٤، ٠، ١٠)

$$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ -٤ & ١٠ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = ١٠٠\overline{\text{س}} + ٤٠\overline{\text{ص}} + ٤٠\overline{\text{ع}}$$

∴ مساحة سطح Δ أبجـ = $\frac{١}{٢}\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}\|$

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{(١٠٠)^٢ + ٤٠^٢ + ٤٠^٢} = \frac{١}{٢} \times ٢٠\sqrt{٣٣}$

$= ١٠\sqrt{٣٣}$ وحدة مربعة.

(١٢) (أ) من شرط التوازى ∴ $\overline{\text{ن}}$ = (٣، −١، ٤)

∴ المعادلة المتجهة هى: $\overline{\text{ن}} . \overline{\text{ر}} = \overline{\text{ن}} . \overline{\text{أ}}$

∴ (٣، −١، ٤) . $\overline{\text{ر}}$ = (٣، −١، ٤) . (٥، ٢، ٣) = ٢٧

∴ هى (٣، −١، ٤) . $\overline{\text{ر}}$ = ٢٧

الصورة القياسية هى: ٣ (س − ٥) − (ص − ٢) + ٤ (ع − ٣) = ٠

الصورة العامة هى: ٣ س − ص + ٤ ع − ٢٧ = ٠

(ب) $\overline{\text{ن}}$ = (٥، −٢، ٥)

الصورة المتجهة للمعادلة هى: $\overline{\text{ن}} . \overline{\text{ر}} = \overline{\text{ن}} . \overline{\text{أ}}$

∴ هى: (٥، −٢، ٥) . $\overline{\text{ر}}$ = (٥، −٢، ٥) . (١، ٢، ٣)

∴ هى (٥، −٢، ٥) . $\overline{\text{ر}}$ = ١٦

الصورة القياسية هى: ٥ (س − ١) − ٢ (ص − ٢) + ٥ (ع − ٣) = ٠

الصورة العامة هى: ٥ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٦

(١٣) (أ) ∵ المستوى المطلوب عمودى على المستويين

∴ عمودى على خط تقاطعهما.

∵ خط التقاطع واقع فى كل من المستويين

∴ عمودى على $\overline{\text{ن}}_١$ ، $\overline{\text{ن}}_٢$

∴ متجه اتجاه خط التقاطع $\overline{\text{ن}}_١ \times \overline{\text{ن}}_٢ = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ٥\overline{\text{س}} - ٧\overline{\text{ص}} - ١١\overline{\text{ع}}$

∴ متجه اتجاه العمودى على المستوى المطلوب $\overline{\text{ن}}_٣$

هو $\overline{\text{ن}}_٣$ = (٥، −٧، −١١)

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى هى:

(٥، −٧، −١١) . $\overline{\text{ر}}$ = (٥، −٧، −١١) . (٢، −٣، ٤)

∴ (٥، −٧، −١١) . $\overline{\text{ر}}$ = −١٣

الصورة القياسية هى: ٥ (س − ٢) − ٧ (ص + ٣) − ١١ (ع − ٤) = ٠

الصورة العامة هى: ٥ س − ٧ ص − ١١ ع + ١٣ = ٠

(ب) ∵ $\overline{\text{ن}}_١$ = (٢، −٢، −١)،

$\overline{\text{ن}}_٢$ = (٥، ١، −٢)

، ∵ $\overline{\text{ن}}_١ \times \overline{\text{ن}}_٢ = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٢ & -٢ & -١ \\ ٥ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٥\overline{\text{س}} - \overline{\text{ص}} + ١٢\overline{\text{ع}}$

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \overline{\text{ن}}_٢ = (٥ ، -١ ، ١٢)$

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى هى :

$(٥ ، -١ ، ١٢) \cdot \overline{\text{ر}} = (٥ ، -١ ، ١٢) \cdot (٢ ، -٣ ، ٤)$

∴ هى $(٥ ، -١ ، ١٢) \cdot \overline{\text{ر}} = ٦١$

الصورة القياسية هى : ٥ (س - ٢) - (ص + ٣) + ١٢ (ع - ٤) = ٠

الصورة العامة هى : ٥ س - ص + ١٢ ع = ٦١ .

(جـ) ∵ المستوى يحتوى المستقيم الأول ويوازى الثانى

∴ يحتوى $\overline{\text{هـ}}_١ = (-٢ ، ٢ ، ١)$

ويوازى (٣ ، ٢ ، -٢) أى يمكن أن يحتوى $\overline{\text{هـ}}_٢ = (٣ ، ٢ ، -٢)$

، ∵ $\overline{\text{هـ}}_١ \times \overline{\text{هـ}}_٢$ متجه ⊥ على $\overline{\text{هـ}}_١ ، \overline{\text{هـ}}_٢$

∴ هو متجه ⊥ المستوى المطلوب $\overline{\text{ن}}$

∴ $\overline{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٢ & -٢ \end{vmatrix}$

∴ $\overline{\text{ن}} = -١٠\overline{\text{س}} + ١١\overline{\text{ص}} - ٤\overline{\text{ع}}$

، ∵ المستوى المطلوب يحتوى المستقيم

$\overline{\text{ر}} = (١ ، ٢ ، -١) + \text{ك} (١ ، ٢ ، ٣)$

∴ النقطة (١ ، ٢ ، -١) تقع فى المستوى المطلوب

الصورة المتجهة لمعادلة المستوى هى :

$(-١٠ ، ١١ ، -٤) \cdot \overline{\text{ر}} = (-١٠ ، ١١ ، -٤) \cdot (١ ، ٢ ، -١)$

∴ هى $(-١٠ ، ١١ ، -٤) \cdot \overline{\text{ر}} = ١٦$

الصورة القياسية هى :

- ١٠ (س - ١) + ١١ (ص - ٢) - ٤ (ع + ١) = ٠

∴ الصورة العامة هى : - ١٠ س + ١١ ص - ٤ ع = ١٦

(د) بنفس طريقة التفكير فى المسألة السابقة

∴ $\overline{\text{ن}} = \overline{\text{هـ}}_١ \times \overline{\text{هـ}}_٢ = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ -٢ & ٢ & ١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{vmatrix}$

$= ١١\overline{\text{س}} + ١٠\overline{\text{ص}} + ٢\overline{\text{ع}}$ ∴ $\overline{\text{ن}} = (١١ ، ١٠ ، ٢)$

والنقطة (٢ ، ٥ ، ٤) تقع فى المستوى

لأنها تقع على المستقيم الواقع فى المستوى.

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى هى : $\overline{\text{ن}} \cdot \overline{\text{ر}} = \overline{\text{ن}} \cdot \overline{\text{أ}}$

∴ هى : $(١١ ، ١٠ ، ٢) \cdot \overline{\text{ر}} = (١١ ، ١٠ ، ٢) \cdot (٢ ، ٥ ، ٤)$

∴ هى $(١١ ، ١٠ ، ٢) \cdot \overline{\text{ر}} = ٨٠$

الصورة القياسية هى : ١١ (س - ٢) + ١٠ (ص - ٥) + ٢ (ع - ٤) = ٠

الصورة العامة هى : ١١ س + ١٠ ص + ٢ ع = ٨٠

---

(١٤) المستوى هو : ٢ س + ٣ ص + ٤ ع = ٣

بالتعويض بالنقطة (٢ ، ١ ، -١)

∴ الأيمن = ٤ + ٣ - ٤ = ٣ = الأيسر ∴ النقطة تقع فى المستوى

∵ النقطة (١ ، ٣ ، -٢) تقع على المستقيم

بالتعويض بها فى معادلة المستوى

∴ الأيمن = ٢ + ٩ - ٨ = ٣ = الأيسر

لإثبات أن المستقيم يقع بتمامه فى المستوى لا بد من إثبات أن هناك نقطة أخرى تقع على المستقيم وتقع كذلك فى المستوى

، ∵ الصور البارمترية لمعادلة المستقيم هى :

س = ١ + ك ، ص = ٣ - ٢ك ، ع = -٢ + ك

نأخذ ك = ١ ، النقطة هى (٢ ، ١ ، -١)

وهذه النقطة سبق إثبات أنها تقع فى المستوى

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

---

(١٥) (أ) ٢ س + ص - ٢ ع = ٥

٢ س + ٤ ص - ٤ ع = ٢ بالطرح -٣ ص + ع = ٣

∴ ع = ٣ ص + ٣ ـــــــ(١)

، ∵ س + ٢ ص - ٢ ع = ١

٤ س + ٢ ص - ٦ ع = ١٠ بالطرح -٣ س + ٤ ع = -٩

∴ $\text{ع} = \frac{٣\text{س} - ٩}{٤}$ ـــــــ(٢)

من (١) ، (٢) ∴ معادلة خط التقاطع هى :

$$\frac{\text{٣س} - ٩}{٤} = \frac{\text{٣ص} + ٣}{١} = \frac{\text{ع}}{١}$$

(ب) ٢ س − ص + ٢ ع = ٣ عزومي

٢ س − ٦ ص + ١٥ ع = ٦ بالطرح   ٥ ص − ١٣ ع = − ٣

∴ ١٣ ع = ٥ ص + ٣

$$\text{ع} = \frac{\text{٥ص} + ٣}{١٣} \quad ....(١)$$

، لحذف ص نتبع :   س − ٢ ص + ٥ ع = ٢

٦ س − ٢ ص + ٤ ع = ٦ بالطرح   − ٥ س + ع = − ٤

ع = ٥ س − ٤ ....(٢)

من (١) ، (٢) ∴ معادلة خط التقاطع هى :

$$\frac{\text{٥س} - ٤}{١} = \frac{\text{٥ص} + ٣}{١٣} = \frac{\text{ع}}{١}$$

(جـ) سوف نقوم بحل المسألة بطريقة أخرى علماً بأن الطريقة الجديدة والسابقة تصلح لجميع المسائل.

∵ خط تقاطع المستويين عمودى على كل من $\bar{\text{ن}}_١ ، \bar{\text{ن}}_٢$

∴ متجه اتجاه خط التقاطع $\bar{\text{هـ}}$ حيث $\bar{\text{هـ}} = \bar{\text{ن}}_١ \times \bar{\text{ن}}_٢$

$$\therefore \bar{\text{هـ}} = \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١٣\bar{\text{س}} - ١٦\bar{\text{ص}} + ٥\bar{\text{ع}}$$

متجه اتجاه خط التقاطع هو : $\bar{\text{هـ}}$ = (١٣ ، − ١٦ ، ٥)

نأخذ نقطة على خط التقاطع ولتكن س = ١ ثم نعوض فى المستوى الأول والثانى كالتالى :

المستوى الأول ٢ س + ص − ٢ ع = ٩

بوضع س = ١ ، ص − ٢ ع = ٧ ∴ ص = ٢ ع + ٧ ....(١)

المستوى الثانى ٣ س + ٤ ص + ٥ ع = ٨

بوضع س = ١ ، ٤ ص + ٥ ع = ٥ ....(٢)

من (١) ٨ ع + ٢٨ + ٥ ع = ١٣ ع = ٢ − ٢٨ = − ٢٦   ∴ ع = − ٢

من (١) ص = − ٤ + ٧ = ٣ ،   النقطة هى (١ ، ٣ ، − ٢)

ومتجه اتجاه خط التقاطع هـ : $\bar{\text{هـ}}$ = (١٣ ، − ١٦ ، ٥)

∴ معادلة خط التقاطع هى :

$\bar{\text{ر}}$ = (١ ، ٣ ، − ٢) + ك (١٣ ، − ١٦ ، ٥)

(١٦) (أ) ∵ النقطة (٢ ، ٣ ، − ١) تقع على المستقيم فبالتعويض بها فى معادلة المستوى إذا حققتها تكون هى نقطة تقاطع المستقيم والمستوى

∴ بالتعويض فى معادلة المستقيم الأيمن = ٢ + ٣ − ٢ = ٣ = الأيسر

∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، ٣ ، − ١)

(ب) من معادلة المستوى ∴ ص = ٥ − ٣ س + ٢ ع

بالتعويض فى معادلة المستقيم : ٢ س = ٣ (٥ − ٣ س + ٢ ع) − ١

٢ س = ١٥ − ٩ س + ٦ ع = − ١

∴ ١١ س − ٦ ع = ١٤   (١) × ٥   ، ٣ ص − ١ = ع − ٤

∴ ٣ (٥ − ٣ س + ٢ ع) − ١ = ع − ٤

١٥ − ٩ س + ٦ ع − ١ = ع − ٤

٩ س − ٥ ع = ١٠   (٢) × ٦

من (١) ٥٥ س − ٣٠ ع = ٧٠

من (٢) ٥٤ س − ٣٠ ع = ٦٠

بالطرح $\boxed{\text{س} = ١٠}$

من (١) ١١٠ − ٦ ع = ١٤ ، ١١٠ − ١٤ = ٦ ع

$\text{ع} = \frac{٩٦}{٦} = ١٦$ من معادلة المستوى

ص = ٥ − ٣ س + ٢ ع ، ص = ٥ − ٣٠ + ٣٢ = ٧

∴ النقطة هى (١٠ ، ٧ ، ١٦)

(جـ) معادلة المستوى هى :   ٣ س + ٢ ص + ٢ ع = ٣٤

∴ ع = ٣٤ − ٢ ص − ٣ س   (١)

معادلة المستقيم هى :   س = ١ + ٣ ك ، ص = ٤ + ٢ ك ،

ع = ٣ + ٢ ك $\therefore \frac{\text{س} - ١}{٣} = \frac{\text{ص} - ٤}{٢} = \frac{\text{ع} - ٣}{٢}$

$\therefore \frac{\text{ص} - ٤}{٢} = \frac{\text{ع} - ٣}{٢}$ بالضرب × ٢

ص − ٤ = ع − ٣

$\therefore \text{ص} - ٤ = \frac{٣٤ - \text{٢ص} - \text{٣س}}{٢} - ٣$

بالضرب × ٢ :   ٢ ص − ٨ = ٣٤ − ٢ ص − ٣ س − ٦

∴ ٣ س + ٤ ص = ٣٦   (٢)

$، \therefore \frac{\text{س} - ١}{٣} = \frac{\text{ع} - ٣}{٢}$ بالضرب × ٦

٢ س − ٢ = ٣ ع − ٩   من (١)

$\text{٢س} - \text{٢} = \frac{\text{٣}(\text{٣٤} - \text{٢س} - \text{٣س})}{\text{٢}} - \text{٩}$

بالضرب × ٢ : ٤ س − ٤ = ١٠٢ − ٦ ص − ٩ س − ١٨

∴ ١٣ س + ٦ ص = ٨٨ (٣)

من (٢) $\text{ص} = \frac{\text{٣٦} - \text{٣س}}{\text{٤}}$ في (٣)

$\text{١٣س} + \text{٦} \times \frac{\text{٣٦} - \text{٣س}}{\text{٤}} = \text{٨٨}$

بالضرب × ٢ : ٢٦ س + ١٠٨ − ٩ س = ١٧٦

١٧ س = ٦٨ ∴ $\boxed{\text{س} = \text{٤}}$ ∴ $\text{ص} = \frac{\text{٣٦} - \text{١٢}}{\text{٤}} = \text{٦}$

من (١) $\text{ع} = \frac{\text{٣٤} - \text{١٢} - \text{١٢}}{\text{٢}} = \text{٥}$

نقطة التقاطع هي : (٤ ، ٦ ، ٥)

---

(١٧) ∵ المستقيم يقع في المستوى

∴ النقطة (٢ ، ٣ ، ٥) الواقعة على المستقيم تقع في المستوى

ولتكن ب (٢ ، ٣ ، ٥)

∵ النقطة أ (٣ ، −١ ، ٦) تقع في المستوى

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (−١ ، ٤ ، −١)

واقع في المستوى .

متجه الاتجاه للمستقيم $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (١ ، ٢ ، −٢)

يقع في المستوى ∴ $\overrightarrow{\text{هـ}} \times \overrightarrow{\text{أب}}$ = متجه عمودي على المستوى

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{١} & \text{٢} & -\text{٢} \\ -\text{١} & \text{٤} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{١٠}\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \text{٦}\overrightarrow{\text{ع}}$$

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى هو $\overrightarrow{\text{ن}}$

حيث $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (١٠ ، ١ ، ٦)

، ∵ المستوى يمر بالنقطة (٣ ، −١ ، ٦)

∴ معادلة المستوى هو : $\overrightarrow{\text{ن}} . \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} . \overrightarrow{\text{أ}}$

(١٠ ، ١ ، ٦) . $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١٠ ، ١ ، ٦) . (٣ ، −١ ، ٦)

∴ (١٠ ، ١ ، ٦) . $\overrightarrow{\text{ر}}$ = ٤٥ .

---

(١٨) ∵ المستقيم عمودي على المستوى

∴ يوازى متجه اتجاه المستوى. من شرط التوازى

∴ $\frac{\text{٤}}{\text{٢}} = \frac{\text{ك}}{\text{٣}} = \frac{\text{م}}{-\text{١}}$ ∴ ك = ٦ ، م = −٢

∴ معادلة المستوى هى : ٤ س + ٦ ص − ٢ ع = ١٠

∴ ٢ س + ٣ ص − ع = ٥ ، ع = ٢ س + ٣ ص − ٥ (١)

معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{س} - \text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص} + \text{٦}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع} + \text{٣}}{-\text{١}}$

$\frac{\text{س} - \text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع} + \text{٣}}{-\text{١}}$ ∴ −س + ٣ = ٢ع + ٦

من (١) ∴ − س + ٣ = ٤ س + ٦ ص − ١٠ + ٦

∴ ٥ س + ٦ ص = ٧ (٢)

، ∵ $\frac{\text{ص} + \text{٦}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع} + \text{٣}}{-\text{١}}$ ∴ − ص − ٦ = ٣ ع + ٩ من (١)

− ص − ٦ = ٦ س + ٩ ص − ١٥ + ٩ ، ٦ س + ١٠ ص = صفر

∴ $\text{س} = \frac{-\text{٥}}{\text{٣}}\text{ص}$ من (٢)

$\frac{-\text{٢٥}}{\text{٣}}\text{ص} + \text{٦ص} = \text{٧}$ ∴ ص = −٣

∴ س = ٥ ، ع = −٤ ∴ النقطة (٥ ، −٣ ، −٤)

المجموعة الثالثة:

تمارين (٢-٢) من الكتاب المدرسي

(١) الجواب (جـ)

---

(٢) محور السينات أي نقطة عليه على صورة (س ، ٠ ، ٠)

∴ ٣ س − ٠ + ٠ = ١٢ ∴ س = ٤ الجواب (جـ)

---

(٣) المستوى س + ٥ ص − ٦ ع = ٣٠

بالقسمة على ٣٠ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{٣٠}} + \frac{\text{ص}}{\text{٦}} + \frac{\text{ع}}{-\text{٥}} = \text{١}$

∴ أ + ب + جـ = ٣٠ + ٦ − ٥ = ٣١ الجواب (جـ)

---

(٤) ∵ المستوى يوازي محوري الإحداثيات س ، ص

∴ معادلته هي ع = ثابت

∵ النقطة (١ ، ٢ ، ٣) تقع عليه ∴ معادلته ع = ٣ الجواب (ب)

---

(٥) نفرض النقط هي أ ، ب ، جـ

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٣ ، ٠ ، −٤) ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ٠ ، −٣)

$$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -\text{٣} & \text{٠} & -\text{٤} \\ \text{٥} & \text{٠} & -\text{٣} \end{vmatrix} = \text{٢٩}\,\overrightarrow{\text{ص}}$$

= متجه عمودي على المستوى

معادلة المستوى هي : $\overline{ن} . \overline{ر} = \overline{ن} . (٢ ، ٣ ، ٥)$

$٢٩ \overline{ص} . \overline{ر} = ٢٩ \overline{ص} . (٢ ، ٣ ، ٥)$

$٢٩ \overline{ص} . \overline{ر} = ٨٧$ ∴ ص = ٣ الجواب (جـ)

---

(٦) معادلة المستوى هى : $\overline{ن} . \overline{ر} = \overline{ن} . (١ ، -٢ ، ٥)$

$(٢ ، ١ ، ٣) . (س ، ص ، ع) = (٢ ، ١ ، ٣) . (١ ، -٢ ، ٥)$

٢ س + ص + ٣ ع = ١٥ الجواب (ب)

---

(٧) معادلة المستوى هى : $\overline{ن} . \overline{ر} = (٢ ، -٣ ، ٤) . (١ ، -١ ، ٤)$

٢ س − ٣ ص + ٤ ع = ٢١

(أ) بالتعويض بالنقطة (٢ ، ٢ ، ١)

الأيمن = ٤ − ٦ + ٤ = ٢ ≠ الأيسر ∴ النقطة لا تقع على المستوى

(ب) $\overline{ق} . \overline{ن} = (٣ ، -٥ ، -٢) . (٢ ، -٣ ، ٤) = ٦ + ١٥ − ٨ = ١٣$

∴ $\overline{ق}$ ، $\overline{ن}$ غير متعامدان ∴ $\overline{ق}$ لا يوازى المستوى

---

(٨) (أ) المستوى س = ٣ يوازى مستوى الإحداثيات ص ع

∴ النقط هي : (١ ، ٢ ، ٣) ، (-١ ، ٥ ، ٣) ، (٢ ، ٤ ، ٣)

(ب) المستوى ص = -٢ مستوى يوازى مستوى الإحداثيات س ع

النقط هي (١ ، -٢ ، ٣) ، (٥ ، -٢ ، ٢) ، (٣ ، -٢ ، -٣)

(جـ) المستوى س + ٣ ص = ٥

النقط ص (-١ ، ٢ ، ٠) ، (٢ ، ١ ، ٠) ، (٨ ، -١ ، ٠)

(و) المستوى : ٢ س − ص + ٣ ع = ٤

النقط هي : (٢ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، -٤ ، ٠) (٠ ، -١ ، ١).

---

(٩) معادلة المستوى هي: $\overline{ن} . \overline{ر}$ = صفر

(١ ، ٢ ، -٣) . (س ، ص ، ع) = ٠

∴ المعادلة العامة هى : س + ٢ ص − ٣ ع = ٠

---

(١٠) معادلة المستوى هي : الصورة المتجهة

$(٤ ، ١٠ ، -٧) . \overline{ر} = (٤ ، ١٠ ، -٧) . (٢ ، -١ ، ٠)$

∴ الصورة المتجهة هي : $(٤ ، ١٠ ، -٧) . \overline{ر} = ٨ − ١٠ + ٠$

$(٤ ، ١٠ ، -٧) . \overline{ر} = -٢$

الصورة القياسية: ٤ (س − ٢) + ١٠ (ص + ١) − ٧ ع = صفر

الصورة العامة هي: ٤ س + ١٠ ص − ٧ ع = -٢

---

(١١) $\overline{أب} = \overline{ب} − \overline{أ} = (-٣ ، ٤ ، ٤)$

$\overline{أجـ} = \overline{جـ} − \overline{أ} = (-١ ، ١ ، ٢)$

$$\overline{أب} \times \overline{أجـ} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ -٣ & ٤ & ٤ \\ -١ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٤\overline{س} + ٢\overline{ص} + \overline{ع}$$

= متجه عمودي على المستوى المار بالنقط أ ، ب ، جـ

∴ $\overline{ن} = (٤ ، ٢ ، ١)$

∴ معادلة المستوى هي : $\overline{ن} . \overline{ر} = \overline{ن} . \overline{أ}$

∴ $(٤ ، ٢ ، ١) . \overline{ر} = (٤ ، ٢ ، ١) . (٢ ، -١ ، ٠)$

∴ $(٤ ، ٢ ، ١) . \overline{ر} = ٦$

الصورة القياسية لمعادلة المستوى هي :

٤ (س − ٢) + ٢ (ص + ١) + (ع) = صفر

الصورة العامة هي : ٤ س + ٢ ص + ع = ٦

---

(١٢) $\overline{هـ} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overline{ن} = \left(١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢\right)$

∵ $\frac{٢}{١} = ٢$ ، $\frac{٣}{\frac{٣}{٢}} = ٢$ ، $\frac{٤}{٢} = ٢$ ∴ $\overline{هـ} // \overline{ن}$ المستقيم ⊥ المستوى

---

(١٣) معادلة المستوى هي : (٢ ، ٠ ، -١) . (س ، ص ، ع) = ٥

٢ س − ع = ٥

بالتعويض بالنقطة أ (٢ ، ٣ ، -١)

الأيمن = ٤ − (-١) = ٥ = الأيسر ∴ النقطة أ تقع على المستوى.

∵ النقطة ب (٣ ، ١ ، ١) تقع على المستقيم ،

$\overline{أب} = \overline{ب} − \overline{أ} = (١ ، -٢ ، ٢)$

يوازى متجه اتجاه المستقيم وهما يشتركان في النقطة ب

∴ النقطة أ تقع على المستقيم .

∵ $\overline{ن} = (٢ ، ٠ ، -١)$ ، $\overline{هـ} = (١ ، -٢ ، ٢)$

، ∵ $\overline{ن} . \overline{هـ} = ٢ + ٠ − ٢ = ٠$

∴ المستقيم // المستوى وهما يشتركان في النقطة أ

∴ المستقيم يقع في المستوى.

---

(١٤) (أ) المستوى المطلوب // المستوى المعطى

∴ $\overline{ن_١} = \overline{ن_٢} = (٢ ، ٣ ، ٥)$

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$(٢ ، ٣ ، ٥) . \overline{ر} = (٢ ، ٣ ، ٥) . (٢ ، ١ ، ٤)$

∴ (٢، ٣، ٥) . $\vec{ر}$ = ٢٧

(ب) $\vec{ن}$ = (٢، -٤، ١)

معادلة المستوى هي : $\vec{ن}.\vec{ر} = \vec{ن}.(١، ١، ٤)$

(٢، -٤، ١) . $\vec{ر}$ = (٢، -٤، ١) . (١، ١، ٤)

∴ (٢، -٤، ١) . $\vec{ر}$ = ٢

(جـ) ∵ المستوى عمودي على المستويين

∴ يقع فيه متجهان موازيان $\vec{ن}_١$ ، $\vec{ن}_٢$

$\vec{ن}_١ = (٧، ١، ٢)$ ، $\vec{ن}_٢ = (٣، ٥، -٦)$

$$\vec{ن}_١ \times \vec{ن}_٢ = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & -٦ \end{vmatrix} = -١٦\hat{س} + ٤٨\hat{ص} + ٣٢\hat{ع}$$

= متجه ⊥ كل من $\vec{ن}_١$ ، $\vec{ن}_٢$ الواقعان في المستوى المطلوب ÷ ١٦

∴ $\vec{ن}$ للمستوى المطلوب هو : $\vec{ن}$ = (١، -٣، -٢)

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

(١، -٣، -٢) . $\vec{ر}$ = (١، -٣، -٢) . (٢، ١، ٤)

∴ هي : (١، -٣، -٢) . $\vec{ر}$ = -٩

لاحظ يمكن الحل بأن نوجد معادلة خط تقاطع المستويين فيكون عمودي على المستوى المطلوب ويكون متجه اتجاه خط التقاطع هو المتجه العمودي على المستوى المطلوب.

(١٥) المستوى : (س ، ص ، ع) . (١، ٠، ٠) = ٤ ∴ $\boxed{س = ٤}$

من معادلة المستقيم : $\vec{ر}$ = (٠، ٠، ١) + ل (٢، ١، ١)

س = ٢ل ∴ ٤ = ٢ل ∴ ل = ٢

ص = ل = ٢ ، ع = ١ + ل = ١ + ٢ ، ع = ٣

نقطة التقاطع هي (٤، ٢، ٣)

(١٦) معادلة المستوى هي : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٤} + \frac{ع}{٥} = ١$

بضرب الطرفين × ٢٠

∴ الصورة العامة لمعادلة المستوى هي :

١٠ س + ٥ ص + ٤ ع = ٢٠ ... (١) ∴ $\vec{ن}$ = (١٠، ٥، ٤)

نفرض نقطة على المستوى ولتكن س = ١ ، ص = ٢ من (١)

١٠ + ١٠ + ٤ ع = ٢٠ ∴ ع = ٠

∴ النقطة (١، ٢، ٠) تقع على المستوى

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى هي :

(١٠، ٥، ٤) . $\vec{ر}$ = (١٠، ٥، ٤) . (١، ٢، ٠)

∴ هي : (١٠، ٥، ٤) . $\vec{ر}$ = ٢٠

الصورة القياسية لمعادلة المستوى هي

١٠ (س - ١) + ٥ (ص - ٢) + ٤ ع = صفر

(١٧) (أ) معادلة أرضية الحجرة هي : ع = ٠

(ب) معادلة سقف الحجرة هي : ع = ٢

(جـ) معادلات مستويات الحوائط هي : س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = ٥

(١٨) ∵ المستوى يحتوي المستقيم

$\vec{ر}$ = (٠، ٣، -٥) + ل (٦، -٢، -١)

∴ النقطة (٠، ٣، -٥) الواقعة على المستقيم تقع في المستوى

∵ المستوى يوازي المستقيم $\vec{ر}$ = (١، ٧، -٤) + ل (١، -٣، ٣)

∴ المستوى يوازي المتجهين $\vec{هـ}_١$ = (٦، -٢، -١) ، $\vec{هـ}_٢$ = (١، -٣، ٣)

$$\vec{هـ}_١ \times \vec{هـ}_٢ = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ٦ & -٢ & -١ \\ ١ & -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٩\hat{س} - ١٩\hat{ص} - ٢٠\hat{ع}$$

= متجه جديد عمودي على كل من $\vec{هـ}_١$ ، $\vec{هـ}_٢$ أي عمودي على المستوى المطلوب أي أن : $\vec{ن}$ = (-٩، -١٩، -٢٠)

∴ معادلة المستوى هي : $\vec{ن}.\vec{ر} = \vec{ن}.\vec{أ}$

(-٩، -١٩، -٢٠) . $\vec{ر}$ = (-٩، -١٩، -٢٠) . (٠، ٣، -٥)

∴ (-٩، -١٩، -٢٠) . $\vec{ر}$ = ٤٣

(١٩) (أ) $\vec{ن}_١$ = (٢، -١، ١) ، $\vec{ن}_٢$ = (٣، ٢، -٢)

$$جتا\,\theta = \frac{|\vec{ن}_١.\vec{ن}_٢|}{\|\vec{ن}_١\|\,\|\vec{ن}_٢\|} = \frac{|٦ - ٢ - ٢|}{\sqrt{٤+١+١}\,\sqrt{٩+٤+٤}}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٦}\,\sqrt{١٧}} = ٠٫١٩٨٠٣ \quad ∴ ق(\theta^\circ) = ٧٨^\circ\ ٣٥'$$

(ب) $\vec{ن}_١$ = (٢، ١، -١) ، $\vec{ن}_٢$ = (٣، -٢، ٠)

$$جتا\,\theta = \frac{|٦ - ٢|}{\sqrt{٤+١+١}\,\sqrt{٩+٤}} = \frac{٤}{\sqrt{٦}\,\sqrt{١٣}} = ٠٫٤٥٢٩$$

$$ق(\theta)^\circ = ٦٣^\circ\ ٤'$$

(جـ) $\overrightarrow{ن_١} = (٠ ، ١ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٣ ، ٥)$

$$جتا\theta = \frac{|-٣|}{\sqrt{١}\,\sqrt{١+٩+٢٥}} = \frac{٣}{\sqrt{٣٥}} = ٠,٥٠٧١$$

$\therefore$ ق$(\theta^\circ) = ٥٩^\circ\ ٣٢'$

---

(٢٠) (أ) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٢ ، ٠ ، ٢)$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (-١ ، -١ ، ١)$

$$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٢\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$$

متجه جديد عمودي على المستوى الواقع فيه أ ، ب ، جـ

$\therefore$ متجه الاتجاه العمودي على المستوى أ ب جـ هو

$\overrightarrow{ن} = (٢ ، -٤ ، -٢)$ ويمكن اعتبار $\overrightarrow{ن} = (١ ، -٢ ، -١)$

(ب) معادلة المستوى أ ب جـ هي : $\overrightarrow{ن} . \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} . \overrightarrow{أ}$

$(١ ، -٢ ، -١) . \overrightarrow{ر} = (١ ، -٢ ، -١) . (٠ ، -١ ، ١)$

$\therefore$ س - ٢ ص - ع = ١ $\therefore$ س - ٢ ص - ع - ١ = ٠

طول العمود النازل من ء = (٧ ، -٤ ، ٢) هو :

$$ل = \frac{|١\times٧ - ٢\times -٤ - ١\times٢ - ١|}{\sqrt{١+٤+١}} = \frac{١٢}{\sqrt{٦}} = ٢\sqrt{٦} \text{ وحدة طول}$$

(جـ) المستوى أ ب جـ : $\overrightarrow{ن_١} = (١ ، -٢ ، -١)$

المستوى ء ب جـ

$\overrightarrow{ءب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ء} = (-٥ ، ٣ ، ١)$

$\overrightarrow{ءجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ء} = (-٨ ، ٢ ، ٠)$

$$\overrightarrow{ءب} \times \overrightarrow{ءجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٥ & ٣ & ١ \\ -٨ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = -٢\overrightarrow{س} - ٨\overrightarrow{ص} + ١٤\overrightarrow{ع}$$

= متجه عمودى على ء ب جـ

$\therefore$ يمكن اعتبار المتجه العمودى على المستوى ء ب جـ هو:

$\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٤ ، -٧)$

$\because \overrightarrow{ن_١} . \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، -١) . (١ ، ٤ ، -٧) = ١ - ٨ + ٧ = ٠$

$\therefore \overrightarrow{ن_١}$ عمودى على $\overrightarrow{ن_٢}$

$\therefore$ المستويان أ ب جـ ، ء ب جـ متعامدان

(د) معادلة المستوى أ ب جـ هى س - ٢ ص - ع = ١ ..... (١)

المستوى و ء ب.

$\overrightarrow{وء} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{و} = (٧ ، -٤ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{وب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{و} = (٢ ، -١ ، ٣)$

$$\overrightarrow{وء} \times \overrightarrow{وب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٧ & -٤ & ٢ \\ ٢ & -١ & ٣ \end{vmatrix} = -١٠\overrightarrow{س} - ١٧\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$$

$\therefore \overrightarrow{ن} = (-١٠ ، -١٧ ، ١)$

، $\because$ المستوى يمر بالنقطة ب $\therefore$ معادلته هى $\overrightarrow{ن} . \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} . \overrightarrow{ب}$

$(-١٠ ، -١٧ ، ١) . \overrightarrow{ر} = (-١٠ ، -١٧ ، ١) . (٢ ، -١ ، ٣)$

- ١٠ س - ١٧ ص + ع = ٠ ....(٢)

بضرب (١) × ١٠

١٠ س - ٢٠ ص - ١٠ ع = ١٠ بالجمع مع........ (٢)

- ٣٧ ص - ٩ ع = ١٠ ، ٩ ع = - ١٠ - ٣٧ ص

$$ع = \frac{-١٠ - ٣٧ص}{٩} \quad .... (٣)$$

بضرب (١) × (١٧) ، (٢) × ٢

١٧ س - ٣٤ ص - ١٧ ع = ١٧

- ٢٠ س - ٣٤ ص + ٢ ع = ٠ بالطرح

٣٧ س - ١٩ ع = ١٧

$$ع = \frac{٣٧س - ١٧}{١٩} \quad .... (٤)$$

من (٣) ، (٤) $\therefore$ معادلة خط التقاطع هى :

$$\frac{٣٧س - ١٧}{١٩} = \frac{-١٠ - ٣٧ص}{٩} = \frac{ع}{١}$$

---

(٢١) (أ) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٠ ، -٤ ، ٣)$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (-١ ، ٤ ، -٣)$

$$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & -٤ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٣ \end{vmatrix} = -٣\overrightarrow{ص} - ٤\overrightarrow{ع}$$

$\therefore \overrightarrow{ن} = (٠ ، -٣ ، -٤)$

$\therefore$ معادلة المستوى من الذى يحوى النقط أ ، ب ، جـ هى

$\overrightarrow{ن} . \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} . \overrightarrow{أ}$

$(٠ ، -٤ ، -٣) . \overrightarrow{ر} = (٠ ، -٤ ، -٣) . (١ ، ٤ ، ٢)$

∴ المعادلة الإحداثية هي : - ٤ ص - ٣ ع = - ٢٢

أي هي ٤ ص + ٣ ع = ٢٢

(ب) معادلة المستوى ص هي

(١ ، ٢ ، ٢) . ر = (١ ، ٢ ، ٢) . (٢ ، ٢ ، ٣)

المعادلة الإحداثية للمستوى ص هي س + ٢ ص + ٢ ع = ١٢

(جـ) ∵ النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع في المستوى س ∴ تحقق معادلته

∴ ٣ ف = ٢٢ ∴ ف = $\frac{٢٢}{٣}$

، ∵ النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع في المستوى ص ∴ تحقق معادلته

∴ ط + ٠ + ٢ × $\frac{٢٢}{٣}$ = ١٢ ، ط = $\frac{٣٦ - ٤٤}{٣} = \frac{-٨}{٣}$

∴ ط = $-\frac{٨}{٣}$ ، ف = $\frac{٢٢}{٣}$.

(د) معادلتا المستويان هما ٤ ص + ٣ ع = ٢٢ .... (١)

س + ٢ ص + ٢ ع = ١٢ .... (٢)

بضرب (٢) × (٢) ٢ س + ٤ ص + ٤ ع = ٢٤

٤ ص + ٣ ع = ٢٢ بالطرح ، ٢ س + ع = ٢

س = $\frac{-ع + ٢}{٢} = \frac{ع - ٢}{-٢}$

س = $\frac{ع - ٢}{-٢}$ .... (٣)

بضرب (١) × ٢ ، (٢) × ٣ ∴ ٨ ص + ٦ ع = ٤٤

٣ س + ٦ ص + ٦ ع = ٣٦ بالطرح - ٣ س ص = ٨

٣ س = ٢ ص - ٨ ، س = $\frac{٢ص - ٨}{٣} = \frac{ص - ٤}{\frac{٣}{٢}}$

المعادلة الإحداثية لخط التقاطع هي : $\frac{س}{١} = \frac{ص - ٤}{\frac{٣}{٢}} = \frac{ع - ٢}{-٢}$

∴ متجه اتجاه خط التقاطع هو (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، -٢) ويمكن اعتبار أن

∴ هـ = (٢ ، ٣ ، -٤) ويمر بالنقطة (٠ ، ٤ ، ٢)

∴ معادلته المتجه هي : ر = (٠ ، ٤ ، ٢) + ل (٢ ، ٣ ، -٤)

(هـ) ل١ = طول العمود من (١ ، ١ ، ن)

على المستوى الأول ∴ ل١ = $\frac{|٤ + ٣ن - ٢٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

ل١ = $\frac{|٣ن - ١٨|}{٥}$ .... (١)

ل٢ = طول العمود من (١ ، ١ ، ن) على الثاني

∴ ل٢ = $\frac{|١ + ٢ + ٢ن - ١٢|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = \frac{|٢ن - ٩|}{٣}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ٣ |٣ن - ١٨| = ٥ |٢ن - ٩|

بتربيع الطرفين

∴ ٨١ ن^2 - ٩٧٢ ن + ٢٩١٦

= ١٠٠ ن^2 - ٩٠٠ ن + ٢٠٢٥

∴ ١٩ ن^2 + ٧٢ ن - ٨٩١ = ٠

(ن + ٩) (١٩ ن - ٩٩) = ٠ ∴ ن = -٩ ن = $\frac{٩٩}{١٩}$

تمارين كتاب المدرسة العامة على الوحدة الثانية

(١) ر = (-١ ، ٠ ، ٢) + ل (١ ، -١ ، ٣)

∴ $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع - ٢}{٣}$ الجواب (ب)

(٢) هـ = (٢ ، -١ ، ١) معادلته هي ر = أ + ك هـ

ر = (١ ، -١ ، ٢) + ل (٢ ، -١ ، ١)

هي: $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ١}{١} = \frac{ع - ٢}{-٢}$ الجواب (أ)

(٣) هـ١ = (٢ ، ٠ ، -٢) ، ص٢ = (١ ، ٢ ، -٢)

جتا $\theta = \frac{|هـ_١ . هـ_٢|}{||هـ_١|| \, ||هـ_٢||} = \frac{٦}{٢\sqrt{٢} \times ٣} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\theta = ٤٥^\circ$ الجواب (جـ)

(٤) هـ١ = (٢ ، -١ ، م) ، هـ٢ = (م ، ١ ، -١)

∵ المستقيمان متعامدان ∴ هـ١ . هـ٢ = صفر

∴ ٢ م - ١ - م = ٠ $\boxed{م = ١}$ الجواب (جـ)

(٥) هـ١ = (٢ ، ١ ، ١) ، هـ٢ = (أ ، ٢ ، ب)

من شرط التوازي ∴ $\frac{أ}{٢} = \frac{٢}{١} = \frac{ب}{١}$ ∴ أ = ٤ ،

ب = ٢ ∴ أ + ب = ٦ الجواب (جـ)

(٦) النقطة (٢ ، -١ ، ٣) تحقق المعادلة (جـ) ∴ تقع على المستوى.

(٧) أ $(٤، ٠، ٠)$ ، ب $(٠، ٢، ٠)$ ، جـ $(٠، ٠، ٢)$

$\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (-٤، ٢، ٠)$

$\overline{أجـ} = \overline{جـ} - \overline{أ} = (-٤، ٠، ٢)$

$$\overline{أب} \times \overline{أجـ} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ -٤ & ٢ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

$= ٤\overline{س} + ٨\overline{ص} + ٨\overline{ع}$

$\|\overline{أب} \times \overline{أجـ}\| = \sqrt{٤^٢ + ٨^٢ + ٨^٢} = \sqrt{١٤٤}$

مساحة سطح Δ أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ١٢ = ٦$ وحدة مربعة

الجواب (جـ)

(٨) $ل = \frac{|٢\times٢ - ٢\times٣ + ١\times١ - ٥|}{\sqrt{٤+٤+١}} = \frac{٦}{٣} = ٢$ وحدة طول

الجواب (ب)

(٩) $٢س - ص + ع = ١$ ...... (١)

$س - ٣ص - ع = -٢$ .... (٢)

بضرب (٢) × ٢ ∴ $٢س - ٦ص - ٢ع = -٤$

بالطرح من (١) ∴ $٥ص + ٣ع = ٥$

$ع = \frac{٥(ص-١)}{٣}$ .... (٣)

بضرب (١) × ٣ $٦س - ٣ص + ٣ع = ٣$

$س - ٣ص - ع = -٢$ بالطرح

$٥س + ٤ع = ٥$ ، $ع = \frac{-٥(س-١)}{٤}$ .... (٤)

∴ معادلة خط التقاطع هى $\frac{س-١}{\frac{-٤}{٥}} = \frac{ص-١}{\frac{-٣}{٥}} = \frac{ع}{١}$

∴ $\frac{س-١}{-٤} = \frac{ص-١}{-٣} = \frac{ع}{٥}$

∴ $\frac{س-١}{٤} = \frac{ص-١}{٣} = \frac{ع}{-٥}$ الجواب (د)

(١٠) $\overline{هـ}_١ = (-١، -١، ٣)$ ، $\overline{هـ}_٢ = (١، -٢، -١)$

$\overline{ن}_١ = (٣، -٥، ١)$ ، $\overline{ن}_٢ = (٥، -٤، ٢)$

$\overline{ن}_٣ = (٧، -٥، -١)$ ، $\overline{ن}_٤ = (٧، ٢، ٣)$

لكى يقع المستقيم فى المستوى

∴ لابد أنه عمودى على المتجه العمودى على المستوى

وهذا يتحقق بالنسبة إلى $\overline{ن}_٤$ فنجد أن

$\overline{هـ}_١ . \overline{ن}_٤ = -٧ - ٢ + ٩ = ٠$ ، $\overline{هـ}_٢ . \overline{ن}_٤ = ٧ - ٤ - ٣ = ٠$

∴ $\overline{ن}_٤ \perp$ كل من $\overline{هـ}_١$ ، $\overline{هـ}_٢$

∴ يمكن أن يقع المستقيمان فى المستوى (د)

∵ النقطة $(-١، ٢، ١)$ فى المستقيم الأول بالتعويض فى معادلة

المستوى الأيمن $= -٧ + ٤ + ٣ = ٠ =$ الأيسر

∴ بالفعل المستقيم الأول يقع فى المستوى (د) ،

∵ النقطة $(-١، ٢، ١) \in$ للمستقيم الثانى وللمستوى (د)

∴ المستقيم الثانى يقع فى المستوى (د) ∴ الجواب (د).

(١١) $\overline{هـ} = (٣، ٥، ٦)$ ، أ على المستقيم هي $(-٣، ٤، -٨)$

النقطة ب $(-٢، ٤، -٥)$ ، $\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (١، ٠، -٣)$

مسقط $\overline{أب}$ على المستقيم $= \frac{|\overline{أب} . \overline{هـ}|}{\|\overline{هـ}\|}$

$= \frac{|٣ + ٠ - ١٨|}{\sqrt{٩ + ٢٥ + ٣٦}} = \frac{١٥}{\sqrt{٧٠}}$

$أب = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$

طول العمود $= \sqrt{(أب)^٢ - \text{مربع المسقط}} = \sqrt{١٠ - \frac{٢٢٥}{٧٠}}$

$= ٢,٦$ وحدة طول تقريباً.

(١٢) المستوى هو : $س - ٢ص + ٤ع - ٩ = ٠$

بعد النقطة $(٢، ١، -١)$ عن المستوى هو ل حيث

$$ل = \frac{|١\times٢ - ٢\times١ + ٤\times-١ - ٩|}{\sqrt{١^٢ + (-٢)^٢ + (٤)^٢}}$$

$= \frac{|-١٣|}{\sqrt{٢١}} = \frac{١٣\sqrt{٢١}}{٢١}$ وحدة طول

(١٣) $\overline{هـ} = (١، -١، -٦)$

معادلة المستقيم هي $\overline{ر} = (٣، -٤، -٥) + ل(١، -١، -٦)$

هي $\frac{س-٣}{١} = \frac{ص+٤}{-١} = \frac{ع+٥}{-٦}$ .... (١)

المستوى $\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (١، -٢، ٠)$ ، $\overline{أجـ} = (٢، -٣، -١)$

$$\overline{\text{اب}} \times \overline{\text{اجـ}} = \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ١ & -٢ & ٠ \\ ٢ & -٣ & -١ \end{vmatrix} = ٢\bar{\text{س}} + \bar{\text{ص}} + \bar{\text{ع}}$$

= متجة عمودى على المستوى ∴ $\bar{\text{ن}}$ (٢ ، ١ ، ١)

∴ معادلة المستوى هى (٢ ، ١ ، ١) . $\bar{\text{ر}}$ = (٢ ، ١ ، ١) . (٢ ، ٢ ، ١)

∴ ٢ س + ص + ع = ٧ ومنها

ع = ٧ - ٢ س - ص .... (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{ص}+٤}{-١} = \frac{٤+٥}{-٦}$

+ ٦ ص + ٢٤ = + ع + ٥ ، ٦ ص + ٢٤ = ٧ - ٢ س - ص + ٥

٧ ص + ٢ س = - ١٢ .... (٣)

من (١) ، (٢) أيضاً $\frac{\text{س}-٣}{١} = \frac{\text{ع}+٥}{-٦}$

- ٦ س + ١٨ = ٧ - ٢ س - ص + ٥ ، - ٤ س + ص = - ٦

ص = ٤ س - ٦ .... (٤)

من (٤) في (٣) ∴ ٢٨ س - ٤٢ + ٢ س = - ١٢

∴ - ٣ س = ٣٠ ∴ $\boxed{\text{س} = ١}$

من (٤) ص = ٤ - ٦ $\boxed{\text{ص} = -٢}$

من (٢) ع = ٧ - ٢ + ٢ ∴ ع = ٧

∴ نقطة التقاطع هي (١ ، - ٢ ، ٧)

---

(١٤) المستقيم هو $\frac{\text{س}-٢}{٣} = \frac{\text{ص}+١}{٤} = \frac{\text{ع}-٢}{٢}$ .... (١)

المستوى هو : س - ص + ع = ٥

∴ ع = ٥ - س + ص .... (٢)

من (١) $\frac{\text{س}-٢}{٣} = \frac{\text{ع}-٢}{٢}$

∴ ٣ ع - ٦ = ٢ س - ٤ .... من (٢)

١٥ - ٣ س + ٣ ص - ٦ = ٢ س - ٤

٥ س - ٣ ص = ١٣ .... (٣)

من (١) أيضاً $\frac{\text{ص}+١}{٤} = \frac{\text{ع}-٢}{٢}$

∴ ص + ١ = ٢ ع - ٤ من (٢)

ص + ١ = ١٠ - ٢ س + ٢ ص - ٤

∴ ص = ٢ س - ٥ .... (٤)

من (٤) في (٣) ٥ س - ٦ س + ١٥ = ١٣

- س = - ٢ ∴ $\boxed{\text{س} = ٢}$

من (٤) ص = ٤ - ٥ ∴ $\boxed{\text{ص} = -١}$

من (٢) ع = ٥ - ٢ - ١ ∴ $\boxed{\text{ع} = ٢}$

∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، - ١ ، ٢)

---

(١٥) $\overline{\text{ب جـ}} = \bar{\text{جـ}} - \bar{\text{ب}} = (٦ ، -٤ ، ٢)$

∴ متجه اتجاه $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يمكن اعتباره $\bar{\text{هـ}}$ = (٣ ، - ٢ ، ١)

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ هى $\bar{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ل (٣ ، - ٢ ، ١)

س = ١ + ٣ ل ، ص = ٢ - ٢ ل ، ع = ٣ + ل

نفرض مسقط ﻡ على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ هو النقطة ٮ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

∴ ٮ على الصورة ٮ = (١ + ٣ ك ، ٢ - ٢ ك ، ٣ + ك)

$\overline{\text{اٮ}} = \bar{\text{ٮ}} - \bar{\text{ا}} = \bar{\text{ٮ}} - (٠ ، ٩ ، ٦)$

= (١ + ٣ ل ، - ٧ - ٢ ل ، - ٣ + ل)

∵ ٮ هي مسقط ﻡ على $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{اٮ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{اٮ}} . \bar{\text{هـ}}$ = ٠ ∴ ٣ + ٩ ل + ١٤ + ٤ ل - ٣ + ل = ٠

١٤ ل = - ١٤ ∴ ل = - ١

∴ مسقط ﻡ على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ هو ٮ أى هو (- ٢ ، ٤ ، ٢).

---

(١٦) ∵ $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ المستويان متوازيان.

نأخذ نقطة على الأول ولتكن: س = ١ ، ص = ٢

∴ ٢ ع = ٨ - ٢ - ٢ = ٤ ، ع = ٢ ، النقطة (١ ، ٢ ، ٢)

طول العمود ل من النقطة على المستوى الثانى

∴ ل = $\frac{|٤\times١ + ٢\times٢ + ٤\times٢ + ٥|}{\sqrt{٤^٢ + ٢^٢ + ٤^٢}} = \frac{٢١}{٦} = ٣{,}٥$ وحدة طول

---

(١٧) نقط تقاطع المستوى مع المحاور يمكن الحصول عليها من المعادلة

$\frac{\text{س}}{\text{ا}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} + \frac{\text{ع}}{\text{جـ}} = ١$ .... (١)

∴ نقط التقاطع هى (ﻡ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ب ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، جـ)

∵ نقطة تقاطع متوسطات Δ ﻡ ب جـ هي (س١ ، ص١ ، ع١)

$\therefore$ س$_1$ = $\frac{أ}{٣}$ ، ص$_1$ = $\frac{ب}{٣}$ ، ع$_1$ = $\frac{جـ}{٣}$

من (١) $\frac{س}{\frac{أ}{٣}} + \frac{ص}{\frac{ب}{٣}} + \frac{ع}{\frac{جـ}{٣}} = \frac{١}{\frac{١}{٣}}$ $\therefore$ $\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = ٣$

إختبار كتاب المدرسة التراكمي على الوحدة الثانية

(١) $\because$ $\vec{هـ} = (\sqrt{٢} ، ١ ، ١)$ ، $\|\vec{هـ}\| = \sqrt{٢+١+١} = ٢$

$\therefore$ جيوب تمام زوايا الاتجاه هي $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

$\therefore$ جتا $\theta_ع = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ $\theta_ع = ٦٠°$

(٢) أ = (-١ ، ٠ ، ١) ، ب = (١ ، ١ ، -١) ، $\vec{هـ}$ = (٢ ، ١ ، -١)

$\vec{أب}$ = (٢ ، ١ ، -٢) ، $\|\vec{أب}\| = \sqrt{٤+١+٤} = ٣$

المسقط = $\frac{|\vec{أب} . \vec{هـ}|}{\|\vec{هـ}\|} = \frac{|٤+١+٢|}{\sqrt{٤+١+١}} = \frac{٧}{\sqrt{٦}}$

طول العمود = $\sqrt{\|\vec{أب}\|^٢ - \text{مربع المسقط}} = \sqrt{٩ - \frac{٤٩}{٦}}$

= $\sqrt{\frac{٥}{٦}}$ = ٠,٩١٣ وحدة طول

(٣) $\vec{هـ}$ = (٢ ، -١ ، -٣)

معادلة المستقيم المتجهة هي $\vec{ر}$ = (-١ ، ٠ ، ٣) + ك (٢ ، -١ ، -٣)

المعادلات البارا مترية هي س = -١ + ٢ك ، ص = -ك ، ع = ٣ - ٣ك

(٤) $\vec{ن}_1$ = $(-١ ، -١ ، \sqrt{٢})$

$\vec{ن}_2$ = $(١ ، -١ ، \sqrt{٢})$

جتا $\theta = \frac{|\vec{ن}_1 . \vec{ن}_2|}{\|\vec{ن}_1\| \|\vec{ن}_2\|} = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ $\theta = ٦٠°$

(٥) معادلة المستوى هي (٥ ، ٢ ، -٣) . $\vec{ر}$ = ١٩

$\therefore$ هي ٥ س + ٢ ص - ٣ ع = ١٩

(٦) $\because$ أي نقطة على محور الصادات على الصورة (٠ ، ص ، ٠)

بالتعويض في معادلة المستوى $\therefore$ ٠ - ٤ ص + ٠ + ١٠ = ٠

$\therefore$ ص = $\frac{١٠}{٤}$ = ٢,٥ وحدة

$\therefore$ المستوى يقطع من محور الصادات الموجب جزء طوله ٢,٥ وحدة

حل آخر $\because$ معادلة المستوى هي ٣ س - ٤ ص + ع = -١٠

بالقسمة على -١٠ $\therefore$ المعادلة هي $\frac{٣س}{-١٠} - \frac{٤ص}{-١٠} + \frac{ع}{-١٠} = ١$

$\frac{س}{\frac{-١٠}{٣}} + \frac{ص}{\frac{-١٠}{-٤}} + \frac{ع}{-١٠} = ١$

$\therefore$ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{١٠}{٤} = ٢\frac{١}{٢}$ وحدة طول

(٧) $\because$ النقطة (-١ ، ٢ ، ٠)

تقع على المستقيم بالتعويض في معادلة المستوى الأيمن

= -١ - ٤ + ٥ = ٠ = الأيسر

$\therefore$ نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى هي (-١ ، ٢ ، ٠)

(٨) طول العمود من النقطة أ (أ ، ب ، جـ) على محور السينات

$\because$ و (٠ ، ٠ ، ٠) على محور السينات

$\vec{وأ}$ = (أ ، ب ، جـ) ،

$\|\vec{وأ}\| = \sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}$

المسقط = $\vec{وأ} . \vec{س} = أ$

طول العمود = $\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢}$

= $\sqrt{ب^٢ + جـ^٢}$ الجواب (جـ)

(٩) معادلة محور السينات في الفراغ

هي: ص = ٠ ، ع = ٠ الجواب (جـ)

(١٠) $\vec{هـ}$ = (٢ ، -٤ ، ٢)

$\therefore$ $\vec{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (٢ ، -٤ ، ٢) الجواب (أ)

(١١) معادلة المستقيم هي $\frac{س-٢}{١} = \frac{ص+١}{٢} = \frac{ع-٣}{-١}$

النقطة التي تحقق الثلاثة أطراف هي (٣ ، ١ ، ٢) الجواب (جـ).

(١٢) المسافة هي ٦ وحدات الجواب (جـ)

(١٣) (أ) المعادلة المتماثلة هي $\frac{س-١}{٥} = \frac{ص-٣}{٤} = \frac{ع-٩}{٢}$

(ب) $\vec{ر}$ = (٠ ، ٢ ، ٠) + ك (٣ ، -١ ، ٤)

المعادلة المتماثلة هي $\frac{س}{٣} = \frac{ص-٢}{-١} = \frac{ع}{٤}$

(١٤) (أ) المستقيم الأول هو $\frac{س}{\frac{١}{٢}} = \frac{ص - \frac{١}{٣}}{\frac{١}{٣}} = \frac{ع - ٣}{١}$

∴ $\vec{هـ}_1 = (٣ ، ٢ ، ٦)$ ∴ $\vec{هـ}_2 = (-١ ، ١ ، ٢)$

$جتا\,\theta = \frac{|-٣+٢+١٢|}{\sqrt{٩+٤+٣٦}\,\sqrt{١+١+٤}} = \frac{١١}{٧\sqrt{٦}} = ٠,٦٤١٥$

∴ $ق(\theta^\circ) = ٥٠^\circ\ ٦'$

(ب) $\vec{ق}_1 = (٣ ، -١ ، ٠)$ ، $\vec{ق}_2 = (١ ، -٢ ، ٠)$

$جتا\,\theta = \frac{|٣+٢+٠|}{\sqrt{٩+١}\,\sqrt{١+٤}} = \frac{٥}{\sqrt{٥٠}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $ق(\theta^\circ) = ٤٥^\circ$

(١٥) النقطة (٢ ، ٣ ، ٥) تقع في المستوى

$\vec{هـ}_1 = (-١ ، ٣ ، ٤)$ ، $\vec{هـ}_2 = (٦ ، ١ ، -٢)$

متجها اتجاه مستقيمان في المستوى

∴ $\vec{هـ}_1 \times \vec{هـ}_2 = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -١ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$

$= -١٠\vec{س} + ٢٢\vec{ص} - ١٩\vec{ع}$ = متجه جديد ⊥ على المستوى

∴ (س ، ص ، ع) . (-١٠ ، ٢٢ ، -١٩)

= (٢ ، ٣ ، ٥) . (-١٠ ، ٢٢ ، -١٩)

∴ المعادلة الإحداثية للمستوى هي: -١٠س + ٢٢ ص - ١٩ ع = - ٤٩

∴ هي: ١٠س - ٢٢ ص +١٩ ع = ٤٩

(١٦) $\vec{ن}_1 = (٢ ، ٢ ، ٧)$ ، $\vec{ن}_2 = (٣ ، -٤ ، ٤)$

$جتا\,\theta = \frac{|٦-٨+٢٨|}{\sqrt{٢^2+٢^2+٧^2}\,\sqrt{٣^2+(-٤)^2+٤^2}}$

$= \frac{٢٦}{\sqrt{٥٧}\,\sqrt{٤١}}$

$جتا\,\theta = ٠,٥٣٧٨٣$ ∴ $ق(\theta^\circ) = ٥٧^\circ\ ٢٨'$

إختبارات كتاب لامي على الوحدة الاولى

الاختبار الأول

(١) (أ) (١) ∵ المستقيم ⊥ المستوى

∴ المستقيم // متجه الاتجاه العمودى على المستوى

∴ $\frac{٢}{١} = \frac{٤}{ك} = \frac{-٢}{م}$ ∴ ٢ك = ٤ ∴ ك = ٢ ،

٢ م = -٢ ∴ م = -١

بالتعويض بالنقطة (٢ ، ٣ ، -١) في معادلة المستوى

∵ ٢ + ٢ × ٣ - ١ × -١ = هـ

∴ هـ = ٢ + ٦ + ١ = ٩ ∴ ك = ٢ ، م = -١ ، هـ = ٩

(٢) من شرط التوازى ∴ $\vec{هـ}_1 = \vec{هـ}_2 = (١ ، ٢ ، -٣)$

∴ معادلة المستقيم هى: $\vec{ر} = (٤ ، -٣ ، ٣) + ك\,(١ ، ٢ ، -٣)$

(ب) (أ) ∵ المستويان متعامدان ∴ $\vec{ن}_1 . \vec{ن}_2 = ٠$

∴ ٤ - ٩ + ٥ك = ٠ ∴ ك = ١ الجواب (جـ)

(٢) $جتا\,\theta = \frac{|(-٣ ، ٤ ، ١٢).(٢ ، ١ ، -٢)|}{\sqrt{٩+١٦+١٤٤}\,\sqrt{٤+١+٤}}$

$= \frac{|-٦+٤-٢٤|}{١٣ \times ٣} = \frac{٢}{٣}$ ، $\theta = ٤٨^\circ\ ١١'$ الجواب (ب)

(٢) (أ) $\vec{هـ}_1 = (٣ ، ٢ ، ١)$ ، $\vec{هـ}_2 = (٦ ، ٦ ، -٧)$

$جتا\,\theta = \frac{|(٣ ، ٢ ، ١).(٦ ، ٦ ، -٧)|}{\sqrt{٩+٤+١}\,\sqrt{٣٦+٣٦+٤٩}}$

$= \frac{|١٨+١٢-٧|}{\sqrt{١٤}\,\sqrt{١٢١}} = \frac{٢٣}{١١\sqrt{١٤}}$

$جتا\,\theta = ٠,٥٥٨٨$ ∴ $ق(\theta^\circ) = ٥٥^\circ\ ٢'$

(ب) $\vec{ن}_1 = (٢ ، ٣ ، -١)$ ، $\vec{ن}_2 = (٢ ، ١ ، ٤)$

$جتا\,\theta = \frac{|\vec{ن}_1 . \vec{ن}_2|}{\|\vec{ن}_1\|\,\|\vec{ن}_2\|} = \frac{|٤+٣-٤|}{\sqrt{٤+٩+١}\,\sqrt{٤+١+١٦}}$

$= \frac{٣}{\sqrt{١٤}\,\sqrt{٢١}} = ٠,١٧٤٩٦$ ∴ $ق(\theta^\circ) = ٧٩^\circ\ ٥٥'$

(٣) (أ) بالتعويض بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣)

في معادلة الكرة ∴ الأيمن = ١ + ٤ + ٩ - ٢ + ٨ - ١٨ = ٢ = الأيسر

∴ النقطة أ تقع على الكرة ، مركز الكرة م = (١ ، -٢ ، ٣)

∴ نصف قطر الكرة المار بنقطة أ هو $\overline{أم}$

∴ متجه اتجاه نصف القطر : $\vec{أم} = \vec{م} - \vec{أ} = (٠ ، -٤ ، ٠)$

∵ المستوى المماس للكرة ⊥ نصف القطر

∴ معادلة المستوى المار بنقطة ا هو : (٠ ، -٤ ، ٠) . ر = -٨

(ب) ∵ هـ١ . هـ٢ = -٦ + ٣ + ٣ = ٠ ∴ المستقيمان متعامدان.

∵ س = ٣ + ٢ك١ = ١١ - ٣ك٢

∴ ٢ك١ + ٣ك٢ = ٨ .... (١)

ص = ٤ + ٣ك١ = ٥ + ك٢

٣ك١ - ك٢ = ١ (٢) × ٣

٩ك١ - ٣ك٢ = ٣ بالجمع مع (١)

١١ك١ = ١١ ∴ ك١ = ١ ∴ ك٢ = ٣ - ١ = ٢ ∴ ك٢ = ٢

المعادلة الثالثة : ع = -٢ = ك١ = -١ ، ع = ٢ + ٣ك٢ = ٢ + ٦ = ٨

∴ لا تتحقق المعادلة الثالثة ∴ لا توجد قيمة لـ ك١ ، ك٢

تجعل ر١ = ر٢ ∴ المستقيمان غير متقاطعان

، هما متعامدان أى غير متوازيان ∴ المستقيمان متخالفان.

(٤) (ا) طول العمود = ل = $\frac{|ا س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{ا^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$

$= \frac{|٣\times٤+٢\times٣-٢\times-٢-٥|}{\sqrt{٩+٤+٤}}$

$= \frac{|١٢+٦+٤-٥|}{\sqrt{١٧}} = \frac{١٧}{\sqrt{١٧}} = \sqrt{١٧}$ وحدة طول

(ب) اب = ب - ا = (٣ ، ٤ ، -٣)

$||اب|| = \sqrt{٩+١٦+٩} = \sqrt{٣٤}$

$\frac{|اب . هـ|}{||هـ||} =$ | مسقط اب على هـ |

$= \frac{|٦+١٢+٦|}{\sqrt{١٧}} = \frac{٢٤}{\sqrt{١٧}}$

طول العمود $= \sqrt{٣٤ - \left(\frac{٢٤}{\sqrt{١٧}}\right)^٢} = \sqrt{\frac{٢}{١٧}} = ١١٧٦,$

$=١٢,$ وحدة طول تقريباً

(٥) (ا) ن = (٣ ، ٤ ، -١) - (-١ ، ٥ ، ٢)

ن = (٤ ، -١ ، -٣)

∵ المستوى يمر بالنقطة ا (٥ ، ٢ ، ١)

∴ معادلته هي: ن . ر = ن . ا

(٤ ، -١ ، -٣) . ر = (٤ ، -١ ، -٣) . ا

∴ الصورة المتجهة للمعادلة هى : (٤ ، -١ ، -٣) . ر = ١٥

الصورة القياسية هى : ٤ (س - ٥) - (ص - ٢) - ٣ (ع - ١) = ٠

الصورة العامة هى : ٤ س - ص - ٣ ع - ١٥ = صفر

(ب) ∵ المستقيم عمودى على المستوى

∴ متجه اتجاهه هو متجه الاتجاه العمودى على المستوى

∴ هـ = ن = (٢ ، -١ ، ١)

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم هى :

ر = (٣ ، ١ ، ٧) + ك (٢ ، -١ ، ١)

∴ الصورة البارامترية هى : س = ٣ + ٢ك ، ص = ١ - ك ،

ع = ٧ + ك

الصورة المتماثلة هى : $\frac{س-٣}{٢} = \frac{ص-١}{-١} = \frac{ع-٧}{١}$

الاختبار الثاني

(١) (ا) (١) $ل = \frac{|٣\times٢+٤\times٣-١٢\times-١+٩|}{\sqrt{٣^٢+٤^٢+(-١٢)^٢}}$

$= \frac{٣٩}{١٣} = ٣$ وحدات طول.

(٢) هـ = (٢ ، ٢ ، ١) ، ||هـ|| = ٣

∴ جيوب تمام الاتجاه هى $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$

(ب) (١) من التعامد ∴ هـ١ . هـ٢ = ٠

∴ (-٢ ، ٣ ، ١) . (٢ ، ك ، -٢) = ٠

∴ -٤ + ٣ك - ٢ = ٠ ∴ ك = ٢

الجواب (ب)

(٢) النقطة (-١ ، ٢ ، -٣)

الأيمن = -٣ + ٨ + ٦ = ١١ = الأيسر

الجواب (جـ)

(٢) (أ) ∵ $\overline{ن}_{١}$ = (٢ ، ٣ ، - ١) ،

$\overline{ن}_{٢}$ = (- ٤ ، ٣ ، ١) ، ∵ $\overline{ن}_{١} . \overline{ن}_{٢}$ = - ٨ + ٩ - ١ = ٠

∴ المستويان متعامدان.

∵ المستويان هما : ٢ س + ٣ ص - ع = ١١ ، (١)

- ٤ س + ٣ ص + ع = ٥ (٢)

بضرب (١) × (٢) : ٤ س + ٦ ص - ٢ ع = ٢٢

بالجمع ٩ ص - ع = ٢٧ ، ع = ٩ ص - ٢٧

بطرح (٢) من (١) ٦ س - ٢ ع = ٦ ، ٣ س - ٣ = ع

∴ معادلة خط التقاطع هى : $\frac{٣س - ٣}{١} = \frac{٩ص - ٢٧}{١} = \frac{ع}{١}$

(ب) ∵ المستقيم عمودى على المستوى

∴ متجه اتجاهه هو متجه الاتجاه العمودى على المستوى

∴ $\overline{هـ} = \overline{ن}$ = (٣ ، - ٢ ، ١)

∴ معادلة المستقيم هى : $\overline{ر}$ = (٢ ، ٤ ، ٥) + ك (٣ ، - ١ ، ١)

بالتعويض بالنقطة (٢ ، ٤ ، ٥) الواقعة على المستقيم فى معادلة المستوى

الأيمن = ٣ × ٢ - ٢ × ٤ + ١ × ٥ = ٣ = الأيسر

∴ تقع على المستوى لأنها تحقق معادلته

∴ نقطة تقاطع المستقيم والمستوى هى النقطة (٢ ، ٤ ، ٥)

(٣) (أ) المستويان هما :

٣ س - ٤ ص + ١٢ ع = ٢٤ ، (١)

- ٦ س + ٨ ص - ٢٤ ع = ١٧ (٢)

، ∵ $\frac{-٦}{٣} = -٢$ ، $\frac{٨}{-٤} = -٢$ ، $\frac{-٢٤}{١٢} = -٢$

∴ المستويان متوازيان.

لإيجاد البُعد العمودى بينهما نأخذ نقطة فى أحدهما ونوجد طول العمود منها إلى الآخر.

من المستوى (١) نفرض س = ٠ ، ص = ٠ ∴ ١٢ ع = ٢٤ ∴ ع = ٢

∴ النقطة هى (٠ ، ٠ ، ٢)

طول العمود ل $= \frac{|٠ + ٠ - ٢٤ \times ٢ - ١٧|}{\sqrt{(-٦)^{٢} + (٨)^{٢} + (-٢٤)^{٢}}}$

$= \frac{٦٥}{٢٦} = ٢,٥$ وحدة طول

∴ البُعد بين المستويين = ٢,٥ وحدة طول

(ب) بالتعويض بالنقطة أ (٢ ، ١ ، - ٢)

فى معادلة الكرة : الأيمن = ٩ + ١ + ٤ + ٨ - ٨ + ٤ = ١٨ = الأيسر

∴ النقطة أ تقع على الكرة لأنها تحقق معادلتها.

مركز الكرة م = (- ٢ ، ٤ ، ١) ∴ $\overline{أم}$ = نصف قطر الكرة

∴ $\overline{أم}$ = متجه اتجاه لقطر المار بنقطة أ

∴ $\overline{أم} = \overline{م} - \overline{أ}$ = (- ٤ ، ٣ ، ٣)

∴ معادلة قطر الكرة المار بالنقطة أ هى :

$\overline{ر}$ = (٢ ، ١ ، - ٢) + ك (- ٤ ، ٣ ، ٣)

(٤) (أ) $\overline{هـ}$ = (- ٢ ، ١ ، ٣) ، $\overline{ن}$ = (٤ ، ٥ ، ١)

∵ $\overline{ن} . \overline{هـ}$ = - ٨ + ٥ + ٣ = ٠

∴ متجه اتجاه المستقيم عمودى على المتجه العمودى على المستوى

∴ المستقيم يوازى المستوى

∵ النقطة (٢ ، ٣ ، ٤) واقعة على المستقيم

∴ طول العمود المرسوم منها إلى المستوى هو البُعد العمودي ين المستقيم والمستوى

∴ طول العمود ل $= \frac{|٤\times٢ + ٥\times٣ + ١\times٤ - ٦|}{\sqrt{٤^{٢} + ٥^{٢} + ١^{٢}}}$

$= \frac{٢١}{\sqrt{٤٢}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٢}$ وحدة طول.

(ب) س = ٢ + $ك_{١}$ = - ١ + ٢ $ك_{٢}$

∴ $ك_{١} = ٢ ك_{٢} - ٣$ ..... (١)

ص = ٧ - ٢ $ك_{١}$ = - ٣ + ٤ $ك_{٢}$ من (١)

∴ ٧ - ٤ $ك_{٢}$ + ٦ = - ٣ + ٤ $ك_{٢}$

∴ ١٦ = ٨ $ك_{٢}$ ∴ $\boxed{ك_{٢} = ٢}$

من (١) $ك_{١}$ = ٢ × ٢ - ٣ ∴ $\boxed{ك_{١} = ١}$

المعادلة الثالثة ع = ٣ + ٣ $ك_{١}$ = ٦

، ع = ٢ + ٢ $ك_{٢}$ = ٦ تتحقق

∴ المستقيمان يتقاطعان ، س = ٣ ، ص = ٥

∴ نقطة التقاطع هى (٣ ، ٥ ، ٦)

∵ $\overline{\text{هـ}}_{١}$ = (١ ، -٢ ، ٣) ، $\overline{\text{هـ}}_{٢}$ = (٢ ، ٤ ، ٢)

، ∵ $\overline{\text{هـ}}_{١} \times \overline{\text{هـ}}_{٢}$ = متجه عمودى على المستوى الذى يحويهما

∴ يحدد المتجه $\overline{\text{ن}}$

$$∴ \overline{\text{هـ}}_{١} \times \overline{\text{هـ}}_{٢} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ١ & -٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} = -١٦\overline{\text{س}} + ٤\overline{\text{ص}} + ٨\overline{\text{ص}}$$

∴ يمكن اعتبار : $\overline{\text{ن}}$ = (-٤ ، ١ ، ٢)

وباستخدام أى نقطة على أحد المستقيمين ولتكن أ (-١ ، -٣ ، ٢)

∴ معادلة المستوى هى : (-٤ ، ١ ، ٢) . $\overline{\text{ر}}$

= (-٤ ، ١ ، ٢) . (-١ ، -٣ ، ٢) ∴ (-٤ ، ١ ، ٢) . $\overline{\text{ر}}$ = ٥

هى معادلة المستوى المطلوب.

(٥) (أ) ∵ $\overline{\text{هـ}}_{١}$ = (٢ ، ٣ ، -٤) ، $\overline{\text{هـ}}_{٢}$ = (٣ ، ٢ ، -١)

$$، ∵ \text{جتا}\,\theta = \frac{|\overline{\text{هـ}}_{١} . \overline{\text{هـ}}_{٢}|}{\|\overline{\text{هـ}}_{١}\| \, \|\overline{\text{هـ}}_{٢}\|}$$

$$∴ \text{جتا}\,\theta = \frac{|٦ + ٦ + ٤|}{\sqrt{٤ + ٩ + ١٦}\,\sqrt{٩ + ٤ + ١}}$$

$$= \frac{١٦}{\sqrt{٢٩}\,\sqrt{١٤}} = ٠,٧٩٤١$$

$$∴ \text{ق}(\theta^\circ) = ٣٧^\circ \; ٢٦'$$

(ب) بالتعويض بالنقطة (٢ ، ٣ ، ٥) فى معادلة المستوى

∴ الأيمن = ٣ × ٢ + ٤ × ٣ − ١ × ٥ = ١٣ = الأيسر

∴ تحقق معادلة المستوى

∴ النقطة تقع فى المستوى

، ∵ النقطة (٢ ، ٣ ، ٥) تقع على المستقيم

وهى تقع على المنحنى

∴ لإثبات أن المستقيم يقع فى المستوى هناك طريقتان

أما أن نوجد نقطة أخرى تقع على كل من المستقيم والمستوى أو نثبت أن المستقيم // المستوى وهما يشتركان فى نقطة

∴ المستقيم يقع فى المستوى وسوف نحل بالطريقة الثانية

∵ $\overline{\text{هـ}} . \overline{\text{ن}}$ = (٣ ، -٢ ، ١) . (٣ ، ٤ ، -١) = ٩ − ٨ − ١ = ٠

∴ المستقيم عمودى على المتجه العمودى على المستوى

∴ المستقيم // المستوى ∴ يقع فى المستوى.

لضمان التفوق أطلب سلسلة

رامي
في الرياضيات

المرحلة الثانوية

٣ ثانوي

كتاب المسائل في الرياضيات البحتة - الجبر والهندسة الفراغية

كتاب المسائل في الرياضيات البحتة - التفاضل والتكامل

كتاب المسائل في الرياضيات التطبيقية - الميكانيكا

كتاب الامتحانات في الرياضيات البحتة والتطبيقية

٢ ثانوي

كتاب المسائل والامتحانات في الرياضيات البحتة للقسم العلمي (الفصل الدراسي الاول)

كتاب المسائل و الامتحانات في الرياضيات البحتة للقسم العلمي (الفصل الدراسي الثاني)

كتاب المسائل و الامتحانات في تطبيقات الرياضيات للقسم العلمي

١ ثانوي

كتاب المسائل في الرياضيات (الفصل الدراسي الاول)

كتاب المسائل في الرياضيات (الفصل الدراسي الثاني)

السعر ٩٦ ستة وتسعون جنيها للثلاثة أجزاء والملحق معها

يطلب من

المكتبة الفخرية بالمحلة ت ٢٥٨٨١١٣٤

وجميع مكتبات الجمهورية